Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 4, 2018, стр. 3 – 14

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ПО ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. НАВАСАРДЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *ggg@ysu.am, knavasard@ysu.am*

Аннотация. Рассматривается общая система Франклина, соответствующая парно регулярному разбиению отрезка $[0;1]$. Доказываются теоремы единственности и восстановления коэффициентов для рядов по таким системам, которые удовлетворяют некоторому необходимому условию и сходятся по мере.

MSC2010 number: 42C10; 42C20.

Ключевые слова: общая система Франклина; теорема единственности; формула восстановления; A-интеграл.

1. Введение

В настоящее время общая система Франклина активно исследуется многими авторами. Некоторые свойства этой системы, полученных в работах [1]-[4], мы укажем по мере необходимости. Начнем с определения общей системы Франклина.

Определение 1.1. *Последовательность (разбиение)* $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ *называется допустимой на* $[0;1]$, *если* $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0;1)$, $n \geq 2$, $\mathcal{T}$ *всюду плотно в* $[0;1]$ *и каждая точка* $t \in (0;1)$ *встречается в* $\mathcal{T}$ *не более чем два раза.*

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n\}$. Допустим π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n \leq \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n-1\}$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Тогда через S_n обозначим пространство функций определенных на $[0;1]$, которые непрерывны слева, линейны на $(\tau_i^n; \tau_{i+1}^n)$ и непрерывны в τ_i^n, если $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$. Ясно, что $dim S_n = n+1$ и $S_{n-1} \subset S_n$. Следовательно, существует (с точностью до знака) единственная функция $f \in S_n$, ортогональная S_{n-1} и $\|f\|_2 = 1$. Эту функцию называют n-ой функцией Франклина, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$. Известно, что $f(t_n) \neq 0$. Поэтому полагается $f(t_n) > 0$.

[0]Исследования выполнены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 15T–1A006

Определение 1.2. *Общая система Франклина $\{f_n(x) : n \geq 0\}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется по правилу $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1)$, $x \in [0, 1]$, и для $n \geq 2$ функция $f_n(x)$ есть n-ая функция Франклина, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.*

Для последовательности $t_n = \frac{2m-1}{2^{k+1}}$, где $n = 2^k + m$, $1 \leq m \leq 2^k$, $k = 0, 1, 2, ...$, получается классическая система Франклина, которая эквивалентным образом определена Ф. Франклином в [5]. Исследованию системы Франклина посвящены много работ. Систематическое исследование этой системы началось с работ [6], [7]. Здесь мы приведем только результаты непосредственно связанные с теоремами, которые будут доказаны в настоящей работе.

Для рядов по классической системе Франклина доказана теорема единственности, в условиях которой присутствует одно необходимое условие на мажоранту частичных сумм ряда (см. [8], теорема 3).

Теорема 1.1. *Для того, чтобы ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$$

был рядом Фурье-Франклина некоторой интегрируемой функции f, необходимо и достаточно, чтобы этот ряд п.в. сходился к $f(x)$ и

$$\liminf_{\lambda\to\infty}\left(\lambda \cdot \mathrm{mes}\left\{x \in [0;1] : \sup_N \left|\sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x)\right| > \lambda\right\}\right) = 0,$$

где $mes(A)$ – Лебегова мера множества A.

Аналогичная теорема для общей системы Франклина доказана М. П. Погосяном в [9]. В работе [10] рассмотрены кратные ряды по системе Франклина.

Пусть d некоторое натуральное число. Рассмотрим кратные ряды Франклина

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_k) \in \mathbb{N}_0^d$-вектор с неотрицательными целочисленными координатами, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d) \in [0;1]^d$ и $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = f_{m_1}(x_1) \cdots f_{m_d}(x_d)$. Говорят, что ряд (1.1) сходится по прямоугольникам в точке $\mathbf{x}$, если существует предел

$$\lim_{\mathbf{M}\to+\infty} \sum_{\mathbf{m}\leq\mathbf{M}} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{m} \leq \mathbf{M}$ означает $m_j \leq M_j$, $j = 1, ..., d$, а $\mathbf{M} = (M_1, ..., M_d) \to +\infty$ означает $\min_j M_j \to +\infty$.

В работах [11] и [13] для ряда (1.1) по классической системе Франклина введены обозначения

$$\sigma_\nu(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}: m_i \le 2^\nu} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \quad \sigma^*(\mathbf{x}) = \sup_\nu |\sigma_\nu(\mathbf{x})|,$$

где $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_d)$, и доказана следующая тоерема.

