Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 4, 2018, стр. 15 – 30

Посвящена 100-летию со дня рождения выдающегося армянского математика Мхитара Мкртичевича Джрбашяна - основателя Института математики и Известий НАН Армении, Математика в Национальной Академии наук Армении

О ПРОСТРАНСТВАХ A^2_ω ТИПА ДИРИХЛЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

А. М. ДЖРБАШЯН, ДЖ. Х. ПЕХЕНДИНО

University of Antioquia, Medellin, Colombia[1]
E-mails: *armen_jerbashian@yahoo.com, jimmypejendino@hotmail.com*

Аннотация. В статье сначала доказаны некоторые расширения результатов первого из авторов, относящихся к гильбертовым пространствам $A^2_{\omega,0}$ функций голоморфных в в полуплоскости. Затем введены некоторые новые гильбертовы пространства A^2_ω типа Дирихле, содержащиеся в пространстве Харди H^2 в полуплоскости. В пространсвах $A^2_\omega \subset H^2$ установлен ряд результатов о представлениях, граничных свойствах, изометрии, интерполяции, биортогональных системах и базисах.

MSC2010 number: 30H99, 30E05.

Ключевые слова: пространство Дирихле; граничные значения; биортогональность; интерполяция.

1. Введение

Данная статья посвящена исследованию некоторых гильбертовых пространств A^2_ω типа Дирихле функций голоморфных в верхней полуплоскости $G^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, которые подобны случаю $p = 2$, $\gamma = 0$ рассмотренному в [1, 2] более широких пространств $A^p_{\omega,\gamma}$. Однако, новые пространства вложены в пространство H^2 Харди в G^+. Сначала доказаны некоторые расширения утверждений теорем 4, 5 и 6 из [2], относящихся к ортогональной проекции и изометрии. Затем введены пространства $A^2_\omega \subset H^2$ условием, что производная функции принадлежит более широкому пространству $A^2_{\omega,0}$, и в пространстве $A^2_\omega \subset H^2$ доказан ряд результатов о представлениях, граничных свойствах, изометрии с H^2, интерполяции, биортогональных системах и базисах. Представляющее ядро рассматриваемых пространств A^2_ω, которым также производятся аппроксимации, в

[1]Работа выполнена в рамках исследовательского проекта CIEN Project 2016-11126 Университета Антиохии.

некотором смысле лучше ядра Коши и рациональных функций [3], так как его сингулярность на вещественной оси интегрируема.

Результаты статьи являются полуплоскостными аналогами результатов работ [4, 5], относящихся к гильбертовым пространствам $A^2_\omega \subset H^2$ типа Дирихле в единичном круге. В частности, здесь аппарат рядов Фурье-Тейлора заменен аппаратом преобразований Фурье-Лапласа.

2. Расширения результатов о пространствах $A^2_{\omega,0}$

В этом параграфе даны некоторые расширения утверждений теорем 4, 5 и 6 из [2]. Эти утверждения расширены на некоторые пространства $A^2_{\omega,0}$, в которых рост функций ограничен более сильным условием в ∞, что необходимо для доказательства дальнейших результатов статьи. Начнем с некоторых определений из [1, 2].

Определение 2.1. *Класс* $A^p_{\omega,\gamma}$ $(0 < p < +\infty,\ -\infty < \gamma \le 2)$ *- множество голоморфных в* G^+ *функций* f, *удовлетворяющих при достаточно малом* $\rho > 0$ *и* $\beta = \arcsin \frac{\rho}{R} = \frac{\pi}{2}$ *– к условию типа Неванлинны*

$$\liminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_\beta^{\pi-\beta} \log^+ |f(Re^{i\vartheta})| \left(\sin \frac{\pi(\vartheta-\beta)}{\pi-2\beta}\right)^{1-\pi/\kappa} d\vartheta = 0, \tag{2.1}$$

а также условию

$$\|f\|^p_{p,\omega,\gamma} := \iint_{G^+} |f(z)|^p \frac{d\mu_\omega(z)}{(1+|z|)^\gamma} < +\infty, \tag{2.2}$$

где $d\mu_\omega(x+iy) = dx d\omega(2y)$ *и предполагается, что функция* ω *из класса* Ω_α $(-1 \le \alpha < +\infty)$, *т. е. задана в* $[0, +\infty)$ *и удовлетворяет следующим условиям:*

(i) ω *не убывает на* $[0, +\infty)$, $\omega(+0) = 0$ *и существует строго убывающая последовательность* $\delta_k \downarrow 0$ *такая, что* $\omega(\delta_k)$ *также строго убывает;*

(ii) $\omega(t) \asymp t^{1+\alpha}$ *при некотором* $\Delta_0 \ge 0$ *и любом* $\Delta_0 \le t < +\infty$

($f(t) \asymp g(t)$ *означает, что* $m_1 f(t) \le g(t) \le m_2 f(t)$ *с некоторыми постоянными* $m_1, m_2 > 0$*). Лебегово пространство* $L^p_{\omega,\gamma}$ *- множество тех функций в* G^+, *которые удовлетворяют только условию (2.2).*

Отметим, что $A^p_{\omega,\gamma}$ $(1 \le p < +\infty,\ -\infty < \gamma < 1,\ \omega \in \Omega_\alpha,\ \alpha \ge -1)$ является банаховым пространством с нормой (2.2), как это доказано в предложении 1.2 из [1], и превращается в гильбертово пространство при $p = 2$. В дальнейшем будем также использовать ядро типа Коши М. М. Джрбашяна

$$C_\omega(z) := \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{dt}{I_\omega(t)}, \quad I_\omega(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} d\omega(x) = x \int_0^{+\infty} e^{-tx} \omega(x) dx$$

