*Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 4, 2018, стр. 46 – 65*

# О РАЗРЕШИМОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В $R^n$

Г. А. КАРАПЕТЯН, Г. А. ПЕТРОСЯН

*Российско-Армянский университет*
E-mails: *garnik_karapetyan@yahoo.com, heghin.petrosyan@gmail.com*

Аннотация. В работе с помощью специальных интегральных представлений функций через регулярный оператор доказывается однозначная разрешимость регулярных гипоэллиптических уравнений в мультианизотропных весовых функциональных пространствах. Причем существование решений доказывается через построения приближенных решений с помощью мультианизотропных интегральных операторов.

**MSC2010 number:** 32Q40.

**Ключевые слова:** мультианизотропное постранство; гипоэллиптическое уравнение; интегральное представление; фундаментальное семейство операторов.

## 1. Введение

В данной работе изучается разрешимость одного класса гипоэллиптических уравнений в $R^n$. Она является обобщением результатов работ Г.В. Демиденко [1]-[3], где с помощью специального интегрального представления, полученного С.В. Успенским в работе [4], построены приближенные решения для квазиэллиптических уравнений во всем пространстве. Трудность изучения регулярных гипоэллиптических уравнений заключается в том, что если старшие части эллиптических и квазиэллиптических операторов соответственно однородны и обобщенно однородны, то старшая часть регулярного оператора – мультинеоднородная. Регулярные операторы введены С.М. Никольским (см. [5]) и В.П. Михайловым (см. [6]) (см. также [7]). При получении настоящих результатов, по существу, были использованы специальное интегральное представление через мультианизотропные ядра и оценки для мультианизотропных ядер, полученных в работах [8]-[11]. Отметим, что первые такие приближения изучались в работе [12] С.Л. Соболева, где получены интегральное представление функций через саму

[0]Работа выполнена в рамках тематического финансирования РАУ из средств МОН РФ и при поддержке тематического финансирования комитета науки при министерстве образования и науки РА (код проекта SCS # 15Т-1А197).

функцию и ее производные. В дальнейшем эти результаты были обобщены для функций, принадлежащих обобщенно однородным пространствам (см. [13]-[15]). В работе доказывается разрешимость регулярных уравнений в специальных весовых пространствах. Подобные пространства в случае $\sigma = 1$ для эллиптических операторов изучались в работах [16]-[17], а для квазиэллиптических операторов – в работе [18]. В случае же произвольных $\sigma \in (0,1)$ подобные пространства были введены в работах Г. В. Демиденко (см. [1]).

## 2. Приближенные решения для регулярных уравнений и их свойства

Пусть $\mathbb{R}^n$ есть $n$-мерное евклидовое пространство, а $\mathbb{Z}_+^n$ – множество мультииндексов из $\mathbb{R}^n$. Для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $t > 0$ введем следующие обозначения: $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $t^\eta = (t^{\eta_1}, \dots, t^{\eta_n})$, $D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, \dots, n)$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ есть обобщенная производная по С.Л. Соболеву порядка $\alpha$.

Для данного набора мультииндексов обозначим через $\mathfrak{N}$ наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки этого набора. Многогранник $\mathfrak{N}$ называется вполне правильным, если имеет вершину в начале координат и на всех координатных осях, а внешние нормали всех $(n-1)$-мерных некоординатных граней имеют положительные координаты. Через $\mathfrak{N}_i^{n-1}$ $(i = 1, \dots, I_{n-1}, I_{n-1} \geq n)$ обозначим $(n-1)$-мерные некоординатные грани многогранника $\mathfrak{N}$, через $\partial'\mathfrak{N}$ – множество всех тех мультииндексов, которые принадлежат хотя бы одной $(n-1)$-мерной некоординатной грани многогранника $\mathfrak{N}$, через $\mathfrak{N}^{(0)} = \mathfrak{N} \setminus \partial'\mathfrak{N}$, а $\{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^M\}$ – множество всех вершин многогранника $\mathfrak{N}$, отличных от нуля.

Пусть $\mu^i$ $(i = 1, \dots, I_{n-1})$ есть такая внешняя нормаль грани $\mathfrak{N}_i^{n-1}$, при которой уравнение гиперплоскости, содержащей данную грань, задается формулой $(\alpha, \mu^i) = 1$ $(i = 1, \dots, I_{n-1})$. Далее будем считать, что многогранник $\mathfrak{N}$ имеет $(n-1)$-мерные грани, содержащие точки $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\} \setminus \{\alpha^i\}$ $(i = 1, \dots, n)$, где $\alpha^i = (0, \dots, 0, l_i, 0, \dots, 0)$. Внешнюю нормаль данной грани обозначим через $\mu^i$ $(i = 1, \dots, n)$. Обозначим также через $\lambda_i = \frac{1}{l_i}$ $(i = 1, \dots, n)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ есть точка пересечения гиперплоскостей, содержащих $n$-мерные грани с внешними нормалями $\mu^1, \dots, \mu^n$, и для определенности предположим, что $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{n-r} \leq \gamma_{n-r+1} \leq \dots \leq \gamma_n$, где $r = 0, 1, \dots, n-1$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$P(D) = \sum_{\alpha \in \partial'\mathfrak{N}} a_\alpha D^\alpha \tag{2.1}$$

с действительными коэффициентами $a_\alpha$. Предположим, что оператор $P(D)$ есть регулярный оператор, то есть существует постоянное число $\chi > 0$ такое, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$|P(\xi)| = \left| \sum_{\alpha\in\partial'\mathfrak{N}} a_\alpha \xi^\alpha \right| \geq \chi \sum_{\alpha\in\partial'\mathfrak{N}} |\xi^\alpha|. \tag{2.2}$$

Для положительного параметра $\nu$ и натурального $k$ положим $G_0(\xi,\nu) = e^{-(\nu P(\xi))^{2k}}$, $G_1(\xi,\nu) = 2ke^{-(\nu P(\xi))^{2k}}(\nu P(\xi))^{2k-1}$, а $\hat{G}_0(t,\nu)$, $\hat{G}_1(t,\nu)$ есть преобразование Фурье для данных функций. Известны (см. [10]) следующие оценки для функций $\hat{G}_l(t,\nu)$, $(l = 0,1)$.

**Лемма 2.1.** *Пусть $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_{n-r} \leq \gamma_{n-r+1} \leq \cdots \leq \gamma_n$ $(r = 0,1,\ldots,n-1)$. Тогда для любого мультииндекса $m = (m_1,m_2,\ldots,m_n)$ и любого четного числа $N$ $(N > N_0)$ существуют постоянные $C_i$ $(i = 0,1,\ldots,n-1)$, такие, что для любого $\nu : 0 < \nu < 1$ имеют места неравенства*

$$\left|D^m \hat{G}_l(t,\nu)\right| \leq \nu^{-\max\limits_{i=1,\ldots,I_{n-1}}(|\mu^i|+(m,\mu^i))}.$$

$$\cdot \frac{C_{n-1}|\ln\nu|^{n-1} + \cdots + C_1|\ln\nu| + C_0}{(1+\nu^{-N}(t^{N\gamma}+t^{N\beta}+\cdots+t^{N\sigma}))\ldots(1+\nu^{-N}(t^{N\gamma}+t^{N\delta}+\cdots+t^{N\tau}))}, \tag{2.3}$$