Теорема 1.2. *Для того, чтобы ряд* (1.1) *был бы рядом Фурье-Франклина некоторой функции* $f \in L([0;1]^d)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись бы следующие условия*

(1) *суммы* $\sigma_\nu(x)$ *по мере сходились бы к* f;
(2) $\liminf_{\lambda \to +\infty} \left(\lambda \cdot \operatorname{mes}\left\{x \in [0;1]^d : \sup_\nu |\sigma_\nu(x)| > \lambda\right\}\right) = 0.$

В настоящей работе аналогичная теорема доказывается для рядов по общей системе Франклина, порожденной парно регулярным разбиением отрезка $[0,1]$. При этом вместо частичных сумм $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ и функции $\sigma^*(\mathbf{x})$ приходится рассмотреть всю последовательность квадратичных частичных сумм и мажоранту этой последовательности.

2. Формулировка теорем и некоторые вспомогательные леммы

При исследовании свойств общей системы Франклина рассматриваются различные условия регулярности разбиения $\mathcal{T}$, введенные в работах [2]-[4] и [14]. В настоящей работе мы предполагаем, что разбиение $\mathcal{T}$ парно регулярно.

Определение 2.1. *Говорят, что допустимая последовательность* $\mathcal{T}$ *парно регулярно с параметром* $\gamma > 1$, *если для каждого* $n \ge 2$ *и* $1 \le i \le n$ *имеем*

$$\frac{1}{\gamma} \le \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_{i-1}^n}{\tau_i^n - \tau_{i-2}^n} \le \gamma,$$

где полагается $\tau_{-1}^n = \tau_0^n = 0$, $\tau_{n+1}^n = \tau_n^n = 1$.

Далее полагается, что разбиение $\mathcal{T}$ парно регулярно с параметром $\gamma > 1$ и $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ соответствующая ей общая система Франклина. При таких предположениях для ряда (1.1) введем обозначения

$$S_n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}: m_i \le n} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \tag{2.1}$$

и $S^*(\mathbf{x}) = \sup_n |S_n(\mathbf{x})|$. Верна следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть суммы* (2.1) *по мере сходятся к некоторой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_k \to \infty$ выполняется*

$$\lim_{k\to+\infty}(\lambda_k \cdot \operatorname{mes}\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : S^*(\mathbf{x}) > \lambda_k\}) = 0. \tag{2.2}$$

Тогда для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ имеет место

$$a_{\mathbf{m}} = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

где

$$[f(\mathbf{x})]_\lambda = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \textit{если } |f(\mathbf{x})| \le \lambda, \\ 0, & \textit{если } |f(\mathbf{x})| > \lambda. \end{cases}$$

Напомним, что функция f называется A-интегрируемой на $[0;1]^d$, если выполняется

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda \cdot \operatorname{mes}\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : |f(\mathbf{x})| > \lambda\}) = 0 \tag{2.3}$$

и существует

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_\lambda d\mathbf{x} =: (A) \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Поскольку для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ функция $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$ ограничена, то при выполнении (2.3) имеет место

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_\lambda f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x}) f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})]_\lambda d\mathbf{x},$$

если хоть один из этих пределов существует.

Поэтому из теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Если суммы* (2.1) *по мере сходятся к некоторой функции f и выполняется условие*

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda \cdot \operatorname{mes}\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : S^*(\mathbf{x}) > \lambda\}) = 0,$$

то функция f является A-интегрируемой и ряд (1.1) *является рядом Фурье-Франклина в смысле A-интегрирования, т.е. для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ имеем*

$$a_{\mathbf{m}} = (A) \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Отметим, что аналогичная теорема для классической системы Франклина доказана в работе [12]. Однако из теоремы 2.2 не следует результат работы [12], так как там вместо $S^*(\mathbf{x})$ рассматривается $\sigma^*(\mathbf{x})$.

Нам пригодится следующая лемма, доказанная в работе [13].