(см. раздел 2 в [2]), которое при любом $\omega \in \Omega_\alpha$ $(-1 \le \alpha < +\infty)$ является голоморфной в G^+ функцией и переходит в $2+\alpha$-степень обычного ядра Коши при $\omega(t) = t^{1+\alpha}$ $(\alpha > -1)$. Отметим, что по лемме 3.1 из [1] *при любых числах* $\alpha > -1$, $\beta \in ([\alpha] - 1, \alpha)$ *и* $\rho > 0$ *существует постоянная* $M_{\rho,\beta} > 0$ *такая, что*

$$|C_\omega(z)| \le \frac{M_{\rho,\beta}}{|z|^{2+\beta}}, \quad z \in G^+_\rho := \{z : \operatorname{Im} z > \rho\}. \tag{2.3}$$

Кроме того, *если* $\widetilde{\omega}$ *- квадрат Вольтерра функции* ω, *т. е.* $\widetilde{\omega}(0) = 0$ *и*

$$\widetilde{\omega}(x) = \int_0^x \omega(x-t) d\omega(t), \quad 0 < x < +\infty, \tag{2.4}$$

то $\widetilde{\omega} \in \Omega_{1+2\alpha}$ *и* $I^2_\omega(x) = I_{\widetilde{\omega}}(x)$ $(0 < x < +\infty)$ в силу леммы 4 из [2].

Теорема 2.1. *Если* $\omega \in \Omega_\alpha$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ *и* $\omega(0) = 0$, *то*

1°. *Ортогональная проекция* $L^2_{\omega,0}$ *на* $A^2_{\omega,0}$ *может быть записана в виде*

$$P_\omega f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{G^+} f(w) C_\omega(z - \overline{w}) d\mu_\omega(w), \quad z \in G^+. \tag{2.5}$$

2°. *Любая функция* $f \in A^2_{\omega,0}$ *допускает следующие представления:*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{G^+} f(w) C_\omega(z - \overline{w}) d\mu_\omega(w) \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{G^+} \{\operatorname{Re} f(w)\} C_\omega(z - \overline{w}) d\mu_\omega(w), \quad z \in G^+. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Доказательство. Пусть $f \in L^2_{\omega,0}$. Тогда, применив оценку (2.3) с $\beta = \alpha - \varepsilon$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$, а также неравенство Гельдера можно проверить, что при любом $f \in L^2_{\omega,0}$ интеграл (2.5) абсолютно и равномерно сходится внутри G^+ и тем самым представляет там голоморфную функцию. Кроме того, пользуясь оценкой (2.3) и неравенством Гельдера можно доказать, что при любом фиксированном $\rho > 0$ существует постоянная $M_{\rho,\varepsilon} > 0$, зависящая только от ρ и ε такая, что $|P_\omega f(Re^{i\vartheta})| \le M_{\rho,\varepsilon} R^{\frac{3}{2}+\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}$, $\vartheta \in (\arcsin \frac{\rho}{R}, \pi - \arcsin \frac{\rho}{R})$, если R достаточно велико. Тем самым, функция $P_\omega f$ удовлетворяет условию (2.1), и остается только доказать, что P_ω является ограниченным оператором, переводящим L^2_ω в $A^2_{\omega,0}$ и тождественным на $A^2_{\omega,0}$. С этой целью заметим, что при любом $f \in L^2_{\omega,0}$

и любом фиксированном $z = x + iy \in G^+$

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} P_\omega f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(w)du\int_0^{+\infty} e^{it(z-\overline{w})}\frac{dt}{I_\omega(t)}\right)d\omega(2v)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\lim_{R\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{itz}\frac{e^{-tv}}{I_\omega(t)}dt\int_{-R}^{R} e^{-tu}f(w)du\right)d\omega(2v)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}d\omega(2v)\int_0^{+\infty} e^{itz}\frac{e^{-tv}}{I_\omega(t)}\widehat{f}_v(t)dt \quad (w = u + iv), \end{aligned}$$

где

$$\widehat{f}_v(t) = \operatorname*{l.i.m.}_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-itu}f(u+iv)du$$

- преобразование Фурье функции f на уровне iv, т. е. функции $f(u + iv) \in L^2(-\infty, +\infty)$. Отметим, что равенства в (2.7) верны, так как по теореме Планшереля

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tv}}{I_\omega(t)}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} e^{-itu}f(w)du - \widehat{f}_v(t)\right|dt\\ &\quad\le \left[C_{\widetilde{\omega}}(2i(y+v))\right]^{1/2}\left\|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} e^{-itu}f(w)du - \widehat{f}_v(t)\right\|_{L^2(-\infty,+\infty)} \to 0 \end{aligned}$$

при $R \to +\infty$. Из (2.7) заключаем, что при любом $z \in G^+$

$$(2.8)\qquad P_\omega f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{itz}\frac{\Phi(t)}{\sqrt{I_\omega(t)}}dt$$

где

$$\Phi(t) := \frac{1}{\sqrt{I_\omega(t)}}\int_0^{+\infty} e^{-tv}\widehat{f}_v(t)d\omega(2v).$$

Далее, замена порядка интегрирования, преобразующая (2.7) в (2.8) справедлива, так как ввиду (2.3) для фиксированного $y > 0$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}d\omega(2v)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t(y+v)}}{I_\omega(t)}|\widehat{f}_v(t)|dt\\ &\qquad\le \int_0^{+\infty}\left[C_{\widetilde{\omega}}(2i(y+v))\right]^{1/2}\|\widehat{f}_v(t)\|_{L^2(0,+\infty)}d\omega(2v)\\ &\qquad\le M\|f\|_{L^2_{\omega,o}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{d\omega(2v)}{(y+v)^{3+2\alpha-\varepsilon}}\right)^{1/2} < +\infty. \end{aligned}$$

