Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 5, 2018, стр. 3 – 10

ОБ M^*-МНОЖЕСТВАХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

Г. Г. ГЕВОРКЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *ggg@ysu.am*

Аннотация. Доказывается, что множество E является M^*-множеством или AM^*-множеством для системы Франклина, тогда и только тогда, когда E содержит в себе непустое совершенное множество.

MSC2010 number: 42C10; 42C20.

Ключевые слова: Система Франклина; M^*-множество.

1. Введение

Напомним, что множество $E \subset [a,b]$ называется U-множеством (множеством единственности) для системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [a,b]$, если из условия $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x) = 0$, $x \in [a,b]\backslash E$, следует, что все коэффициенты a_n равны нулю. В противном случае множество E называется M-множеством, т.е. $E \subset [a,b]$ является M-множеством, если существует нетривиальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\varphi_n(x)$, частичные суммы которого вне E всюду сходятся к нулю.

Классическая теорема Кантора гласит (см. [1] стр.191 или [2]), что пустое множество является U-множеством для тригонометрической системы. Далее, Юнг доказал (см. [1] стр.792, или [3]), что любое счетное множество является U-множеством для тригонометрической системы. Очевидно, что любое множество $E \subset [-\pi,\pi]$, с положительной мерой является M-множеством для тригонометрической системы. Действительно, для этого нужно рассмотреть ряд Фурье характеристической функции множества F, где $F \subset E$ некоторое замкнутое множество положительной меры.

Долгое время оставался открытым вопрос: является ли всякое множество меры нуль U-множеством для тригонометрической системы? В 1916 году Д. Е. Меньшовым [4] был приведен пример нетривиального тригонометрического ряда, сумма которого почти всюду (п.в.) равна нулю.

[0]Исследования выполнены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 15T–1A006

Известны также примеры множеств меры нуль, которые являются U-множествами для тригонометрической системы (см. [1], [5] и [6]).

Независимо несколькими авторами [7]-[9] было доказано, что пустое множество является U-множеством для системы Хаара. Известно, что любое одноточечное множество является M-множеством для системы Хаара (см. [10]).

Ф. Г. Арутюняном и А. А. Талаляном [11], в частности, доказано что если ряд по системе Хаара $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n(x)$, с коэффициентами

$$a_n = o(\sqrt{n}), \tag{1.1}$$

всюду, кроме быть может, некоторого счетного множества сходится к нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю.

Следуя Г. М. Мушегяну [12], множество E назовем M^*-множеством для системы Хаара, если существует нетривиальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n(x)$, с коэффициентами (1.1), такое что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n(x) = 0$, для любого $x \in [0,1]\setminus E$. В той же работе Г.М. Мушегян доказал, что множество E является M^*-множеством для системы Хаара, тогда и только тогда, когда E содержит непустое совершенное подмножество.

В настоящей работе доказывается аналог вышеупомянутого результата Г.М. Мушегяна для системы Франклина.

2. Основной результат

Для формулировки основного результата, напомним определение системы Франклина.

Пусть $n = 2^\mu + \nu$, где $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, и $1 \le \nu \le 2^\mu$. Обозначим

$$s_{n,i} = \begin{cases} \frac{i}{2^{\mu+1}}, & \text{для } 0 \le i \le 2\nu, \\ \frac{i-\nu}{2^\mu}, & \text{для } 2\nu < i \le n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Через S_n обозначим пространство функций, непрерывных и кусочно линейных на $[0;1]$ с узлами $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$, т.е. $f \in S_n$, если $f \in C[0;1]$ и линейная на каждом отрезке $[s_{n,i-1}; s_{n,i}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ясно, что $\dim S_n = n+1$ и множество $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$ получается добавлением точки $s_{n,2\nu-1}$ к множеству $\{s_{n-1,i}\}_{i=0}^{n-1}$. Поэтому, существует единственная, с точностью до знака, функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\|f_n\|_2 = 1$. Полагая $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$, $x \in [0;1]$, получим ортонормированную систему $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, которая эквивалентным образом определена в работе [13] и называется системой Франклина.