Лемма 2.1. *Пусть функция G определена на $\Delta = [\alpha_1; \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_d; \beta_d]$, $d \in \mathbb{N}$, и линейная функция по каждой переменной. Тогда если $L = \max_{t \in \Delta} |G(t)|$, то*

$$\operatorname{mes}\left\{ t \in \Delta : |G(t)| \geq \frac{L}{2^d} \right\} \geq \frac{\operatorname{mes}(\Delta)}{3^d}.$$

Введем некоторые обозначения. Положим $\delta_i^n = (\tau_{i-1}^n, \tau_{i+1}^n) \cup \{\tau_i^n\}$, когда $0 \leq i \leq n$. Функции φ_i^n определим следующим образом. Если $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$, то $\varphi_i^n(\tau_j^n) = \delta_{ij}$, $j = 0, 1, ..., n$, и φ_i^n линейна на $[\tau_{j-1}^n, \tau_j^n]$, $j = 1, ..., n$, где δ_{ij} – символ Кронекера, т.е. $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Если же $\tau_{i-1}^n = \tau_i^n$, то функции φ_{i-1}^n, φ_i^n единственные кусочно линейные функции с узлами τ_j^n, принимающие значение 0 в узлах, отличных от двойного узла $\tau_{i-1}^n = \tau_i^n$, непрерывные слева в $\tau_{i-1}^n = \tau_i^n$, $\varphi_{i-1}^n(\tau_{i-1}^n) = 1$, $\varphi_{i-1}^n(\tau_{i-1}^n + 0) = 0$, $\varphi_i^n(\tau_i^n) = 0$, $\varphi_i^n(\tau_i^n + 0) = 1$.

Для натурального n положим $\mathbb{N}_n^d = \{0, 1, ..., n\}^d$. Для вектора $\mathbf{j} = (j_1, ..., j_d) \in \mathbb{N}_n^d$ обозначим

$$\Delta_{\mathbf{j}}^n = \delta_{j_1}^n \times \cdots \times \delta_{j_d}^n, \quad \tau_{\mathbf{j}}^n = (\tau_{j_1}^n, ..., \tau_{j_d}^n)$$

и

$$\phi_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{t}) = \phi_{\mathbf{j}}^n(t_1, ..., t_d) = \varphi_{j_1}^n(t_1) \cdots \varphi_{j_k}^n(t_d) \tag{2.4}$$

Тогда

$$S_n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_n^d} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}).$$

Нетрудно заметить, что $\sum_{j=0}^n \varphi_j^n(x) = 1$, когда $x \in [0; 1]$. Следовательно,

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_n^d} \phi_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{x}) = 1, \quad \text{когда } \mathbf{x} \in [0; 1]^d, \quad \text{и } \operatorname{supp}\phi_{\mathbf{j}}^n = \overline{\Delta_{\mathbf{j}}^n}.$$

Очевидно, что система функций $\{\phi_{\mathbf{j}}^n\}_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_n^d}$ образует базис в линейном пространстве

$$\mathbf{S}_n := \left\{ \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_n^d} b_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) : b_{\mathbf{m}} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Поэтому верно следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Если $G \in S_\nu$ и $G \neq 0$, то существует $j \in \mathbb{N}_n^d$, такое что*

$$(G, \phi_j^n) := \int_{[0;1]^d} G(x) \phi_j^n(x) dx \neq 0.$$

Имеем также

$$\int_{[0;1]^d} \phi_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Delta_{\mathbf{j}}^n} \phi_{\mathbf{j}}^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \prod_{i=1}^d \int_{\delta_{j_i}^n} \varphi_{j_i}^n(x_i) dx_i = \prod_{i=1}^d \frac{\operatorname{mes}(\delta_{j_i}^n)}{2} = \frac{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^n)}{2^d}.$$

Обозначив

$$M_{\mathbf{j}}^{n}(\mathbf{x}) = \frac{2^d}{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^{n})}\phi_{\mathbf{j}}^{n}(\mathbf{x}) \tag{2.5}$$

получим другой базис в $\mathbf{S}_n$, с условием

$$\int_{[0;1]^d} M_{\mathbf{j}}^{n}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1. \tag{2.6}$$

Верна следующая лемма.