*где $(\{\gamma,\beta,\ldots,\sigma\},\ldots,\{\gamma,\delta,\ldots,\tau\})$ есть некоторый комплект $n$ векторов, а $l = 0,1$.*

**Лемма 2.2.** *Пусть вектор $\gamma$ удовлетворяет условию леммы 2.1. Тогда существуют такие числа $C_i$ $(i = 0,1,\ldots,l)$ и такое натуральное $N_0$, что для любого числа $N : N > N_0$ и любого $\nu : 0 < \nu < 1$ имеет место неравенство*

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{dt_1 dt_2 \ldots dt_n}{(1+\nu^{-N}(t^{N\gamma}+t^{N\beta}+\cdots+t^{N\sigma}))\ldots(1+\nu^{-N}(t^{N\gamma}+t^{N\delta}+\cdots+t^{N\tau}))} \leq$$

$$\nu^{\min\limits_{i=1,\ldots,r+1}|\mu^i|}\left(C_l|\ln\nu|^l + \cdots + C_1|\ln\nu| + C_0\right), \tag{2.4}$$

*где $l$ — количество равенств между координатами вектора $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$.*

**Лемма 2.3.** *Существует постоянная $C > 0$, что для любого $\nu > 1$ имеют места неравенства*

$$\left|D^m \hat{G}_l(t,\nu)\right| \leq \frac{C\nu^{-(|\lambda|+(m,\lambda))}}{1+\nu^{-N}|t|_\lambda^N}, \tag{2.5}$$

*где $|t|_\lambda = \left(t_1^{2l_1} + \cdots + t_n^{2l_n}\right)^{1/2}$, а $l = 0,1$.*

Для функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ обозначим (см. [8])

$$U_h(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_h^{h^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t-x,\xi)} G_1(\xi,\nu) d\xi dt. \tag{2.6}$$

С помощью вершин $\alpha^i : \alpha^i \neq 0$ $(i = 1, \dots, M)$ многогранника $\mathfrak{N}$ введем мультианизотропное расстояние $\rho_{\mathfrak{N}}(x) = \left(\sum_{i=1}^{M} x^{2\alpha^i}\right)^{1/2}$ и весовые пространства $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, которые являются пополнением пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|U\|_{W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{\alpha\in\mathfrak{N}} \left\| (1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_i(\mu^i,\alpha))} D_x^\alpha U(x) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.7}$$

где $0 < \sigma < 1$.

Обозначим также через $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ пространство суммируемых функций, имеющих конечную норму $\|U\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \left\| (1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\gamma} U(x) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$.

Через $\mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n)$ обозначим подпространство функций $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \bigcap L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma = -(\sigma + N|\lambda|)$, таких, что $\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta f(x) dx = 0$, $|\beta| = 0, 1, \dots, N-1$.

**Лемма 2.4.** *Пусть $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \bigcap L_1(\mathbb{R}^n)$ при $h : 0 < h < 1$*

$$\|D^\beta U_h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.8}$$

*и при $0 < h_1 < h_2 < 1$*

$$\|D^\beta U_{h_1} - D^\beta U_{h_2}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon(h_1,h_2) \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.9}$$

*где $\varepsilon(h_1,h_2) \to 0$ при $h_1, h_2 \to 0$.*

*Доказательство.* Пусть $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$, то есть существует $\mu^{i_0}$, что $(\beta, \mu^{i_0}) = 1$. Из представления для $U_h(x)$ имеем, что

$$D_x^\beta U_h(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_h^{h^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t-x,\xi)} \xi^\beta G_1(\xi,\nu) d\xi dt.$$

Отсюда, применяя теорему Фубини, имеем

$$D_x^\beta U_h(x) = \int_h^{h^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \xi^\beta e^{i(x,\xi)} G_1(\xi,\nu) d\xi.$$

В последней формуле, еще раз применяя теорему Фубини, получаем

$$D_x^\beta U_h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\xi^\beta e^{i(x,\xi)} (2k) \int_h^{h^{-1}} (\nu P(\xi))^{2k-1} e^{-(\nu P(\xi))^{2k}} d\nu d\xi =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (2k) \frac{\hat{f}(\xi)\xi^\beta}{P(\xi)} e^{i(x,\xi)} \int_{hP(\xi)}^{h^{-1}P(\xi)} t^{2k-1} e^{-t^{2k}} dt d\xi = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widetilde{F_h(\xi)\hat{f}(\xi)}, \tag{2.10}$$

где $\tilde{f}$ есть обратное преобразование Фурье, а

$$F_h(\xi) = (2k)\frac{\xi^\beta}{P(\xi)} \int_{hP(\xi)}^{h^{-1}P(\xi)} t^{2k-1} e^{-t^{2k}} dt.$$

Из представления (2.10) следует, что для некоторой постоянной $C > 0$ будет иметь место неравенство (2.8), если докажем, что функция $F_h(\xi)$ есть $(L_p, L_p)$ мультипликатор (см. [19]), который равномерно ограничен по $h$.

Имеем

$$|F_h(\xi)| \le C \left|\frac{\xi^\beta}{P(\xi)}\right| \cdot \int_0^\infty t^{2k-1} e^{-t^{2k}} dt \le M,$$

потому что при $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$, как показано в работе [20], $\xi^\beta\ P(\xi)$ является мультипликатором, следовательно, для некоторой постоянной $M_1 > 0$ $|\xi^\beta / P(\xi)| \le M_1$ при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$. Так как произведение двух мультипликаторов опять мультипликатор, то достаточно показать, что $\int_{hP(\xi)}^{h^{-1}P(\xi)} t^{2k-1} e^{-t^{2k}} dt$ является мультипликатором. Для этого оценим

$$\left|\xi_i D_{\xi_i} \int_{hP(\xi)}^{h^{-1}P(\xi)} t^{2k-1} e^{-t^{2k}} dt\right| \le$$

$$\left|\xi_i h^{-1} P'_{\xi_i}(\xi) (h^{-1}P(\xi))^{2k-1} e^{-(h^{-1}P(\xi))^{2k}}\right| + \left|\xi_i h P'_{\xi_i}(\xi) (hP(\xi))^{2k-1} e^{-(hP(\xi))^{2k}}\right| =$$

$$\left|\frac{\xi_i P'_{\xi_i}(\xi)}{P(\xi)}\right| (h^{-1}P(\xi))^{2k} e^{-(h^{-1}P(\xi))^{2k}} + \left|\frac{\xi_i P'_{\xi_i}(\xi)}{P(\xi)}\right| (hP(\xi))^{2k} e^{-(hP(\xi))^{2k}} \le C,$$

где $C$, не зависящее от $h$, постоянное число, а $i = 1, \dots, n$.

Аналогичным образом можно доказать, что $\left|\xi_1^{k_1} \dots \xi_n^{k_n} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial \xi_1^{k_1} \dots \partial \xi_n^{k_n}} F_h(\xi)\right| \le M$, где $k_i$ $(i = 1, \dots, n)$ равны 0 или 1. То есть выполняются условия теоремы П.И. Лизоркина (см. [19]), откуда следует, что $F_h(\xi)$ есть $(L_p, L_p)$ мультипликатор, и, следовательно, для некоторой постоянной $C > 0$ имеет место неравенство (2.8).