Недавно, в работах [14], [15] была доказана теорема типа Кантора для системы Франклина, т.е. доказана, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) = 0$, $x \in [0,1]$, то все коэффициенты a_n равны нулю. Тем самым, доказано, что пустое множество является U-множеством для системы Франклина.

Для $n = 2^\mu + \nu$, где $\mu = 0, 1, 2, ...,$ и $1 \le \nu \le 2^\mu$, обозначим $t_n := s_{n,2\nu-1}$ (см. (2.1)), и $[n] := \mu$.

Систематическое изучение системы Франклина началось с работ [17], [18], где получены многие важные свойства этой системы. В частности, получены знаменитые экспоненциальные оценки для функций Франклина и ядер Дирихле системы Франклина. З. Чисельским доказано существование постоянных $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $q_1 \in (0,1)$, $q_2 \in (0,1)$, таких что

$$|f_n(x)| \le C_1 \cdot 2^{\frac{[n]}{2}} \cdot q_1^{2^{[n]}|x-t_n|}, \quad x \in [0,1], \tag{2.2}$$

$$|K_n(x,t)| \le C_2 \cdot 2^{[n]} \cdot q_2^{2^{[n]}|x-t|}, \quad x,t \in [0,1], \tag{2.3}$$

где

$$K_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) f_k(t), \tag{2.4}$$

является n-ым ядром Дирихле системы Франклина.

Пусть x_0-некоторое число из $[0,1]$ и $a_k = f_k(x_0)$. Из (2.4) и (2.3) следует, что $\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x) = 0$, когда $x \ne x_0$. Очевидно также, что $a_0 = 1$. Следовательно, любое одноточечное множество является M-множеством для системы Франклина.

Определение 2.1. *Множество E назовем M^*-множеством для системы Франклина, если существует нетривиальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$, с коэффициентами (1.1) такой, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) = 0$, для любого $x \in [0,1] \setminus E$.*

В работе [14] анонсировано, а в [15] доказано, что любое счетное множество не является M^*-множеством для системы Франклина. В работе [16] доказана более общая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x)$, с коэффициентами (1.1), сходится по мере к интегрируемой функции и всюду, кроме быть может, некоторого счетного множества, выполняется $\sup_n |\sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x)| < \infty$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x)$ является рядом Фурье-Франклина этой функции.*

В настоящей работе доказывается полный аналог теоремы Г.М. Мушегяна для системы Франклина.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы множество E являлось M^*-множеством для системы Франклина, необходимо и достаточно, чтобы E содержало непустое совершенное подмножество.*

Доказательство. **Необходимость.** Допустим множество E является M^* - множеством для системы Франклина. Тогда существует нетривиальный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x)$, с коэффицентами (1.1), который всюду вне E сходится к нулю. В силу теоремы 2.1 множество E-несчетно. Обозначим $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x)$, $n = 0, 1, ...$, $x \in [0,1]$. Очевидно, что множество

$$B := \{x \in [0,1] : S_n(x) \not\to 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{n=p}^{\infty} \left\{x \in [0,1] : |S_n(x)| > \frac{1}{m}\right\}$$

является борелевским множеством и содержится в E. В силу теоремы 2.1 множество B-несчетно. Всякое несчетное борелевское множество содержит непустое совершенное подмножество. Следовательно, множество E содержит непустое совершенное подмножество. Необходимость доказана.

Достаточность. Нужно доказать, что любое непустое совершенное множество меры нуль является M^*-множеством. Пусть P-непустое совершенное множество меры нуль и $a := \min\{x : x \in P\}$, $b := \max\{x : x \in P\}$. Тогда $P = [a,b] \setminus (\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k))$, где интервалы (a_i, b_i) взаимно непересекаются и не имеют общих концов. Причем количество невырожденных интервалов (a_k, b_k) счетно. По индукции определим отрезки Δ_j, $j = 0, 1, 2, ...$ Положим $\Delta_0 := [0, a]$, $\Delta_1 := [b, 1]$. Обозначим $\delta_1 = \sup_{k \geq 1}(b_k - a_k)$. Ясно, что $0 < \delta_1 < 1$. Поэтому существует j_1, такое что $(b_{j_1} - a_{j_1}) > \frac{\delta_1}{2}$. Положим $\Delta_2 = [a_{j_1}, b_{j_1}]$.