Используя неравенство Гельдера и теорему Планшереля, из (2.8) получаем

$$(2.9)\qquad \|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} \le \|f\|_{L^2_{\omega,o}},$$

а в силу теоремы Пэли-Винера (см. [6], стр. 130-131) из (2.8) следует, что

$$\|P_\omega f\|^2_{L^2_{\omega,0}} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} d\omega(2y)\int_0^{+\infty} e^{-2yt}\frac{|\Phi(t)|^2}{I_\omega(t)}dt = \|\Phi\|^2_{L^2(0,+\infty)}.$$

Таким образом $\|P_\omega f\|_{L^2_{\omega,0}} \le \|f\|_{L^2_{\omega,0}}$, т. е. P_ω переводит $L^2_{\omega,0}$ в $A^2_{\omega,0}$ и $\|P_\omega\| \le 1$.

Пусть теперь $f \in A^2_{\omega,0}$. Тогда $f(z+i\rho) \in H^2$ при любом $\rho > 0$ ввиду результатов главы 7 в [7] (см. также раздел 1.2 в [1]). Поэтому, в силу теоремы Пэли-Винера

$$f(z+i\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{itz}\widehat{f}_\rho(t)dt, \quad z \in G^+,$$

где $\widehat{f}_\rho$ - преобразование Фурье функции f на уровне $i\rho$, и

$$\|f(t+i\rho)\|^2_{L^2(-\infty,+\infty)} = \|f(z+i\rho)\|^2_{H^2} = \|\widehat{f}_\rho\|^2_{L^2(0,+\infty)}.$$

Далее, при любом $v > 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u+iv)C_\omega(z-\overline{w})du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{i(z+iv)t}\widehat{f}_v(t)\frac{dt}{tI_\omega(t)},$$

и поэтому

$$(2.10) \qquad P_\omega f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{izt}\frac{dt}{tI_\omega(t)}\int_0^{+\infty} e^{-2tv}\{e^{tv}\widehat{f}_v(t)\}d\omega(2v)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{i(z-iv)t}\widehat{f}_v(t)dt = f(z), \quad z \in G^+_v.$$

Таким образом, последняя формула верна во всей полуплоскости G^+, и оператор P_ω тождественнен на $A^2_{\omega,0}$.

2°. Первая строка в (2.6) очевидна в силу доказанного утверждения 1°. Для доказательства второго представления в (2.6) предположим, что $f \in A^2_{\omega,0}$. Тогда, как было показано выше, $f(z+i\rho) \in H^2$ при любом $\rho > 0$. Поэтому, как хорошо известно (см., [6], гл. VI(E)),

$$\widehat{f}_\rho(t) = \underset{R\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} e^{-itu}f(u+i\rho)du = 0 \quad \text{для п.в.} \quad t < 0.$$

Тем самым для п.в. $t > 0$

$$\widehat{f}_\rho(t) = \widehat{f}_\rho(t) + \overline{\widehat{f}_\rho(-t)} = \underset{R\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} e^{-itu}\{\mathrm{Re}\, f(u+i\rho)\}du,$$

и как в (2.10) заключаем, что при любых $v > 0$ и $z \in G_v^+$

$$\frac{1}{\pi}\iint_{G^+}\{\mathrm{Re}\ f(w)\}C_\omega(z-\overline{w})d\mu_\omega(w)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{izt}\frac{dt}{tI_\omega(t)}\int_0^{+\infty} e^{-2tv}\{e^{tv}[\widehat{f}_v(t)+\overline{\widehat{f}_v(-t)}]\}d\omega(2v)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{i(z-iv)t}\widehat{f}_v(t)dt = f(z).$$

Остается заметить, что это представление справедливо во всей полуплоскости G^+. □

Замечание 2.1. *В случае степенных функций $\omega(t) = t^{1+\alpha}$ $(\alpha > -1)$ формула (2.6) переходит в представления, найденные в* [8, 9] *(см. также* [10]*). Для абсолютно непрерывных мер $d\omega$ и пространств, определенных в несколько иной форме, и на многомерных трубчатых областях, первая строка формулы* (2.6) *была доказана в* [11, 12].

Следующая теорема является аналогом теоремы Пэли-Винера для пространств $A^2_{\omega,0}$.

Теорема 2.2. *Если $\omega \in \Omega_\alpha$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ и $\omega(0) = 0$, то пространство $A^2_{\omega,0}$ совпадает со множеством функций представимых в виде*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{itz}\frac{\Phi(t)}{\sqrt{I_\omega(t)}}dt, \quad z \in G^+, \quad \Phi(t) \in L^2(0,+\infty), \tag{2.11}$$

где $\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} = \|f\|_{A^2_{\omega,0}}$, и

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{I_\omega(t)}}\int_0^{+\infty} e^{-tv}\widehat{f}_v(t)d\omega(2v), \tag{2.12}$$

где $\widehat{f}_v$ - преобразование Фурье функции f на уровне iv.