Докажем оценку (2.9). Так как

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_t^m \hat{G}_1(t,\nu) t^\alpha dt = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} t^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t,\xi)} (-\xi)^m G_1(\xi,\nu) d\xi dt =$$

$$\frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} D_\xi^\alpha((-\xi)^m G_1(\xi,\nu)) e^{-i(t,\xi)} d\xi \right) dt =$$

$$(-1)^{|\alpha|} (2\pi)^{\frac{n}{2}} D_\xi^\alpha((-\xi)^m G_1(\xi,\nu))|_{\xi=0},$$

то $k$ можно выбрать так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_t^m \hat{G}_1(t,\nu) t^\alpha dt =$$

$$(-1)^{|\alpha|} (2\pi)^{\frac{n}{2}} D_\xi^\alpha \left( (-\xi)^m e^{-(\nu P(\xi))^{2k}} (2k) (\nu P(\xi))^{2k-1} \right) |_{\xi=0} = 0 \tag{2.11}$$

для любого $\alpha : |\alpha| \le l$, где $l$ — наперед заданное число.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Выберем функцию $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, чтобы $\left\| f - \tilde{f} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$ и $\left\| D^\alpha \tilde{f} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le C_{\alpha,\varepsilon} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ для любого $\alpha : |\alpha| \le l$.

Допустим, что $h_1 < h_2 < 1$. Тогда имеем

$$\|D^\beta U_{h_1} - D^\beta U_{h_2}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\left\| \int_{h_1}^{h_1^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D^\beta \hat{G}_1(t - \cdot, \nu)[f - \tilde{f}]dt \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\| \int_{h_2}^{h_2^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D^\beta \hat{G}_1(t - \cdot, \nu)[f - \tilde{f}]dt \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

$$+ \left\| \int_{h_2^{-1}}^{h_1^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D^\beta \hat{G}_1(t - \cdot, \nu)\tilde{f} dt \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\| \int_{h_1}^{h_2} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D^\beta \hat{G}_1(t - \cdot, \nu)\tilde{f} dt \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} =$$

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. С помощью уже доказанного неравенства (2.8) для $I_1$ и $I_2$ имеем оценку $I_1, I_2 \le C \left\| f \quad \tilde{f} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$. Оценим $I_3$. Так как $1 < h_2^{-1} < h_1^{-1}$, то, применяя неравенство Юнга и оценку (2.5) для $\hat{G}_1(t, \nu)$ при $\nu > 1$ (см. лемму 2.3), имеем

$$I_3 \le C \int_{h_2^{-1}}^{\infty} \left\| D^\beta \hat{G}_1(\cdot, \nu) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\nu \cdot \left\| \tilde{f} \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$C \int_{h_2^{-1}}^{\infty} \nu^{-|\lambda| - (\lambda,\beta) + \frac{|\lambda|}{p}} \left\| \frac{1}{1 + |t|_\lambda^N} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\nu \cdot \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$C h_2^{|\lambda| + (\lambda,\beta) - \frac{|\lambda|}{p} - 1} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

при $h_2 \to 0$, так как $(\lambda, \beta) \ge 1$.

Оценим $I_4$.

$$I_4 = \left\| \int_{h_1}^{h_2} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D_t^\beta \hat{G}_1(t, \nu) \tilde{f}(x + t) dt \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} =$$

$$\left\| \int_{h_1}^{h_2} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D_t^\beta \hat{G}_1(t, \nu) \left[ \tilde{f}(x + t) - \sum_{|\alpha| \le l} \frac{t^\alpha}{\alpha!} \tilde{f}^{(\alpha)}(x) \right] dt \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

где в квадратной скобке по свойству (2.11) при интегрировании все члены приравниваются к нулю, кроме $\tilde{f}(x + t)$. Так как по формуле Тейлора квадратная скобка равна $\sum\limits_{|\alpha| = l+1} \frac{t^\alpha}{\alpha!} \tilde{f}^{(\alpha)}(t + \theta_\alpha(t)x)$, то при $\nu < 1$, из (2.3) и (2.4) следует, что

$$\left| t^\alpha D^\beta \hat{G}_1(t, \nu) \right| \le \nu^{\max\limits_i (-|\mu^i| - (\beta, \mu^i) + (\alpha, \mu^i))}.$$

$$\frac{C_{n-1}|\ln\nu|^{n-1}+\cdots+C_1|\ln\nu|+C_0}{(1+\nu^{-N}(t^{N\gamma}+t^{N\beta}+\cdots+t^{N\sigma}))\ldots(1+\nu^{-N}+(t^{N\gamma}+t^{N\delta}+\cdots+t^{N\tau}))},$$

и, следовательно, применяя неравенство Юнга, для $I_4$ имеем

$$I_4\le C\sum_{|\alpha|=l+1}\int_0^{h_2}\left\|t^\alpha D_t^\beta \hat{G}_1(t,\nu)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}d\nu\cdot\left\|\tilde{f}^{(\alpha)}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\sum_{|\alpha|=l+1}\int_0^{h_2}\nu^{-\max\limits_i(|\mu^i|+(\beta,\mu^i)-(\alpha,\mu^i))+\min\limits_{i=1,\ldots,r+1}|\mu^i|}\cdot$$

$$(C_{n+l-1}|\ln\nu|^{n+l-1}+\cdots+C_1|\ln\nu|+C_0)d\nu\cdot C_{\alpha,\varepsilon}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\sum_{|\alpha|=l+1}h_2^{-\max\limits_i(|\mu^i|+(\beta,\mu^i)-(\alpha,\mu^i))+\min\limits_{i=1,\ldots,r+1}|\mu^i|+1}\cdot$$

$$(a_{\alpha,n+l-1}|\ln h_2|^{n+l-1}+\cdots+a_{\alpha,1}|\ln h_2|+a_{\alpha,0})\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

для некоторых постоянных $a_{\alpha,0},a_{\alpha,1},\ldots,a_{\alpha,n+l-1}$. Так как $l$ – произвольное число, то $l$ можно выбрать так, чтобы функция по $h_2$ в последней формуле стремилась к нулю при $h_2\to 0$. Тогда имеем, что $I_4\to 0$ при $h_2\to 0$, и тем самым лемма 2.4 доказана. □

Предположим, что для многогранника $\mathfrak{N}$ выполняется условие $\max\limits_{\substack{i=1,\ldots,I_{n-1}\\ \beta\in\mathfrak{N}^{(0)}}}(|\mu^i|+(\beta,\mu^i))-\min\limits_{i=1,\ldots,r+1}|\mu^i|<1.$

**Лемма 2.5.** *Пусть* $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^\sigma f\in L_1(\mathbb{R}^n)$, $|\lambda|>1$, $\frac{|\lambda|}{p}>\sigma>1-\frac{|\lambda|}{p'}$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$. *Тогда для любого* $\beta\in\mathfrak{N}^{(0)}$ *при* $h:0<h<1$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max\limits_j(\beta,\mu^j))}D_x^\beta U_h(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$C\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}+\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma(1-\max\limits_j(\beta,\mu^j))}f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right)\tag{2.12}$$

*и при* $0<h_1<h_2<1$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max\limits_j(\beta,\mu^j))}(D_x^\beta U_{h_1}(x)-D_x^\beta U_{h_2}(x))\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le$$

$$\varepsilon(h_1,h_2)\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}+\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma(1-\max\limits_j(\beta,\mu^j))}f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right),\tag{2.13}$$

*где* $\varepsilon(h_1,h_2)\to 0$ *при* $h_1,h_2\to 0$.