Лемма 2.3. *Для любых $M_{\mathbf{j}_0}^{n_0}(\mathbf{x})$ и $n > n_0$ существуют числа $\alpha_{\mathbf{j}}$ такие, что*

$$M_{\mathbf{j}_0}^{n_0}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_n^d} \alpha_{\mathbf{j}} M_{\mathbf{j}}^{n}(x),$$

причем

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_n^d} \alpha_{\mathbf{j}} = 1, \quad \alpha_{\mathbf{j}} \geq 0 \quad \text{и} \quad \alpha_{\mathbf{j}} = 0, \quad \text{если} \quad \Delta_{\mathbf{j}}^{n} \not\subset \Delta_{\mathbf{j}_0}^{n_0}.$$

Доказательство. Поскольку $n > n_0$, то $\varphi_{j_l^0}^{n_0} \in S_n$, где $\mathbf{j}_0 = (j_1^0, ..., j_d^0)$. Поэтому существуют β_i^l такие что

$$\varphi_{j_l^0}^{n_0}(x_l) = \sum_i \beta_i^l \varphi_i^n(x_l). \tag{2.7}$$

Из определения функций φ_i^n, нетрудно заметить, что $\beta_i^l \geq 0$ и $\beta_i^l = 0$, если $\delta_i^n \not\subset \delta_{j_l^0}^{n_0}$. Тогда, из (2.4), (2.5) и (2.7) получим

$$M_{\mathbf{j}_0}^{n_0}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_n^d} \alpha_{\mathbf{j}} M_{\mathbf{j}}^{n}(\mathbf{x}), \tag{2.8}$$

где $\alpha_{\mathbf{j}} \geq 0$ и $\alpha_{\mathbf{j}} = 0$, если $\Delta_{\mathbf{j}}^{n} \not\subset \Delta_{\mathbf{j}_0}^{n_0}$. Из (2.8) и (2.6) следует, что $\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_n^d} \alpha_{\mathbf{j}} = 1$. □

Убедимся, что теорема 2.1 получается из следующей теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть суммы* (2.1) *по мере сходятся к некоторой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_k \to \infty$ выполняется* (2.2). *Тогда для любых m_0, $\mathbf{j}^0 = (j_1^0, ..., j_d^0) \in \mathbb{N}_{m_0}^d$ и $n \geq m_0$ имеет место*

$$(S_n, M_{\mathbf{j}^0}^{m_0}) = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} M_{\mathbf{j}^0}^{m_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Действительно, если $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_d) \in \mathbb{N}_0^d$, то для $n = \max_i m_i$ имеем, что $f_{\mathbf{m}} \in \mathbf{S}_n$. Следовательно, для некоторых $\alpha_{\mathbf{j}}$ имеет место $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_n^d} \alpha_{\mathbf{j}} M_{\mathbf{j}}^{n}(\mathbf{x})$. Тогда, в силу теоремы 2.3, имеем

$$a_{\mathbf{m}} = (S_n, f_{\mathbf{m}}) = \sum_{\mathbf{j}} \alpha_{\mathbf{j}}(S_n, M_{\mathbf{j}}^{n}) = \sum_{\mathbf{j}} \alpha_{\mathbf{j}} \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} M_{\mathbf{j}}^{n}(\mathbf{x})d\mathbf{x} =$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]^d}[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}((x))(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 2.3. Сначала напомним определение максимальной функции $\mathcal{M}(g,\mathbf{x})$ интегрируемой функции g. Полагаем

$$\mathcal{M}(g,\mathbf{x}) = \sup_{Q:Q\ni\mathbf{x}} \frac{1}{\operatorname{mes}(Q)}\int_Q |g(\mathbf{x})|d\mathbf{x},$$

где верхняя грань рассматривается по всем прямоугольникам, с гранями параллельными координатным граням и с центром в точке $\mathbf{x}$. Далее, говоря прямоугольник с центром $\mathbf{x}$, будем подразумевать множество вида $\times_{l=1}^d[x_l-\eta_l, x_l+\eta_l]$. Из известной теоремы Йенссена-Марцинкевича-Зигмунда следует, что (см. [15], §2.3) если $\chi_A(\mathbf{x})$-характеристическая функция множества A, то для множества $B=\{\mathbf{x}:\mathcal{M}(\chi_A,\mathbf{x})>\zeta\}$ выполняется $\operatorname{mes}(B)\le C_d(\zeta)^{-1}\operatorname{mes}(A)$, где C_d - постоянная, зависящая только от размерности d.