Доказательство. Пусть $f \in A^2_{\omega,0}$. Тогда формулы (2.11) и (2.12) следуют из (2.8), а из (2.9) следует, что $\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} \le \|f\|_{A^2_{\omega,0}}$, поскольку $P_\omega = I$ на пространстве $A^2_{\omega,0} \subset L^2_{\omega,0}$. Обратно, если функция f представима в виде (2.11)-(2.12), то

$$\|f\|^2_{A^2_{\omega,0}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} d\omega(2y)\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^2dx$$
$$= \int_0^{+\infty}\left\|\frac{e^{-yt}\Phi(t)}{\sqrt{I_\omega(t)}}\right\|^2_{L^2(0,+\infty)} d\omega(2y)$$
$$= \int_0^{+\infty} d\omega(2y)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2yt}}{I_\omega(t)}|\Phi(t)|^2dt = \|\Phi\|^2_{L^2(0,+\infty)}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что если функция представима в виде (2.11), то она ограничена в любой полуплоскости G^+_ρ $(\rho > 0)$, и, тем самым, справедливо (2.1). □

Замечание 2.2. *Для нескольких иных пространств на трубчатых областях $\mathbb{C}^n$, с абсолютно непрерывными мерами $d\omega$, аналог теоремы 2.2 доказан в* [11].

Следующее утверждение справедливо в силу замечания 5 из [2].

Замечание 2.3. *Пусть $S = \bigcup_{\alpha=-1}^{+\infty}\Omega_\alpha$. Тогда объединение $\bigcup_{\omega\in S} A^2_{\omega,0}$ совпадает со множеством всех функций представимых в виде*

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{itz}\Psi(t)dt, \quad z \in G^+,$$

где $e^{-\varepsilon t}\Psi(t) \in L^2(0,+\infty)$ при любом $\varepsilon > 0$.

Теорема 2.3. *Если $\omega \in \Omega_\alpha$ $(-1 < \alpha < +\infty)$, $\omega(0) = 0$, а $\widetilde{\omega}$ является квадратом Вольтерра функции ω (2.4), то пространство $A^2_{\widetilde{\omega},0}$ совпадает со множеством всех функций предствимых в G^+ в виде*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z-t)\varphi(t)dt, \quad \text{где} \quad \varphi \in L^2(-\infty,+\infty). \tag{2.13}$$

При любом $f \in A^2_{\widetilde{\omega},0}$ функция

$$\varphi_0(z) = L_\omega f(z) := \int_0^{+\infty} f(z+i\sigma)d\omega(\sigma)$$

является единственной функцией из пространства Харди H^2 на G^+, с которой справедливо представление (2.13). Кроме того, $\|\varphi_0\|_{H^2} = \|f\|_{A^2_{\widetilde{\omega},0}}$ и $\varphi - \varphi_0 \perp H^2$ при любой функции $\varphi \in L^2(-\infty,+\infty)$, обеспечивающей представление (2.13). Далее, оператор L_ω является изометрией $A^2_{\widetilde{\omega},0} \to H^2$, а интеграл (2.13) определяет $(L_\omega)^{-1}$ на H^2.

Доказательство. В силу леммы 5 из [2]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)C_\omega(z-t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}e^{itz}\frac{\widehat{\varphi}(t)}{I_\omega(t)}dt,\quad z\in G^+, \tag{2.14}$$

где интегралы равномерно сходятся в G^+ и представляют голоморфную в G^+ функцию f такую, что

$$L_\omega f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{itz}\widehat{\varphi}(t)dt,\quad z\in G^+. \tag{2.15}$$

Тем самым, в силу теоремы 2.2 пространство $A^2_{\widetilde{\omega},0}$ совпадает с множеством функций, представимых в виде (2.13). Далее, если $f\in A^2_{\widetilde{\omega},0}$, то $L_\omega f\in H^2$, и очевидно, что это единственная функция из H^2, для которой верны формулы (2.13) и (2.15). Кроме того, $\|L_\omega f\|_{H^2}=\|f\|_{A^2_{\widetilde{\omega},0}}$ в силу теоремы 2.2, и если другая функция $\varphi\in L^2(-\infty,+\infty)$ обеспечивает представление (2.13), то преобразование Фурье функции $\varphi-L_\omega f$ равняется нулю вне $(0,+\infty)$, т. е. $\varphi-L_\omega f\perp H^2$. Наконец, остается заметить, что L_ω является взаимооднозначным отображением $A^2_{\widetilde{\omega},0}\to H^2$ и интеграл (2.13) задает $(L_\omega)^{-1}$, поскольку операторы L_ω и $(L_\omega)^{-1}$ действуют как умножение и деление на I_ω подынтегральных функций в (2.14) и (2.15). □

3. Определение пространств типа Дирихле A^2_ω. Представления, изометрия, граничное свойство

Теперь введем некоторые пространства A^2_ω типа Дирихле, содержащиеся в пространстве Харди H^2 в G^+, установим представления, найдем явную форму изометрии с H^2 и установим некоторые граничные свойства функций из A^2_ω.

Определение 3.1. *Полагая, что функция $\omega_0\in\Omega_\alpha$ $(0\le\alpha<+\infty)$ непрерывно диффренцируема на $(0,+\infty)$ и такова, что $\omega_0(x)\ge Mx$ $(0<x<+\infty)$ с некоторой постоянной $M>0$, положим*

$$\omega(x)=\omega_0'(x),\quad \omega_1(x)=\int_{+0}^{x}\omega_0(x-t)d\omega_0(t),\quad 0\le x<+\infty,$$

и определим A^2_ω как множество функций f голоморфных в G^+, для которых

$$f'\in A^2_{\omega_1,0}\quad и\quad \lim_{y\to+\infty}f(x+iy)=0,\quad -\infty<x<+\infty. \tag{3.1}$$

Также, положим $\|f\|_{A^2_\omega}=\|f'\|_{A^2_{\omega_1,0}}$.