*Доказательство.* В силу неравенства Минковского имеем

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))} D_x^\beta U_h(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))} \int_h^1 d\nu \int_{\mathbb{R}^n} f(t) D_x^\beta \hat{G}_1(t-x,\nu)dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} +$$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))} \int_1^{h^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} f(t) D_x^\beta \hat{G}_1(t-x,\nu)dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = I_1 + I_2.$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. Применяя оценки (2.3) и (2.4) для $\hat{G}_1(t,\nu)$ при $0<\nu<1$ и неравенство Юнга, для $I_1$ получим

$$I_1 \le C\int_h^1 d\nu \left\|D_t^\beta \hat{G}_1(t,\nu)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \int_h^1 d\nu\, \nu^{-\max_j(|\mu^j|+(\beta,\mu^j))}\cdot$$

$$\left(C_{n-1}|\ln\nu|^{n-1}+\dots+C_1|\ln\nu|+C_0\right)\cdot$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dt_1\dots dt_n}{(1+\nu^{-N}(t^{N\gamma}+\dots+t^{N\sigma}))\dots(1+\nu^{-N}(t^{N\gamma}+\dots+t^{N\tau}))}\cdot\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\int_h^1 \nu^{-\max_j(|\mu^j|+(\beta,\mu^j))+\min_{j=1,\dots,r+1}|\mu^j|}\cdot$$

$$\left(C_{n+l-1}|\ln\nu|^{n+l-1}+\dots+C_1|\ln\nu|+C_0\right)d\nu\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Оценим $I_2$. Учитывая, что $\rho_{\mathfrak{N}}(x-y)(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-1} \le a(1+\rho_{\mathfrak{N}}(y))$ и, применяя неравенство Юнга, имеем

$$I_2 \le C\int_1^{h^{-1}} d\nu$$

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n} \rho_{\mathfrak{N}}(x-t)^{-\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))} D_x^\beta \hat{G}_1(t-x,\nu)(1+\rho_{\mathfrak{N}}(t))^{\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))} f(t)dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$C\int_1^{h^{-1}} d\nu \left\|\rho_{\mathfrak{N}}(x)^{-\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)}\xi^\beta G_1(\xi,\nu)d\xi\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\cdot$$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(t))^{\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))} f(t)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.14}$$

Используя неравенство (2.5) при $\nu>1$, первая норма будет меньше или равна

$$C\left\|\left(\sqrt{x_1^{2l_1}+\dots+x_n^{2l_n}}\right)^{-\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))} \frac{\nu^{-(|\lambda|+(\beta,\lambda))}}{1+\nu^{-N}|x|_\lambda^N}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

В полученной оценке, делая замену переменных $x=\nu^\lambda\eta$ и, учитывая, что $N>N_0$, имеем, что первый множитель неравенства (2.14) оценивается через интеграл

$$C\int_1^{h^{-1}} \frac{d\nu}{\nu^{|\lambda|+(\beta,\lambda)+\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))-\frac{|\lambda|}{p}}}.$$

Так как $\sigma p < |\lambda|, 1-\frac{|\lambda|}{p'} < \sigma, |\lambda| > \max_j |\mu^j|, \sigma < 1$, то $\frac{|\lambda|}{p'}+\sigma+(\beta,\lambda)-\sigma\max_j(\beta,\mu^j) > 1$, данный интеграл сходится, и для $I_2$ имеем оценку

$$I_2 \leq C\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma(1-\max_j(\beta,\mu^j))} f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Тем самым неравенство (2.12) доказано. Неравенство (2.13) доказывается так же, как и в лемме 2.4. □

**Предложение 2.1.** *Пусть $\theta(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ – многочлен с постоянными коэффициентами и $\mathfrak{N}(\theta) = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$. Для того чтобы существовала постоянная $C > 0$ такая, чтобы имело место неравенство*

$$|\theta(\xi)| \leq C\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)$$

*для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, при которых $\rho_{\mathfrak{N}}(\xi) > 1$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathfrak{N}(\theta) \subset \mathfrak{N}.$$

Доказательство см. в [7].

Обозначим через $c_0 = \min_{1\leq l\leq n} \frac{\min_{1\leq j\leq I_{n-1}} \mu_l^j}{\max_{1\leq j\leq I_{n-1}} \mu_l^j}$ и назовем показателем регулярности оператора $P(D)$.

**Лемма 2.6.** *Для того чтобы для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, при которых $|P(\xi)| > 1$, с некоторыми положительными постоянными $c > 0$ и $A$ выполнялось неравенство*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \left|\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\right| < A|P(\xi)|^{-c\max_{1\leq j\leq I_{n-1}}(\alpha,\mu^j)}, \tag{2.15}$$

*необходимо и достаточно, чтобы $c \leq c_0$.*

*Доказательство.* Если $|P(\xi)| > 1$, то для любого $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с некоторой постоянной $C > 1$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{C}\sum_{j=1}^M \left|\xi^{\alpha^j}\right|^{1-c\max_{1\leq l\leq I_{n-1}}(\alpha,\mu^l)} \leq |P(\xi)|^{1-c\max_{1\leq l\leq I_{n-1}}(\alpha,\mu^l)} \leq C\sum_{j=1}^M \left|\xi^{\alpha^j}\right|^{1-c\max_{1\leq l\leq I_{n-1}}(\alpha,\mu^l)}.$$

Следовательно, в силу предположения 2.1 оценка (2.15) эквивалентна следующему вложению:

$$\mathfrak{N}\left(P^{(\alpha)}\right) \subset \mathfrak{N}\left(1-c\max_{1\leq l\leq I_{n-1}}(\alpha,\mu^l)\right) \tag{2.16}$$

для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что вложение (2.16) выполняется тогда и только тогда, когда $c \leq c_0$.

Сначала покажем, что если имеет место вложение (2.16), то $c \le c_0$.

Пусть $\alpha = e^j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0)$. Для любых $i, j$: $1 \le i \le I_{n-1}$, $1 \le j \le n$ очевидно существует вершина $\beta$ на $\mathfrak{N}_i^{n-1}$ такая, что $(\beta, \mu^i) = 1$ и $\beta_j \ge 1$.

Так как $\beta - \alpha = \beta - e^j \in \mathfrak{N}\left(P^{(\alpha)}\right)$, то по условию (2.16) $\mathfrak{N}(P^{(\alpha)}) \subset \mathfrak{N}\left(1 - c \max\limits_{1 \le l \le I_{n-1}} (\alpha, \mu\right.$ и

$$(\beta - \alpha, \mu^i) \le 1 - c \max_{1 \le l \le I_{n-1}} (\alpha, \mu^l)$$

для любого $i : i \le 1 \le I_{n-1}$, то есть

$$1 - \mu_j^i = (\beta, \mu^i) - (\alpha, \mu^i) = (\beta - \alpha, \mu^i) \le 1 - c \max_{1 \le l \le I_{n-1}} (\alpha, \mu^l) \le 1 - c \max_{1 \le l \le I_{n-1}} \mu_j^l.$$

Откуда

$$c \le \frac{\mu_j^l}{\max\limits_{1 \le l \le I_{n-1}} \mu_j^l}$$

для любого $1 \le l \le I_{n-1}$, $1 \le j \le n$. Следовательно,

$$c \le \min_{1 \le j \le n} \frac{\min\limits_{1 \le l \le I_{n-1}} \mu_j^l}{\max\limits_{1 \le l \le I_{n-1}} \mu_j^l} = c_0.$$