Пусть m_0 - произвольное натуральное число и $\mathbf{j}^0\in\mathbb{N}^d_{m_0}$. Заметим, что если $\mathbf{i}=(i_1,...,i_d)$ и $i_{\nu_0}:=\max_\nu i_\nu > m_0$, то $(f_\mathbf{i}, M^{m_0}_{\mathbf{j}^0})=0$. Действительно, поскольку $i_{\nu_0}>m_0$, то $\int_0^1 f_{i_{\nu_0}}(x_{\nu_0})\phi^{m_0}_{j_{\nu_0}}(x_{\nu_0})dx_{\nu_0}=0$, и поэтому

$$(f_\mathbf{i}, M^{m_0}_{\mathbf{j}^0}) = \frac{2^d}{\operatorname{mes}(\Delta^{m_0}_{\mathbf{j}^0})}\prod_{\nu=0}^d (f_\nu, \phi^{m_0}_{j_\nu}) = 0.$$

Следовательно, для любого $n\ge m_0$ имеем $(S_n, M^{m_0}_{\mathbf{j}^0}) = (S_{m_0}, M^{m_0}_{\mathbf{j}^0})$. Поэтому, достаточно доказать, что

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\int([f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x}))M^{m_0}_{\mathbf{j}^0}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)=0. \tag{3.1}$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ найдется такое k_0, что для всех $k\ge k_0$ выполнятся

$$C_d\cdot\lambda_k\cdot\operatorname{mes}(E_k)(12\gamma^2)^d<\varepsilon \tag{3.2}$$

и

$$\operatorname{mes}(E_k) < \frac{(12\gamma^3)^{-d}}{C_d}\operatorname{mes}(\Delta^{m_0}_{\mathbf{j}^0}), \tag{3.3}$$

где

$$E_k=\{\mathbf{x}\in[0,1]^d : S^*(\mathbf{x})>\lambda_k\}.$$

Обозначим

$$B_k=\{\mathbf{x}\in[0,1]^d : \mathcal{M}(\chi_{E_k},\mathbf{x})>(12\gamma^2)^{-d}\}. \tag{3.4}$$

Тогда

(3.5) $$\mathrm{mes}(B_k) \le C_d(12\gamma^2)^d \cdot \mathrm{mes}(E_k).$$

Лемма 3.1. *Если* $\Delta_{\mathbf{j}}^n \not\subset B_k$, *то* $|S_n(\mathbf{x})| < 2^d\lambda_k$, *когда* $\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{j}}^n$.

Доказательство. Допустим обратное, что для некоторого $\mathbf{x}^0 \in \Delta_{\mathbf{j}}^n$ имеет место $|S_n(\mathbf{x}^0)| \ge 2^d\lambda_k$. Поскольку функция $S_n(\mathbf{x})$ линейная по каждой переменной x_l, $l = 1, ..., d$, на $\times_{l=1}^d[\tau_{\nu_l}^n, \tau_{\nu_l+1}^n]$, где ν_l принимают значения $j_l - 1$ и j_l, для $l = 1, ..., d$, то для некоторого $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \cdots, i_d)$ имеем $\sup\limits_{\mathbf{x}\in\Delta_{\mathbf{j}}^n} |S_n(\mathbf{x})| = L_{\mathbf{i}} \ge 2^d\lambda_k$, где $L_{\mathbf{i}} = \lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\tau_{\mathbf{i}}^n \\ \mathbf{x}\subset\Delta_{\mathbf{j}}^n}} |S_n(\mathbf{x})|$, а $\tau_{\mathbf{i}}^n \in \overline{\Delta_{\mathbf{j}}^n}$.

В силу леммы 2.1, имеем

(3.6) $$\mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{i}}^n : |S_n(\mathbf{x})| > \lambda_k\} \ge \frac{\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{i}}^n)}{3^d}.$$

Поскольку $\mathcal{T}$ парно регулярно с параметром γ, то для любой точки $\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{j}}^n$ прямоугольник

$$Q = \times_{l=1}^d[x_l - (\gamma+1)(\tau_{i_l+1}^n - \tau_{i_l-1}^n), x_l + (\gamma+1)(\tau_{i_l+1}^n - \tau_{i_l-1}^n)]$$

содержит $\Delta_{\mathbf{i}}^n$. Очевидно, что $\mathrm{mes}(Q) = 2^d(\gamma+1)^d\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{i}}^n)$. Поэтому из (3.6) следует

$$\mathcal{M}(\chi_{E_k}, \mathbf{x}) \ge \frac{1}{2^d(\gamma+1)^d\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{i}}^n)} \cdot \frac{\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{i}}^n)}{3^d} \ge (12\gamma)^{-d}, \quad \mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{j}}^n.$$

Следовательно, $\Delta_{\mathbf{j}}^n \subset B_k$. □

Фиксируем некоторое k, для которого выполняются (3.2), (3.3). Пусть m_1 наименьшее натуральное число со свойством