Отметим, что это определение корректно, так как $\omega_1\in\Omega_{1+2\alpha}$ в силу леммы 4 из [2]. Кроме того, при любом $0<x<+\infty$

$$[I_{\omega_0}(x)]^2=\left(\int_0^{+\infty}e^{-xt}d\omega_0(t)\right)^2=\int_0^{+\infty}e^{-xt}d\omega_1(t):=I_{\omega_1}(x),$$

и, как нетрудно убедиться,

$$\omega_1'(x) = \int_0^x \omega_0'(x-t)\omega_0'(t)dt, \quad 0 < x < +\infty.$$

Всюду ниже будем полагать, что функции ω, ω_0 и ω_1 таковы как сказано выше.

Далее, нетрудно заметить, что лемма 4.2 из [13] верна также при значении $\alpha = 0$, и поэтому, если функция $\omega = \omega_0'$ положительна, не возрастает на $(0, +\infty)$ и такова, что

$$\int_0^1 \{t\omega_0'(t)\}^{-1} dt < +\infty,$$

то для любого $z = x + iy \in G^+$

$$C_\omega(z) = L_\gamma\left(\frac{1}{-iz}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{-i(z+it)} d\gamma(t),$$

где γ является неубывающей функцией на $(0, +\infty)$, такой что $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(t) \leq [\omega_0'(t)]^{-1}$, $0 < t < +\infty$. Тем самым, функция C_ω голоморфна вне отрицательной мнимой полуоси, и ее сингулярность в начале координат интегрируема.

Первое из представлений следующей теоремы является аналогом теоремы Пэли-Винера (см. [14], теорему 11.9 на стр. 186), а второе в явном виде задает изометрию между A^2_ω и пространством Харди H^2 в полуплоскости.

Теорема 3.1. 1°. *A^2_ω является гильбертовым пространством, $A^2_\omega \subset H^2$ и A^2_ω совпадает с множеством функций представимых в виде*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{\Phi(t)}{tI_{\omega_0}(t)} dt, \quad z \in G^+, \tag{3.2}$$

где $\Phi(t) \in L^2(0, +\infty)$, и $\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} = \|f\|_{A^2_\omega}$.

2°. *A^2_ω совпадает с множеством всех функций представимых в G^+ в виде*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z-t)\varphi(t)dt, \quad \varphi(z) \in H^2, \tag{3.3}$$

где $\|\varphi\|_{H^2} = \|f\|_{A^2_\omega}$. Формула (3.3) задает изометрию $H^2 \to A^2_\omega$, обращением которой является

$$\varphi(z) = L_\omega f(z) := \int_0^{+\infty} f'(z+it)\omega(t)dt, \quad z \in G^+. \tag{3.4}$$

Доказательство. 1°. Начнем с доказательства представления (3.2). С этой целью заметим, что в силу теоремы 2.2 класс $A^2_{\omega_1,0}$ совпадает с множеством всех функций F вида

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{I_{\omega_1}(t)}} dt, \quad z \in G^+,$$

где $\Phi(t) \in L^2(0,+\infty)$, и $\|F\|_{A^2_{\omega_1,0}} = \|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)}$. Далее, заметим, что ввиду (3.1) для любой функции $f \in A^2_\omega$ и любого $z \in G^+$

$$f(z) = -i\int_y^{+\infty} f'(x+i\sigma)d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\int_y^{+\infty} d\sigma \int_0^{+\infty} e^{i(x+i\sigma)t}\frac{\Phi(t)}{\sqrt{I_{\omega_1}(t)}}dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\int_0^{+\infty} e^{ixt}\frac{\Phi(t)}{I_{\omega_0}(t)}dt\int_y^{+\infty} e^{-\sigma t}d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\int_0^{+\infty} e^{ixt}\frac{\Phi(t)}{tI_{\omega_0}(t)}dt,$$

где $\Phi(t) \in L^2(0,+\infty)$ и $\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} = \|f'\|_{A^2_{\omega_1,0}} = \|f\|_{A^2_\omega}$. Итак, формула (3.2) доказана. Далее, легко проверить, что $tI_{\omega_0}(t) \geq M > 0$ $(0 < t < +\infty)$, и поэтому $\|\Phi(t)/\{tI_{\omega_0}(t)\}\|_{L^2(0,+\infty)} \leq M^{-1}\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} < +\infty$. Следовательно, получаем

$$\|f\|_{A^2_\omega} = \|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} \geq M\|\Phi(t)/\{tI_{\omega_0}(t)\}\|_{L^2(0,+\infty)},$$

где $\|\Phi(t)/\{tI_{\omega_0}(t)\}\|_{L^2(0,+\infty)} = \|f\|_{H^2}$ по теореме Пэли-Винера. Таким образом,

$$\|f\|_{H^2} \leq M^{-1}\|f\|_{A^2_\omega} < +\infty, \quad \text{т. е.} \quad A^2_\omega \subset H^2. \tag{3.5}$$

Обратно, если f представима в виде (3.2), то при любом вещественном x

$$|f(x+iy)| \leq M_1^{-1}\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-2yt}dt\right\}^{1/2}$$
$$= M_1^{-1}(2y)^{-1/2}\|\Phi\|_{L^2(0,+\infty)} \to 0 \quad \text{при} \quad y \to +\infty.$$

Итак, соотношение (3.1) справедливо. Кроме того, очевидно что

$$f'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{izt}\frac{\Phi(t)}{\sqrt{I_{\omega_1}(t)}}dt, \quad z \in G^+,$$