Допустим определены отрезки Δ_q, числа δ_q j_q, $q = 1, 2, ..., m$, со свойствами:

(1) $\Delta_{q+1} = [a_{j_q}, b_{j_q}]$;

(2) $b_{j_q} - a_{j_q} > \frac{\delta_q}{2}$, $j_q \notin \{j_1, ..., j_{q-1}\}$;

(3) $\delta_q = \sup\{b_k - a_k : k \neq j_p, p = 1, 2, ..., q-1\}$.

Обозначим $\delta_{m+1} = \sup\{b_k - a_k : k \neq j_p, p = 1, 2, ..., m\}$. Очевидно, что $0 < \delta_{m+1} < 1$. Поэтому найдется $j_{m+1} \notin \{j_1, j_2, ..., j_m\}$, такое что $b_{j_{m+1}} - a_{j_{m+1}} > \frac{\delta_{m+1}}{2}$. Положив $\Delta_{m+2} = [a_{j_{m+1}}, b_{j_{m+1}}]$, получим отрезок Δ_{m+2} и число δ_{m+1}, обладающие свойствами: $|\Delta_{m+2}| = b_{j_{m+1}} - a_{j_{m+1}} > \frac{\delta_{m+1}}{2}$ и $\delta_{m+1} = \sup\{b_k - a_k : k \neq j_p, p = 1, 2, ..., m\}$. Таким образом, по индукции определим отрезки Δ_q и числа δ_q j_q,

$q = 1, 2, ...,$ которые удовлетворяют 1.-3., $\Delta_0 = [0, a]$, $\Delta_1 = [b, 1]$. Условие 2. обеспечивает, чтобы для каждого индекса k существовало единственное q, такое чтобы выполнялось $(a_{j_q}, b_{j_q}) = (a_k, b_k)$. Поэтому

$$\Delta_p \bigcap \Delta_q = \emptyset, \quad \text{когда} \quad p \neq q, \tag{2.5}$$

и

$$P = [0, 1] \setminus \left([0, a) \bigcup (b, 1] \bigcup \left(\bigcup_{k=2}^{\infty} (a_{j_k}, b_{j_k}) \right) \right).$$

Определим функции $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, ...,$ следующим образом. Область определения функции ψ_k является множество $D_k := \bigcup_{j=0}^{k} \Delta_j$. Полагается

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{когда } x \in \Delta_0; \\ 1, & \text{когда } x \in \Delta_1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Далее, для $k \geq 2$, функция ψ_k определяется по формуле

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \psi_{k-1}(x), & \text{когда } x \in D_{k-1} \\ \frac{\max_{t<x, t \in D_{k-1}} \psi_{k-1}(t) + \min_{t>x, t \in D_{k-1}} \psi_{k-1}(t)}{2}, & \text{когда } x \in \Delta_k. \end{cases} \tag{2.7}$$

Очевидно, что функции ψ_k принимают двоично-рациональные значения. Учитывая, что множество P имеет меру нуль, выполняется (2.5) и интервалы (a_k, b_k) не имеют общих концов, получим что любое двоично-рациональное значение $r \in [0, 1]$ принимается функциями ψ_k при всех k начиная с некоторого k_0, зависящего от r.

Положим

$$\psi(x) = \sup_{k \geq 1} \max_{t \leq x: t \in D_k} \psi_k(t), \quad x \in [0, 1].$$

Очевидно, что ψ-неубывающая функция, принимающая все двоично-рациональные значения из отрезка $[0, 1]$. Следовательно, ψ-непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Из (2.6) и (2.7) следует, что

$$\psi(0) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(1) = 1. \tag{2.8}$$

Кроме того, из (2.8) следует, что функция ψ на отрезках Δ_k принимает постоянные значения.