Обратное. Покажем, что при $c \le c_0$ имеет место вложение (2.16). Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Так как $\mathfrak{N}(P^{(\alpha)}) \subset \mathfrak{N}\{\beta - \alpha, \beta \in (P^{(\alpha)}), \beta \ge \alpha\}$, то для любого $l : 1 \le l \le I_{n-1}$ имеем

$$(\beta - \alpha, \mu^l) = (\beta, \mu^l) - (\alpha, \mu^l) \le 1 - (\alpha, \mu^l) = 1 - c_0 \left(\alpha, \frac{\mu^l}{c_0}\right).$$

В силу определения числа $c_0$ для любых $l, i : 1 \le l, i \le I_{n-1}$

$$\frac{\mu^l}{c_0} \ge \mu^i.$$

Следовательно, для любых $l, i : 1 \le l, i \le I_{n-1}$

$$(\beta - \alpha, \mu^l) = 1 - c_0 \left(\alpha, \frac{\mu^l}{c_0}\right) \le 1 - c_0(\alpha, \mu^i) \le 1 - c_0 \max_{1 \le i \le I_{n-1}} (\alpha, \mu^i),$$

то есть

$$(\beta - \alpha, \mu^l) \le 1 - c_0 \max_{1 \le i \le I_{n-1}} (\alpha, \mu^i) \le 1 - c \max_{1 \le i \le I_{n-1}} (\alpha, \mu^i)$$

для любого $l : 1 \le l \le I_{n-1}$, значит

$$\beta - \alpha \in \mathfrak{N}(1 - c \max_{1 \le i \le I_{n-1}} (\alpha, \mu^i))$$

при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\beta \in (P)$.

Так как $\mathfrak{N}(1 - c \max\limits_{1 \le i \le I_{n-1}} (\alpha, \mu^i))$ — выпуклый многогранник и $(P^{(\alpha)}) = \{\beta - \alpha, \beta \in (P), \beta \ge \alpha\}$, то $\mathfrak{N}(P^{(\alpha)}) \subset \mathfrak{N}(1 - c \max\limits_{1 \le i \le I_{n-1}} (\alpha, \mu^i))$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. $\square$

Пусть $\chi(s) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \le s \le 1 \\ 0 \text{ при } s \ge 2 \end{cases}$ и $\chi \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^1_+})$.

**Лемма 2.7.** *Если выполняются условия леммы 2.5, то для любых $h$ и $\sigma$ ($0 < h < 1, 0 \le \sigma < 2c_0$) и для любого мультииндекса $\beta \in \mathfrak{N}$ при $\rho \to \infty$ имеет место соотношение*

(2.17)
$$\left\| (1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_i(\beta,\mu^i))} \left( D_x^\beta \left( U_h(x) - U_h(x)\chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right)\right)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

*Доказательство.* Пусть $\beta = 0$. Тогда из определения функции $\chi(s)$ имеем

$$\left\| (1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma} \left( U_h(x) - U_h(x)\chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$
$$\left\| (1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma} U_h(x)\right\|_{L_p(\rho_{\mathfrak{N}}(x)>\rho)} \to 0$$

при $\rho \to \infty$, так как из леммы 2.5 $U_h \in L_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть теперь $\beta \ne 0$. Тогда по формуле Лейбница имеем

$$D_x^\beta \left( U_h(x) - U_h(x)\chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right) = D_x^\beta U_h(x)\left(1 - \chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right) -$$
$$U_h(x) D_x^\beta \chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right) - \sum_{\substack{s+q=\beta \\ |s|,|q|>0}} C_{s,q} D_x^s U_h(x) D_x^q \chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right) = \Phi_{1,\rho} + \Phi_{2,\rho} + \Phi_{3,\rho}.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Учитывая леммы 2.4 и 2.5, как и в работе [1], для $\Phi_{1,\rho}$ имеем

$$\left\| (1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_i(\beta,\mu^i))} \Phi_{1,\rho}(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$
$$\left\| (1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_i(\beta,\mu^i))} D_x^\beta U_h(x)\right\|_{L_p(\rho_{\mathfrak{N}}(x)>\rho)} \to 0$$

при $\rho \to \infty$, так как $D^\beta U_h \in L_{p,\sigma}$ для любого $\beta \in \mathfrak{N}$. Аналогичные оценки докажем для $\Phi_{2,\rho}$ и $\Phi_{3,\rho}$. По формуле Франкела (см. [21]) о производной сложной функции имеем, что

(2.18)
$$D^\beta \chi(\varphi(x_1,\dots,x_n)) = \sum_{i=1}^{|\beta|} \chi_s^{(i)}(s)|_\varphi \cdot Q_{\beta,i}(\varphi),$$

где $Q_{\beta,i}(\varphi)$ есть однородный многочлен порядка $i$ и имеет вид

$$Q_{\beta,i}(\varphi) = \sum_{r^1+\dots+r^n=\beta} P^i_{r^1}(\varphi)\dots P^i_{r^n}(\varphi),$$

где $i = 1, \ldots, |\beta|$. Причем при $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \rho^2_{\mathfrak{N}}(x)/\rho^2$ каждый из $P^l_{r^k}$ $(l = 1, \ldots, |\beta|)$ имеет вид

$$P^l_{r^k}\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right) = \sum_{\theta \in R(r^k)} \frac{l!}{\theta!}\left(D^{\alpha^1}\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right)^{\theta_1} \cdots \left(D^{\alpha^l}\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right)^{\theta_l},$$

где $R(r^k) = \{\theta; \sum\limits_{i=1}^{l} \theta_i \alpha^i = r^k; |\theta| = l\}$, а $\alpha^1, \ldots, \alpha^l$ – векторы, для которых $0 < \alpha^i \le r^k$ $(i = 1, \ldots, l)$.

По лемме 2.6 для любого $i = 1, \ldots, l$ при $\rho_{\mathfrak{N}}(x) > 1$

$$\left(D^{\alpha^i}\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right)^{\theta_i} \le C\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)^{\theta_i} (\rho^2_{\mathfrak{N}}(x))^{-c_0\theta_i \max\limits_j(\alpha^i, \mu^j)}.$$

Так как

$$\sum_i \theta_i \max_j(\alpha^i, \mu^j) \ge \max_j \sum_i (\theta_i \alpha^i, \mu^j) = \max_j (r^k, \mu^j),$$

то имеем, что

$$\left|D^\beta_x \chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right| \le \left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)^l (\rho^2_{\mathfrak{N}}(x))^{-c_0 \max\limits_j(\beta, \mu^j)},$$

где в силу определения функции $\chi(s)$ переменные $x_1, \ldots, x_n$ меняются в компакте $\overline{K_\rho} = \{x \in \mathbb{R}^n; \rho \le \rho_{\mathfrak{N}}(x) \le \sqrt{2}\rho\}$. Следовательно, из леммы 2.6 следует, что для любого $\beta \in \mathfrak{N}$ существует некоторая постоянная $C > 0$, что имеет место неравенство

$$\left|D^\beta_x \chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right| \le C\rho^{-2c_0 \max\limits_i(\beta, \mu^i)}, \tag{2.19}$$

и $\rho : \rho \ge 1$.