и поэтому $f' \in A^2_{\omega_1,0}$ по теореме 2.2. Для завершения доказательства утверждения 1° докажем полноту пространства A^2_ω. Действительно, если имеется последовательность Коши $\{f_n\}_1^\infty \subset A^2_\omega$, то производные $\{f_n'\}_1^\infty \subset A^2_{\omega_1,0}$ образуют последовательность Коши в $A^2_{\omega_1,0}$ и их предел F_0 принадлежит $A^2_{\omega_1,0}$, так как $A^2_{\omega_1,0}$ является гильбертовым пространством. Отметим, что последовательность f_n' равномерно сходится к F_0 внутри G^+. С другой стороны, ввиду оценки нормы (3.5) $\{f_n\}_1^\infty$ является последовательностью Коши в H^2, и тем самым имеет предел $f_0 \in H^2$ к которому f_n стремится равномерно внутри G^+, и для f_0 выполнено соотношение (3.1). Таким образом, $F_0 \equiv f_0' \in A^2_{\omega_1,0}$, и $f_n' \to f_0'$ в норме пространства $A^2_{\omega_1,0}$, т. е. $f_n \to f_0$ в норме пространства A^2_ω, $f_0 \in A^2_\omega$ и f_0 удовлетворяет (3.1).

2°. В силу теоремы 2.3 пространство $A^2_{\omega_1,0}$ совпадает с множеством всех функций F вида

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}C_{\omega_0}(z-t)\varphi(t)dt,\quad z\in G^+, \tag{3.6}$$

где $\varphi=L_\omega F\in H^2$ в G^+, а $\|\varphi\|_{H^2}=\|F\|_{A^2_{\omega_1,0}}$. Если $f\in A^2_\omega$, то $f':=F\in A^2_{\omega_1,0}$, и приходим к формуле (3.4) и равенствам $\|\varphi\|_{H^2}=\|f'\|_{A^2_{\omega_1,0}}=\|f\|_{A^2_\omega}$. Для доказательства представления (3.3) заметим, что при любом $y>0$

$$\int_y^{+\infty}C_{\omega_0}(x+i\sigma)d\sigma=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{I_{\omega_0}(t)}\int_y^{+\infty}e^{i(x+i\sigma)t}d\sigma=C_\omega(z),$$

где интегралы абсолютно и равномерно сходятся по $z=x+iy$ внутри G^+. Поэтому, интегрируя представление (3.6) функции f' получаем

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_y^{+\infty}d\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}C_{\omega_0}(x+i\sigma-t)\varphi(t)dt\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}C_\omega(z-t)\varphi(t)dt,\quad z=x+iy\in G^+,\end{aligned}$$

где интегралы абсолютно и равномерно сходятся внутри G^+ в силу (2.3) с любым $\beta\in([\alpha]-1,\alpha)$. Обратно, если справедливо представление (3.3), то для любого $z\in G^+$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}C_\omega(z-t)\varphi(t)dt=\frac{1}{2\pi i}\int_y^{+\infty}d\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}C_{\omega_0}(x+i\sigma-t)\varphi(t)dt,$$

и, тем самым, f' обладает преставлением (3.6), из которого следует, что $f'\in A^2_{\omega_1,0}$. Поэтому, используя неравенство Гельдера и (2.3) получаем, что при любом $z=x+iy\in G^+_\rho$ и $\rho>0$ имеем

$$\begin{aligned}|f(x+iy)|&\le\|\varphi\|_{H^2}\int_y^{+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|C_{\omega_0}(x+i\sigma-t)|^2dt\right\}^{1/2}d\sigma\\&\le\frac{M_{\rho,\beta}}{\sqrt{2\pi}}\int_y^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+\sigma)^{4+2\beta}}\right\}^{1/2}d\sigma\\&=\frac{M_{\rho,\beta}}{\sqrt{2\pi}}2^{1+\beta/2}\left\{\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^{4+2\beta}}\right\}^{1/2}\int_y^{+\infty}\frac{d\sigma}{\sigma^{3/2+\beta}}<+\infty.\end{aligned}$$

Таким образом, справедливо соотношение (3.1) и $f\in A^2_\omega$. □

Теперь покажем, что функции пространств типа Дирихле A^2_ω обладают некасательными граничными значениями вне некоторых исключительных множеств нулевой омега-емкости на вещественной оси. Отметим, что отмеченная омега-емкость введена в [15] как обобщение рассмотренного в [7] полуплоскостного аналога общеизвестой альфа-емкости Фростмана. Мы же используем приведенное ниже, несколько модифицированное, но эквивалентное введенному в [15], определение, а также некоторые результаты из [15].

Определение 3.2. *Пусть $E \subseteq (-\infty, +\infty)$ - измеримое по Борелю множество. Тогда E положительной ω-емкости (или $C_\omega(E) > 0$), если для любого $R > 0$ существует конечная борелева мера $\sigma \geq 0$ с носителем $E \cap (-R, R)$ $(\sigma \prec E \cap (-R, R))$ такая, что*

$$S_R := \sup_{z \in G^+} \int_{-R}^{R} |C_\omega(z-t)| d\sigma(t) < +\infty.$$

Если же нет такой меры, т. е. $S_R = +\infty$ при некотором $R > 0$ и любой конечной, неотрицательной борелевой мере $\sigma \prec E \cap (-R, R)$, то множество E обладает нулевой ω-емкостью (или $C_\omega(E) = 0$).

Предложение 3.1. *Поскольку функции $f \in A^2_\omega$ представимы в виде (3.3), то в силу леммы 4.4 из [15] эти функции имеют некасательные граничные значения $f(x)$ во всех точках $-\infty < x < +\infty$, кроме множества нулевой ω-емкости.*

4. Биортогональные системы, базисы и интерполяция

Явная форма (3.3) изометрии между пространством Харди H^2 в G^+ и прострaнствами A^2_ω позволяет перевести любой результат аддитивного характера в пространстве H^2 в подобный же результат в пространствах A^2_ω. В частности, при $p = 2$ результаты [16, 17] о биортогональных системах и интерполяции в H^p $(1 < p < +\infty)$ индуцируют такие же утверждения в A^2_ω. Почти все эти утверждения даны в нижеследующих предложениях, доказательства которых очевидны и поэтому не приводятся.