(3.7) $$\{\mathbf{i} : \tau_{\mathbf{i}}^{m_1} \in \Delta_{\mathbf{j}_0}^{m_0} \text{ и } \Delta_{\mathbf{i}}^{m_1} \subset B_k\} \ne \emptyset.$$

Заметим, что $m_1 > m_0$. Действительно, если бы выполнилось (3.7) для некоторого $m_1 \le m_0$, то выполнилось бы

$$\mathrm{mes}(B_k) \ge \mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{i}}^{m_1}) \ge \frac{1}{\gamma^d}\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{j}_0}^{m_0}).$$

Но, из (3.3), (3.5) имеем, что $\mathrm{mes}(B_k) < \gamma^{-d}\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{j}_0}^{m_0})$. Полученное противоречие доказывает, что $m_1 > m_0$. Обозначим

$$\mathcal{I}_{m_1} = \{\mathbf{i} : \tau_{\mathbf{i}}^{m_1} \in \Delta_{\mathbf{j}_0}^{m_0}\}, \quad \mathcal{J}_{m_1} = \{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{m_1} : \ \Delta_{\mathbf{i}}^{m_1} \subset B_k\}, \quad \mathcal{K}_{m_1} = \mathcal{I}_{m_1} \backslash \mathcal{J}_{m_1}.$$

Очевидно, что $\mathcal{J}_{m_1} \bigcap \mathcal{K}_{m_1} = \emptyset$ и $\mathcal{J}_{m_1} \bigcup \mathcal{K}_{m_1} = \{\mathrm{i} : \tau_{\mathrm{i}}^{m_1} \in \Delta_{\mathrm{j}^0}^{m_0}\}$. Поэтому, применяя лемму 2.3, найдем представление

$$M_{\mathrm{j}^0}^{m_0} = \sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{J}_{m_1}} \alpha_{\mathrm{i}}^{(m_1)} M_{\mathrm{i}}^{m_1} + \sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{K}_{m_1}} \beta_{\mathrm{i}}^{(m_1)} M_{\mathrm{i}}^{m_1}, \tag{3.8}$$

где

$$\alpha_{\mathrm{i}}^{(m_1)} \geq 0, \quad \beta_{\mathrm{i}}^{(m_1)} \geq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{J}_{m_1}} \alpha_{\mathrm{i}}^{(m_1)} + \sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{K}_{m_1}} \beta_{\mathrm{i}}^{(m_1)} = 1.$$

Применяя лемму 2.3, для каждой функции $M_{\mathrm{i}}^{m_1}$, $\mathrm{i} \in \mathcal{K}_{m_1}$, найдем представление

$$M_{\mathrm{i}}^{m_1} = \sum_{\mathrm{j}: \Delta_{\mathrm{j}}^{m_1+1} \subset \Delta_{\mathrm{i}}^{m_1}} \alpha_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}} M_{\mathrm{j}}^{m_1+1}, \quad \alpha_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}} \geq 0. \tag{3.9}$$

Отметим, что для многих i в сумме (3.9) только один коэффициент $\alpha_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}$ отличен от нуля и равен единице. Обозначим

$$\mathcal{I}_{m_1+1} = \left\{\mathrm{i} : \tau_{\mathrm{i}}^{m_1+1} \in \cup_{\mathrm{j} \in \mathcal{K}_{m_1}} \Delta_{\mathrm{j}}^{m_1}\right\}, \quad \mathcal{J}_{m_1+1} := \left\{\mathrm{j} \in \mathcal{I}_{m_1+1} : \Delta_{\mathrm{j}}^{m_1+1} \subset B_k\right\},$$

$$\mathcal{K}_{m_1+1} = \mathcal{I}_{m_1+1} \backslash \mathcal{J}_{m_1+1}.$$

Подставляя выражения для $M_{\mathrm{i}}^{m_1}$, $\mathrm{i} \in \mathcal{K}_{m_1}$, из (3.9) во вторую сумму из (3.8), и сгруппировав подобные члены, получаем

$$\sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{K}_{m_1}} \beta_{\mathrm{i}}^{(m_1)} M_{\mathrm{i}}^{m_1} = \sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{J}_{m_1+1}} \alpha_{\mathrm{i}}^{(m_1+1)} M_{\mathrm{i}}^{m_1+1} + \sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{K}_{m_1+1}} \beta_{\mathrm{i}}^{(m_1+1)} M_{\mathrm{i}}^{m_1+1}. \tag{3.10}$$