Исходя из неравенства (2.19), оценим $\Phi_{2,\rho}$ и $\Phi_{3,\rho}$. Так как функция $\chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)$ отлична от нуля только в компакте $\overline{K_\rho}$, и все производные функции $\chi(s)$ ограничены, то для $\Phi_{2,\rho}$ имеем

$$\left\|(1 + \rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1 - \max\limits_i(\beta, \mu^i))} \Phi_{2,\rho}(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\left\|(1 + \rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1 - \max\limits_i(\beta, \mu^i))} U_h(x) D^\beta_x \chi\left(\frac{\rho^2_{\mathfrak{N}}(x)}{\rho^2}\right)\right\|_{L_p(K_\rho)} \le$$

$$C\rho^{-2c_0 \max\limits_i(\beta, \mu^i)} (1 + \sqrt{2}\rho)^{\sigma \max\limits_i(\beta, \mu^i)} \left\|(1 + \rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma} U_h(x)\right\|_{L_p(K_\rho)}.$$

Так как по лемме 2.5 $U_h \in L_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, то при $\sigma < 2c_0$ имеем, что

$$\left\|(1 + \rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1 - \max\limits_i(\beta, \mu^i))} \Phi_{2,\rho}(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

при $\rho \to \infty$. Для $\Phi_{3,\rho}(x)$ имеем

$$\left\|(1+\rho\mathfrak{N}(x))^{-\sigma(1-\max_i(\beta,\mu^i))}\Phi_{3,\rho}(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$C\sum_{s+q=\beta}\left\|(1+\rho\mathfrak{N}(x))^{-\sigma(1-\max_i(\beta,\mu^i))}D_x^sU_h(x)D_x^q\chi\left(\frac{\rho_{\mathfrak{N}}^2(x)}{\rho^2}\right)\right\|_{L_p(K_\rho)} \le$$

$$C\sum_{s+q=\beta}\rho^{-2c_0\max_i(q,\mu^i)}\left\|(1+\rho\mathfrak{N}(x))^{-\sigma(1-\max_i(s+q,\mu^i))}D_x^sU_h(x)\right\|_{L_p(K_\rho)} \le$$

$$C\sum_{s+q=\beta}\rho^{-2c_0\max_i(q,\mu^i)}\rho^{\sigma\max_i(q,\mu^i)}\left(\sqrt{2}\right)^{\sigma\max_i(q,\mu^i)}\cdot$$

$$\left\|(1+\rho\mathfrak{N}(x))^{-\sigma(1-\max_i(s,\mu^i))}D_x^sU_h(x)\right\|_{L_p(K_\rho)},$$

так как $\max_i(s+q,\mu^i) \le \max_i(s,\mu^i)+\max_i(q,\mu^i)$.

По лемме 2.4 и 2.5 отсюда имеем, что при $\sigma < 2c_0$

$$\left\|(1+\rho\mathfrak{N}(x))^{-\sigma(1-\max_i(\beta,\mu^i))}\Phi_{3,\rho}(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

при $\rho \to \infty$. □

**Определение 2.1.** *(см. [1]) Пусть $V$ и $W$ есть нормированные пространства. Семейство линейных операторов $P_h$ $(h \in (0,1))$ фундаментально в паре $\{V, W\}$ при $h \to 0$, если для любого $h \in (0,1)$ оператор $P_h : V \to W$ ограничен, при этом*

$$\sup_h \|P_h\| \le C < \infty, \tag{2.20}$$

*и имеет место сходимость*

$$\|P_{h_1} - P_{h_2}\| \to 0 \tag{2.21}$$

*при $h_1, h_2 \to 0$.*

Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)\bigcap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)$ обозначим $U_h = P_hf$. Исходя из лемм 2.4, 2.5 и 2.7, докажем следующую теорему:

**Теорема 2.1.** *Пусть $|\lambda| > 1$, $\frac{|\lambda|}{p} > \sigma > 1-\frac{|\lambda|}{p'}$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$. Тогда семейство операторов $P_h$ фундаментально в паре пространстве $\{L_p(\mathbb{R}^n)\bigcap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n), W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\}$ при $h \to 0$.*

*Доказательство.* Из лемм 2.4, 2.5 и 2.7 следует, что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)\bigcap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)$ функция $U_h = P_h f$ принадлежит пространству $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ (см. лемму 2.7), причем (см. леммы 2.4, 2.5)

$$\|U_h\|_{W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \le C\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma} f(x)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right),$$

где постоянная $C$ не зависит от $f$ и $h$, $h \in (0,1)$, следовательно, выполняется условие (2.20), и

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_i(\alpha,\mu^i))}(D^{\alpha}_x U_{h_1}(x) - D^{\alpha}_x U_{h_2}(x))\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\varepsilon(h_1,h_2)\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma(1-\max_i(\alpha,\mu^i))} f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right),$$

где $\varepsilon(h_1,h_2) \to 0$ при $h_1,h_2 \to 0$, то есть выполняется условие (2.21), следовательно, теорема 2.1 доказана. □

Для $|\lambda| \le 1$ имеем следующие аналоги лемм 2.5 и 2.7.

**Лемма 2.8.** *Пусть* $1 \ge |\lambda| > 1 - N\lambda_{\min}$, $\sigma < \min\{c_0, \frac{|\lambda|}{p}\}$, $\sigma > 1-|\lambda|+\frac{|\lambda|}{p} - N\lambda_{\min}$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n)$ *и для любых* $\beta \in \mathfrak{N}$ *при* $h: 0<h<1$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_i(\beta,\mu^i))} D^{\beta}_x U_h(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$C\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma(1-\max_i(\beta,\mu^i))+N|\lambda|} f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right), \tag{2.22}$$

*где постоянная* $C>0$ *не зависит от* $h$ *и* $f$, *и при* $0<h_1<h_2<1$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma(1-\max_i(\beta,\mu^i))}(D^{\beta}_x U_{h_1}(x) - D^{\beta}_x U_{h_2}(x))\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\varepsilon(h_1,h_2)\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma(1-\max_i(\beta,\mu^i))+N|\lambda|} f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right), \tag{2.23}$$

*где* $\varepsilon(h_1,h_2) \to 0$ *при* $h_1,h_2 \to 0$.

*Доказательство.* Докажем неравенство (2.22). Рассмотрим случай $\beta = 0$ (остальные случаи аналогичны). Как и в лемме 2.5, имеем

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma} U_h(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le$$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma}\int_h^1 d\nu \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t-x,\xi)} G_1(\xi,\nu)\,d\xi\,dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} +$$

$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma}\int_1^{h^{-1}}d\nu\int_{\mathbb{R}^n}f(t)\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i(t-x,\xi)}G_1(\xi,\nu)d\xi dt\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}=I_1+I_2.$$

$I_1$ оценивается так же, как и в лемме 2.5. Оценим $I_2$. Так как $f\in\mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n)$, то есть $\int_{\mathbb{R}^n}x^\beta f(x)dx=0$ при $|\beta|=0,1,\ldots,N-1$, то преобразование Фурье функции $f$ можно записать в виде (см. [1])

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^1\cdots\int_0^1\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i(\lambda_1\ldots\lambda_N y,\xi)}(-iy,\xi)^N f(y)dy\right)\cdot$$
$$\lambda_1^{N-1}\ldots\lambda_{N-2}^2\lambda_{N-1}d\lambda_1\ldots d\lambda_N.$$