Для простоты будем рассматривать случай, когда узлы интерполяции первого порядка, т. е. всюду ниже будем полагать, что $\{z_k\}_1^\infty$ - последовательность *попарно различных* точек в G^+. Принято говорить, что $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, если последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ равномерно разделена, т. е.

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{j=1,\, j \neq k} \left| \frac{z_j - z_k}{z_j - \overline{z_k}} \right| = \delta > 0. \tag{4.1}$$

Отметим, что выполнение этого условия влечет выполнение условия Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_k}{1 + |z_k|^2} < +\infty, \tag{4.2}$$

необходимого и достаточного для сходимости произведения Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_k}{z - \overline{z_k}} \frac{|1 + z_k^2|}{1 + z_k^2}$$

с нулями $\{z_k\}_1^\infty$ к функции голоморфной всюду, кроме замыкания множества $\{\overline{z_k}\}_1^\infty$. Неравенство (3.21) из [16] переходит в неравенство следующего предложения.

Предложение 4.1. *Если $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, то для любой функции $f \in A^2_\omega$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k |L_\omega f(z_k)|^2 \leq C \|f\|^2_{A^2_\omega},$$

где $C > 0$ - постоянная, не зависящая от f.

Прежде чем привести ряд предложений об аппроксимации и интерполяции в A^2_ω, отметим, что функции

$$r_k(z) = \frac{1}{z - \overline{z_k}} \quad \text{и} \quad \Omega_k(z) = \frac{B(z)}{z - z_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

принадлежат H^2 в G^+. Тем самым, функции

$$L_\omega^{-1} r_k(z) = r_{k,\omega}(z) \quad \text{и} \quad L_\omega^{-1} \Omega_k(z) = \Omega_{k,\omega}(z), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

принадлежат A^2_ω, и, как нетрудно проверить, $r_{k,\omega}(z) = -iC_\omega(z - \overline{z_k})$.

Ввиду теоремы D и некоторых других результатов из [16] справедливо следующее утверждение.

Предложение 4.2. *Если последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ не удовлетворяет условию Бляшке, т. е. ряд (4.2) расходится, то системы*

$$\{-iC_\omega(z - \overline{z_k})\}_1^\infty \quad \text{и} \quad \{\Omega_{k,\omega}(z)\}_1^\infty$$

полны в A^2_ω.

Далее, некоторая трансформация в условиях (1.16), (1.17) из [16] (или (2.2), (2.3) из [17]) приводит к определению подмножества $A^2_\omega\{z_k\} \subset A^2_\omega$ функций f, для которых существуют некоторые $g \in H^2$ такие, что для почти всех $-\infty < x < +\infty$ некасательные граничные значения функции $g(-z)B(z)$ изнутри нижней полуплоскости $G^- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ совпадают с некасательными же граничными значениями функции $L_\omega f \in H^2$ изнутри G^+. Ясно, что $A^2_\omega\{z_k\}$ можно рассматривать только при условии (4.2). Из теоремы 2 из [17] приходим к следующему предложению.

Предложение 4.3. *Системы* $\{-iC_\omega(z-\overline{z_k})\}_1^\infty$ *и* $\{\Omega_{k,\omega}(z)\}_1^\infty$ *биортогональны в* A^2_ω, *т. е.*

$$\big(-iC_\omega(z-\overline{z_k}),\Omega_{\nu,\omega}(z)\big)_\omega = \iint_{G^+}\left[-iC_\omega(z-\overline{z_k})\right]\overline{\Omega_{\nu,\omega}(z)}d\mu_\omega(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu=k, \\ 0, & \text{если. } \nu\neq k. \end{cases}$$

Следующее утверждение вытекает из лемм В и 1.1 работы [16].

Предложение 4.4. *Если* $f\in A^2_\omega$, *то:*

1° f *принадлежит множеству* $A^2_\omega\{z_k\}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{L_\omega f(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z}\equiv 0, \quad z\in G^+,$$

где $L_\omega f(t)$ *и* $B(t)$ *- граничные значения функции* $L_\omega f\in H^2$ *и* $B\in H^2$.

2° *Справедливо следующее ортогональное разложение:*

$$f(z)=F(z)+R(z) \quad (z\in G^+), \quad \|f\|^2_{2,\omega}=\|F\|^2_{2,\omega}+\|R\|^2_{2,\omega},$$

где $F\in A^2_\omega\{z_k\}$ *и* $R=L_\omega^{-1}[B\Psi]\in A^2_\omega$.

Из теорем 4.1 и 5.2 работы [16] приходим к следующему результату.

Предложение 4.5. *Каждая из систем*

$$\big\{-iC_\omega(z-\overline{z_k})\big\}_1^\infty \quad \text{и} \quad \big\{\Omega_{k,\omega}(z)\big\}_1^\infty$$

является базисом в $A^2_\omega\{z_k\}$ *тогда и только тогда, когда* $\{z_k\}_1^\infty\in\Delta$.

Пользуясь формулами (4.29), (4.31) и формулой разложения в конце доказательства теоремы 5.2 из [16] приходим к следующему результату.