Положим

$$a_n = \int_0^1 f_n(t) d\psi(t), \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.9}$$

и

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.10}$$

Из (2.4), (2.9) и (2.10) имеем

$$S_n(x) = \int_0^1 K_n(x,t)d\psi(t), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Пусть $x \notin P$. Поскольку P-замкнутое множество, то существует $\eta > 0$, такое что

$$(x-\eta, x+\eta) \bigcap P = \emptyset.$$

Следовательно, на $(x-\eta, x+\eta)$ функция ψ-постоянна и поэтому

$$(2.11) \quad |S_n(x)| = \left|\int_0^1 K_n(x,t)d\psi(t)\right| \le \max_{|x-t|\ge\eta} |K_n(x,t)| V(\psi) = \max_{|x-t|\ge\eta} |K_n(x,t)|.$$

Из (2.11) и (2.3) следует

$$|S_n(x)| \le C_2 \cdot 2^{[n]} \cdot q_2^{2^{[n]}\eta}.$$

Отсюда имеем

$$(2.12) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) = 0, \quad \text{когда} \quad x \notin P.$$

Из (2.8) имеем

$$a_0 = \int_0^1 d\psi(t) = 1.$$

Для завершения доказательства теоремы нам остается доказать, что

$$(2.13) \qquad a_n = o\left(\sqrt{n}\right).$$

Пусть $n = 2^\mu + \nu$, где $\mu = 0, 1, 2, ...$, и $1 \le \nu \le 2^\mu$. Тогда из (2.1), (2.9) имеем

$$(2.14) \qquad |a_n| = \left|\int_0^1 f_n(t)d\psi(t)\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{s_{n,i-1}}^{s_{n,i}} f_n(t)d\psi(t)\right| \le$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\psi(s_{n,i}) - \psi(s_{n,i-1})) \max_{t\in[s_{n,i-1},s_{n,i}]} |f_n(t)| \le$$

$$\max_{1\le i\le n} (\psi(s_{n,i}) - \psi(s_{n,i-1})) \sum_{i=1}^{n} \max_{t\in[s_{n,i-1},s_{n,i}]} |f_n(t)|$$

Из (2.2) следует, что

$$(2.15) \qquad \sum_{i=1}^{n} \max_{t\in[s_{n,i-1},s_{n,i}]} |f_n(t)| \le C_3 \cdot \sqrt{n}. \quad \text{где} \quad C_3 - \text{некоторая постоянная}$$

А из непрерывности функции ψ и (2.1) следует, что

$$(2.16) \qquad \lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n} (\psi(s_{n,i}) - \psi(s_{n,i-1})) = 0.$$

Из (2.14)-(2.16) следует (2.13). □

3. Заключительные замечания

Замечание 3.1. *Для ряда, построенного при доказательстве теоремы 2.2, помимо условий (2.12) и (2.13) выполняется также следующее условие:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n f_n(x)| < \infty, \quad \text{когда} \quad x \notin P. \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $x \notin P$. Тогда $x \in (a_i, b_i)$, для некоторого i или $x \in [0, a)$ или $x \in (b, 1]$ (если эти интервалы непусты). Обсудим только случай $x \in (a_i, b_i)$. $\Delta_j = (a_i, b_i)$, для некоторого i. Пусть $\eta = \min\{x - a_i, b_i - x\}$. Фиксируем некоторое натуральное k, с условием $2^{-k} < \eta$ и оценим

$$\sum_{[n]=k} |a_n f_n(x)|.$$

Обозначим $H_p = [\frac{p-1}{2^{k+1}}, \frac{p}{2^{k+1}}]$, $p = 1, 2, ..., 2^{k+1}$. Через $\rho(t, A)$ обозначим расстояние точки t до множества A. Учитывая, что функция ψ на (a_i, b_i) постоянна, для a_n, с условием $[n] = k$, получим

$$|a_n| \leq \sum_{p=1}^{2^{k+1}} \left| \int_{H_p} f_n(t) d\psi(t) \right| \leq \sum_{p:\rho(x,H_p)>\eta} \max_{t \in H_p} |f_n(t)| V_p(\psi), \tag{3.2}$$

где $V_p(\psi) = \psi(\frac{p}{2^{k+1}}) - \psi(\frac{p-1}{2^{k+1}})$.