Учитывая данную формулу, для $I_2$ имеем

$$I_2\le C\int_1^{h^{-1}}d\nu\int_0^1\cdots\int_0^1\lambda_1^{N-1}\ldots\lambda_{N-2}^2\lambda_{N-1}\cdot$$
$$\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(x-\lambda_1\ldots\lambda_N y,\xi)}G_1(\xi,\nu)(-iy,\xi)^N f(y)d\xi dy\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}d\lambda_1\ldots d\lambda_N\le$$
$$\sum_{|\rho|=N}C_\rho\int_1^{h^{-1}}d\nu\left\|(\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{-\sigma}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(x,\xi)}G_1(\xi,\nu)\xi^\rho d\xi\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\cdot\|y^\rho(1+\rho_{\mathfrak{N}}(y))^\sigma f(y)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$
$$\le\sum_{|\rho|=N}C_\rho\int_1^{h^{-1}}\nu^{-|\lambda|-(\lambda,\rho)}d\nu\,\|y^\rho(1+\rho_{\mathfrak{N}}(y))^\sigma f(y)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\cdot$$
$$\left\|\left(\sqrt{x_1^{2l_1}+\cdots+x_n^{2l_n}}\right)^{-\sigma}\frac{1}{1+\nu^{-K}\left(\sqrt{x_1^{2l_1}+\cdots+x_n^{2l_n}}\right)^K}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le$$
$$\sum_{|\rho|=N}C_\rho\int_1^{h^{-1}}\nu^{-|\lambda|-(\lambda,\rho)+\frac{|\lambda|}{p}-\sigma}d\nu\,\|y^\rho(1+\rho_{\mathfrak{N}}(y))^\sigma f(y)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\cdot$$
$$\left\|\frac{1}{\left(\sqrt{y_1^{2l_1}+\cdots+y_n^{2l_n}}\right)^\sigma\left(1+\left(\sqrt{y_1^{2l_1}+\cdots+y_n^{2l_n}}\right)^K\right)}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

В последнем интеграле сделали замену переменных $x=\nu^\lambda y$. Так как $\frac{|\lambda|}{p}>\sigma$, то при достаточно больших $K$ интеграл по $L_p$ сходится. Интеграл по $\nu$ тоже сходится, так как по условию $|\lambda|+(\lambda,\rho)-\frac{|\lambda|}{p}+\sigma>|\lambda|+N\lambda_{\min}-\frac{|\lambda|}{p}+\sigma>1$. В итоге имеем, что

$$I_2\le C\left\|(1+\rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma+N|\lambda|}f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Аналогично доказывается неравенство (2.23). □

**Лемма 2.9.** *Пусть выполняются условия леммы 2.8, а функция $\chi(s)$ определена как выше. Тогда для любого $h \in (0,1)$ и $\beta \in \mathfrak{N}$ имеет место соотношение (2.17).*

Для доказательства нужно повторить те же шаги, что и при доказательстве леммы 2.7 с применением лемм 2.4 и 2.8.

**Теорема 2.2.** *Пусть выполняются условия леммы 2.8. Тогда семейство операторов $P_h$ фундаментально в паре пространств $\{\mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n), W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\}$ при $h \to 0$.*

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 2.1 (с применением лемм 2.8 и 2.9).

Для невесовых пространств (при $\sigma = 0$) имеем следующую теорему.

**Теорема 2.3.** *Пусть $|\lambda|\left(1-\frac{1}{p}\right) > 1$. Тогда семейство операторов $P_h$ фундаментально в паре пространств $\{L_p(\mathbb{R}^n)\bigcap L_1(\mathbb{R}^n), W^{\mathfrak{M}}_p(\mathbb{R}^n)\}$ при $h \to 0$. Если $|\lambda|\left(1-\frac{1}{p}\right) \le 1$ и $|\lambda|\left(1-\frac{1}{p}\right) + N\lambda_{\min} > 1 \ge |\lambda|\left(1-\frac{1}{p}\right) + (N-1)\lambda_{\min}$, то семейство операторов $P_h$ фундаментально в паре пространств $\{\mathfrak{L}_{p,0,N}(\mathbb{R}^n), W^{\mathfrak{M}}_p(\mathbb{R}^n)\}$.*

## 3. Регулярные уравнения в $\mathbb{R}^n$

Исходя из результатов §2, докажем следующие теоремы о существовании и единственности решения следующего уравнения

$$P(D)U = f, \tag{3.1}$$

где $P(D)$ есть оператор (2.1), удовлетворяющий условию регулярности (2.2).

**Теорема 3.1.** *Пусть $|\lambda| > 1$, $\frac{|\lambda|}{p} > \sigma > 1 - |\lambda| + \frac{|\lambda|}{p}$. Тогда для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)\bigcap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)$ уравнение (3.1) имеет единственное решение $U$ из класса $W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, которое является пределом в классе $W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ приближенных решений $U_h$, определенных формулой (2.6), при $h \to 0$, и существует постоянная $C > 0$, что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)\bigcap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)$ имеет место оценка*

$$\|U\|_{W^{\mathfrak{M}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \le C\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)}\right). \tag{3.2}$$

*Доказательство.* Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)\bigcap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим семейство операторов $P_h$ и построим последовательность функций $U_k(x)$ по формуле

$$U_k(x) = P_{h_k} f(x), \tag{3.3}$$

где $h_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Если $|\lambda| > 1$, то, применяя теорему 2.1, имеем, что семейство операторов $P_h$ фундаментально в паре пространств $\{L_p(\mathbb{R}^n) \bigcap L_{1,-\sigma}(\mathbb{R}^n), W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\}$ при $h \to 0$. А если $|\lambda| \le 1$, то по теореме 2.2 семейство операторов $P_h$ фундаментально в паре $\{\mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n), W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\}$ при $h \to 0$. То есть при любом $|\lambda| > 0$, последовательность $\{U_k(x)\}$ фундаментальна в пространстве $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ по норме (2.7). А в силу полноты пространтсва $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ существует функция $U \in W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, такая, что

$$\|U_k - U\|_{W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

при $k \to \infty$. При этом при $|\lambda| > 1$ имеет место неравенство (2.12), а при $|\lambda| \le 1$ имеет место неравенство (2.22).

Из представления (2.1) работы [8] и из свойств усреднения $f_h$ имеем, что почти для всех $x$-ов из $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_h^{h^{-1}} d\nu \frac{\partial}{\partial\nu} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\hat{G}_0(t-x,\nu)dt. \tag{3.4}$$

С другой стороны, применяя формулу (2.6) и представление (3.3), имеем, что

$$P(D_x)U_k = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{h_k}^{h_k^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \int_{\mathbb{R}^n} P(D_x)e^{-i(t-x,\xi)}G_1(\xi,\nu)d\xi dt =$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{h_k}^{h_k^{-1}} d\nu \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t-x,\xi)} \frac{\partial}{\partial\nu} G_0(\xi,\nu)d\xi dt =$$

$$-\int_{h_k}^{h_k^{-1}} d\nu \frac{\partial}{\partial\nu} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\hat{G}_0(t-x,\nu)dt.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ и применяя интегральное представление (3.4), можем утверждать, что $U$ является решением уравнения (3.1). Учитывая лемму 2.4, имеем, что для любого $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$ имеет место неравенство

$$\left\|D_x^\beta U\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.5}$$

Докажем единственность. Вначале предположим, что $U(x)$ есть финитное решение уравнения (3.1). Тогда после преобразования Фурье имеем, что $P(i\xi)\hat{U}(\xi) = 0$, $\forall\xi \in \mathbb{R}^n$. А так как $P(i\xi) \ne 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то по свойству преобразования Фурье имеем, что $\hat{U}(\xi) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$. Но так как $\hat{U}(\xi)$ есть непрерывная функция, то $\hat{U}(\xi) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n$, следовательно, $U(\xi) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n$. То есть единственность решения уравнения (3.1) для финитных функций из $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ доказана.