Предложение 4.6. *Если* $\{z_k\}_1^\infty\in\Delta$, *то любая функция* $f\in A^2_\omega\{z_k\}$ *представима в* G^+ *обеими рядами*

$$f(z)=\sum_{k=1}^\infty c_k(f)\,C_\omega(z-\overline{z_k})=\sum_{k=1}^\infty L_\omega f(z_k)\Omega_{k,\omega}(z), \quad \text{где} \quad c_k(f)=\big(f,\Omega_{k,\omega}\big)_\omega,$$

которые сходятся в норме пространства A^2_ω *и равномерно внутри* G^+.

В силу теоремы 4.2 из [16] справедливо следующее утверждение.

Предложение 4.7. *Если* $\{z_k\}_1^\infty\in\Delta$, *то любая функция* $f\in A^2_\omega$ *представима в виде*

$$f(z)=\sum_{k=1}^\infty c_k(f)\,C_\omega(z-\overline{z_k})+\psi(z),$$

где ряд сходится в норме A^2_ω и равномерно внутри G^+, а также верны следующие вложения:

$$\psi(z) = L_\omega^{-1}\big[B(z)\Psi(z)\big] \in A^2_\omega \quad и \quad \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{L_\omega f(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z} \in H^2.$$

В силу теорем 5.1 и 5.2 из [16] имеет место следующее предложение.

Предложение 4.8. *Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ - последоватльность поапарно различных точек G^+. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1°. *Если $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$ и $\{w_k\}_1^\infty$ - последовательность комплексных чисел, для которой*

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k |w_k|^2 < +\infty,$$

то существует единственная функция $f_0 \in A^2_\omega\{z_k\}$ такая, что

$$L_\omega f_0(z_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \ldots) \quad и \quad \|f_0\|_{A^2_\omega} \le C_\delta A,$$

где $C_\delta > 0$ - постоянная, зависящая только от δ из (4.1). *Эта функция разлагается в ряд*

$$f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \Omega_{k,\omega}(z), \quad z \in G^+,$$

сходящийся в норме пространства A^2_ω и равномерно внутри G^+.

2°. *Обратно, если множество последовательностей $\left\{(\operatorname{Im} z_k)^{1/2} f'(z_k)\right\}_1^\infty$ со всевозможными функциями $f \in A^2_\omega$ совпадает с пространством ℓ^2 последовательностей комплексных чисел с конечными суммами квадратов модулей, то $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$.*

Abstract. Some extensions of the results of the first author related with the Hilbert spaces $A^2_{\omega,0}$ of functions holomorphic in the half-plane are proved. Some new Hilbert spaces A^2_ω of Dirichlet type are introduced, which are included in the Hardy space H^2 over the half-plane. Several results on representations, boundary properties, isometry, interpolation, biorthogonal systems and bases are obtained for the spaces $A^2_\omega \subset H^2$.

Список литературы

[1] A. M. Jerbashian, "On $A^p_{\omega,\gamma}$ spaces in the half-plane", in: Operator Theory: Advances and Applications, **158**, 141 – 158 Birkhäuser (2005).

[2] A. M. Jerbashian, V. A. Jerbashian, "Functions of ω-bounded type in the half-plane", Calculation Methods and Function Theory (CMFT) **7**, 205 – 238 (2007).

[3] J. L. Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XX (1956).
[4] A. M. Jerbashian, "On the theory of weighted classes of area integrable regular functions", Complex Variables, 50, 155 – 183 (2005).
[5] А. М. Джрбашян, "О граничных свойствах и биортогональных системах в пространствах $A^2_\omega \subset H^{2}$", Известия НАН Армении, Математика, 49, 17 – 22 (2014).
[6] P. Koosis, Introduction to H_p Spaces, Cambridge University Press (1998).
[7] A. M. Jerbashian, Functions of α-Bounded Type in the Half-Plane, Springer, Advances in Complex Analysis and Applications (2005).
[8] M. M. Djrbashian, A. E. Djrbashian, "Integral representation for some classes of analytic functions in a half-plane", Dokl. Akad. Nauk USSR, 285, 547 – 550 (1985).
[9] F. A. Shamoian, A. E. Djrbashian, Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner Texte zur Mathematics, Berlin (1988).
[10] F. Ricci, M. Taibleson, "Boundary values of harmonic functions in mixed norm spaces and their atomic structure", Annali Scuola Normale Superiore - Pisa, Classe di Scienze, Ser. IV, **X**, 1 – 54 (1983).
[11] А. О. Карапетян, "Интегральные представления в трубчатых областях", Изв. АН Арм. ССР, Математика, 23 (1), 91 – 96 (1988).
[12] А. О. Карапетян, "Интегральные представления для весовых пространств функций голоморфных в трубчатых областях", Изв. АН Арм. ССР, Математика, 25 (4), 1 – 19 (1990).
[13] А. М. Джрбашян, Дж. Э. Рестрепо, "О некоторых классах гармонических функций с неотрицательными гармоническими мажорантами в полуплоскости", Изв. НАН Армении, Математика, 51 (2), 17 – 31 (2016).
[14] P. L. Duren, Theory of H^p Spaces, Academic Press (1970).
[15] А. М. Джрбашян, Дж. Э. Рестрепо, "О некоторых классах дельта-субгармонических функций с неотрицательными гармоническими мажорантами в полуплоскости", Изв. НАН Армении, Математика, 51 (3), 9 – 27 (2016).
[16] M. M. Džrbašjan, "A characterization of the closed linear spans of two families of incomplete systems of analytic functions", Math. USSR Sbornik 42, 1 – 70 (1982).
[17] M. M. Džrbašjan, "Basicity of some biorthogonal systems and the solution of a multiple interpolation problem in the classes H^p over the half-plane", Math. USSR Izvestya 13, 589 – 646 (1979).

Поступила 28 ноября 2017