Из (2.2) имеем

$$\max_{t \in H_p} |f(t)| \leq C_1 \cdot 2^{\frac{k}{2}} \cdot q_1^{2^k \rho(t_n, H_p)}. \tag{3.3}$$

Снова применяя (2.2), из (3.2) и (3.3) получаем

$$\sum_{[n]=k} |a_n f_n(x)| \leq C_3 \cdot 2^k \cdot \sum_{[n]=k} q_1^{2^k |x - t_n|} \sum_{p:\rho(x,H_p)>\eta} q_1^{2^k \rho(t_n, H_p)} V_p(\psi). \tag{3.4}$$

Учитывая, что $\sum_{p=1}^{2^{k+1}} V_p(\psi) = \psi(1) - \psi(0) = 1$ и $|x - t_n| + \rho(t_n, H_p) \geq \rho(x, H_p)$, из (3.4) получим

$$\sum_{[n]=k} |a_n f_n(x)| \leq C_3 \cdot 2^k \sum_{[n]=k} \sum_{p:\rho(x,H_p)>\eta} q_1^{2^k \rho(x,H_p)} V_p(\psi) \leq C_2 \cdot 2^{2k} \cdot q_1^{2^k \eta}. \tag{3.5}$$

Выполнение (3.1) следует из (3.5). □

Определение 3.1. *Множество E назовем AM^*-множеством для системы Франклина, если существует нетривиальный ряд $\sum\limits_0^\infty a_n f_n(x)$, с коэффициентами $a_n = o(\sqrt{n})$, который вне E всюду абсолютно сходится к нулю, т.е.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) = 0 \quad и \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n f_n(x)| < \infty \quad когда \quad x \notin E.$$

Замечание 3.1 указывает на то, что для системы Франклина класс M^*-множеств совпадает с классом AM^*-множеств.

Abstract. In this paper, we prove that a set E is an M^*-set or an AM^*-set for the Franklin system if and only if E contains a nonempty perfect set.

Список литературы

[1] Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Гос. изд. физ-мат лит., Москва (1961).
[2] G. Cantor, "Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie trigonometrischen Reihen", Math. Annalen, **5**, 123 – 132 (1872).
[3] W. H. Young, "A not on trigonometrical series", Mess. of Math, **38**, 44 – 48 (1909).
[4] D. E. Menshoff, "Sur l'unicite du developpement trigonometrique", Comp. rendus de l'Acad. des Sci. a Paris, **163**, 433 – 436 (1916).
[5] A. Rajchman, "Sur l'unicite du developpement trigonometrique", Fund. Math., **3**, 287 – 301 (1922).
[6] N. K. Bari, "Sur l'unicite du developpement trigonometrique", Fund. Math., **9**, 62 – 118 (1927).
[7] Ф. Г. Арутюнян, "О рядах по системе Хаара", ДАН Арм. ССР, **38:3**, 129 – 134 (1964).
[8] М. Б. Петровская, "О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности", Изв. АН, сер. матем, **28:4**, 773 – 798 (1964).
[9] В. А. Скворцов, "Теорема типа Кантора для системы Хаара", Вестник МГУ, сер. матем. 5, 3 – 6 (1964).
[10] G. Faber, "Über die Otrhogonalfunctionen des Herrn Haar", Deutsch. Math. Ver., **19**, 104 – 112 (1910).
[11] Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян, "О единственности рядов по системам Хаара и Уолша", Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., **28**, но. 6, 1391 – 1408 (1964).
[12] М. Г. Мушегян, "О множествах единственности для системы Хаара", Изв. АН Армении, сер. мат., **2**, но. 6, 350 – 361 (1967).
[13] Ph. Fran[illegible] "A set of continuos orthogonal functions", Math. Ann. **100**, 522 – 528 (1928).
[14] Г. Г. [illegible]ево[illegible] "Теоремы единственности для рядов по системе Франклина", Матем. заметк[illegible], **98:5**, [illegible]6 – 789 (2015).
[15] Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по системе Франклина", Матем. сб., **207:12**, 30 – 53 (2016).
[16] Г. Г. Геворкян, "Теоремы единственности рядов Франклина, сходящихся к интегрируемым функциям", Матем. сб., в печати.
[17] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., **23**, 141 – 157 (1963).
[18] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", Studia Math. **27**, 289 – 323 (1966).

Поступила 20 июня 2017