Учитывая оценку (3.5), можно сказать, что для любой гладкой финитной функции $v \in W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ и для любого $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$ имеет место неравенство

$$\left\|D^{\beta}_x v\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|P(D)v\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Рассмотрим общий случай. Пусть $U \in W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ является решением однородного уравнения $P(D)U = 0$. Докажем, что для любой ограниченной области $G$

$$\|U\|_{L_p(G)} = 0.$$

Так как $U \in W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, то из-за плотности финитных функций в $W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ следует существование $U_\varepsilon \in W^{\mathfrak{N}}_p(\mathbb{R}^n)$, такой, что

$$\|U - U_\varepsilon\|_{W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \tag{3.6}$$

и по (3.5) для любого $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$ имеет место неравенство

$$\left\|D^{\beta}_x U_\varepsilon\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|P(D_x)U_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Учитывая, что $U$ является решением однородного уравнения $P(D)U = 0$, имеем, что

$$\left\|D^{\beta}_x U\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|D^{\beta}_x(U - U_\varepsilon)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + C\|P(D)U_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Так как для оператора $P(D)$ отличны от нуля только те коэффициенты $a_\alpha$, для которых $\alpha \in \partial'\mathfrak{N}$, то, применяя оценку (3.6), получим

$$\left\|D^{\beta}_x U\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{\beta\in\partial'\mathfrak{N}} |a_\beta| \left\|D^{\beta}_x(U - U_\varepsilon)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon \leq \varepsilon \cdot C \sum_{\beta\in\partial'\mathfrak{N}} |a_\beta| + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$ имеем, что $\left\|D^{\beta}_x U\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = 0$ для любого $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$. Следовательно, для любой ограниченной области $G$ $\|U\|_{L_p(G)} = 0$, и $U(x) = 0$ почти всюду на $G$. Так как $G$ – произвольная область, то $U(x) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$. □

Аналогично для случая $|\lambda| \leq 1$ имеем следующую теорему.

**Теорема 3.2.** *Пусть* $1 \geq |\lambda| > 1 - N\lambda_{\min}$, $\sigma < \min\left\{c_0, \frac{|\lambda|}{p}\right\}$, $1 - |\lambda| + \frac{|\lambda|}{p} - (N-1)\lambda_{\min} \geq \sigma > 1 - |\lambda| + \frac{|\lambda|}{p} - N\lambda_{\min}$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n)$ *существует единственное решение* $U \in W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ *уравнения (3.1), и существует постоянная* $C > 0$, *что для любой функции* $f \in \mathfrak{L}_{p,\sigma,N}(\mathbb{R}^n)$ *имеет место неравенство*

$$\|U\|_{W^{\mathfrak{N}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|(1 + \rho_{\mathfrak{N}}(x))^{\sigma+N|\lambda|} f(x)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\right). \tag{3.7}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1 с применением теоремы 2.2.

Наконец, применяя теорему 2.3, для обычного мультианизотропного пространства имеем следующую теорему.

**Теорема 3.3.** *Если* $|\lambda| - \frac{|\lambda|}{p} > 1$, *то для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \bigcap L_1(\mathbb{R}^n)$ *уравнение (3.1) имеет единственное решение* $U \in W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n)$, *для которого справедливо неравенство (3.2) при* $\sigma = 0$. *Если* $|\lambda| - \frac{|\lambda|}{p} \leq 1$, $|\lambda| - \frac{|\lambda|}{p} + N\lambda_{\min} > 1 > |\lambda| - \frac{|\lambda|}{p} + (N-1)\lambda_{\min}$, *то при* $f \in \mathfrak{L}_{p,0,N}(\mathbb{R}^n)$ *уравнение (3.1) имеет единственное решение в* $W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n)$, *для которого имеет место неравенство (3.7) при* $\sigma = 0$.

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 3.1 (с применением теоремы 2.3).

**Abstract.** In this paper the unique solvability of regular hypoelliptic equations in multianisotropic weighted functional spaces is proved by means of special integral representation of functions through a regular operator. The existence of the solutions is proved by constructing approximate solutions using multianisotropic integral operators.

## Список литературы

[1] Г. В. Демиденко, "Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями I", Сиб. мат. журнал, **34**, no. 5, 52 – 67 (1993).
[2] Г. В. Демиденко, "О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}^n$", Сиб. мат. журнал, **39**, no. 5, 1028 – 1037 (1998).
[3] Г. В. Демиденко, "Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа", Сиб. мат. журнал, **49**, no. 5, 1064 – 1076 (2008).
[4] С. В. Успенский, "О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов", Тр. МИАН СССР, **117**, 292 – 299 (1972).
[5] С. М. Никольский, "Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных", Сиб. мат. журнал, **61(103)**, no. 2, 224 – 252 (1963).
[6] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Тр. МИАН СССР, **91**, 58 – 81 (1967).
[7] S. Gindikin, L. Volovich, The Method of Newton's Polyhedron in the theory of Partial Differential Equations, K.A.P., London, **86**, 266p. (1992).
[8] Г. А. Карапетян, "О стабилизации в бесконечности к полиному решений одного класса регулярных уравнений", Тр. МИАН СССР, **187**, 116 – 129 (1989).
[9] G. A. Karapetyan, "Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces for the three-dimensional case", Eurasian Mathematical Journal, ISSN, **7**, no. 4, 19 – 39 (2016).
[10] Г. А. Карапетян, "Интегральное представление и теоремы вложения для $n$-мерных мультианизотропных пространств с одной вершиной анизотропности", Сиб. мат. журнал, **58**, no. 3, 573 – 590 (2017).
[11] Г. А. Карапетян, М. К. Аракелян, "Теоремы вложения для общих мультианизотропных пространств", Математические заметки (в печати).
[12] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, (1962).

[13] В. П. Ильин, "Интегральное представление дифференцирумых функций классов $W_p^1(G)$", Сиб. мат. журнал, **8**, no. 3, 573 – 586 (1967).

[14] О. В. Бесов, "О коэрцитивности в неизотропном пространстве С. Л. Соболева", Мат. сб. **73**(115), no. 4, 585 – 599 (1967).

[15] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, М. Наука (1975).

[16] О. В. Бесов, В. П. Ильин, Л. Д. Кудрявцев, П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, "Теория вложений дифференцируемых функций многих переменных. Дифференциальные уравнения с частными производными", М. Наука, 38 – 63 (1970).

[17] Л. А. Багиров, В. А. Кондратьев, "Об эллиптических уравнениях в $\mathbb{R}^n$" Диф. уравнения, **11**, no. 3, 498 – 504 (1975).

[18] Л. А. Багиров, "Априорные оценки. Теоремы существования и поведение на бесконечности решений квазиэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$", Мат. сб., **110**, no. 4, 475 – 492 (1979).

[19] П. И. Лизоркин, "$(L_q, L_q)$ мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР, **152**, 808 – 811 (1963).

[20] Г. Г. Казарян, "Оценки дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы", Тр. МИАН СССР, **140**, 130 – 161 (1976).

[21] L. E. Frankel, "Formula for higher derivatives of composite functions", Math. Proc. of the Cambridge Phil. Society, **83**, no. 2, 159 – 165 (1978).

Поступила 20 марта 2017