Из (3.8) и (3.10) имеем

$$M_{\mathrm{j}^0}^{m_0} = \sum_{l=m_1}^{m_1+1} \sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{J}_l} \alpha_{\mathrm{i}}^{(l)} M_{\mathrm{i}}^l + \sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{K}_{m_1+1}} \beta_{\mathrm{i}}^{(m_1+1)} M_{\mathrm{i}}^{m_1+1}, \tag{3.11}$$

где $\alpha_{\mathrm{i}}^{(l)} \geq 0$, $l = m_1, m_1+1$, $\beta_{\mathrm{i}}^{(m_1+1)} \geq 0$. По индукции, для всех $n > m_1$ определим

$$\mathcal{I}_n = \left\{\mathrm{i} : \tau_{\mathrm{i}}^n \in \cup_{\mathrm{j} \in \mathcal{K}_{n-1}} \Delta_{\mathrm{j}}^{n-1}\right\}, \quad \mathcal{J}_n = \{\mathrm{j} \in \mathcal{I}_n : \Delta_{\mathrm{j}}^n \subset B_k\} \quad \mathcal{K}_n = \mathcal{I}_n \backslash \mathcal{J}_n. \tag{3.12}$$

Аналогично (3.11), получим

$$M_{\mathrm{j}^0}^{m_0} = \sum_{l=m_1}^{n} \sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{J}_l} \alpha_{\mathrm{i}}^{(l)} M_{\mathrm{i}}^l + \sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{K}_n} \beta_{\mathrm{i}}^{(n)} M_{\mathrm{i}}^n,$$

где $\alpha_{\mathrm{i}}^{(l)} \geq 0$, $l = m_1, ..., n$, $\beta_{\mathrm{i}}^{(n)} \geq 0$. Из леммы 3.1 и (3.12) следует, что

$$|S_n(\mathrm{x})| \leq 2^d \lambda_k, \quad \text{когда} \quad \mathrm{x} \in \Delta_{\mathrm{j}}^n, \quad \mathrm{j} \in \mathcal{K}_n.$$

Очевидно, что для любого n имеет место (см. (3.4))

$$D_n = \bigcup_{l=m_1}^{n} \bigcup_{\mathrm{i} \in \mathcal{J}_l} \Delta_{\mathrm{i}}^l \subset B_k.$$

С учетом (3.2) и (3.5), получим

$$\lambda_k \cdot \mathrm{mes}(D_n) < \varepsilon. \tag{3.13}$$

Докажем, что для любого l, $m_1 \le l \le n$, выполняется

$$|S_l(\mathbf{x})| \le 2^d \lambda_k, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in \Delta^l_{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{i} \in \mathcal{J}_l. \tag{3.14}$$

Допустим обратное. Для некоторых $l \in \{m_1, ..., n\}$, $\mathbf{i} \in \mathcal{J}_l$ и $\mathbf{x} \in \Delta^l_{\mathbf{i}}$ выполняется $|S_l(\mathbf{x})| > 2^d \lambda_k$. А из этого, как мы заметили при доказательстве леммы 3.1, следует, что существует $\tau^l_{\mathbf{j}} \in \overline{\Delta^l_{\mathbf{i}}}$, такое что

$$\mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta^l_{\mathbf{j}} : |S_l(\mathbf{x})| > \lambda_k\} \ge \frac{\mathrm{mes}(\Delta^l_{\mathbf{j}})}{3^d}.$$

Следовательно

$$\mathrm{mes}(\Delta^l_{\mathbf{j}} \bigcap E_k) \ge \frac{\mathrm{mes}(\Delta^l_{\mathbf{j}})}{3^d}. \tag{3.15}$$

Пусть $\mathbf{m}$ такое, что $\Delta^l_{\mathbf{i}} \subset \Delta^{l-1}_{\mathbf{m}}$ и $\mathbf{y}$ любая точка из $\Delta^{l-1}_{\mathbf{m}}$. Из регулярности по парам разбиения $\mathcal{T}$ и $\tau^l_{\mathbf{j}} \in \overline{\Delta^l_{\mathbf{i}}}$ следует, что куб $Q = [\epsilon_1, \eta_1] \times ... \times [\epsilon_d, \eta_d]$ с центром $\mathbf{y}$ и ребрами с длинами $\eta_m - \epsilon_m = (\gamma(\gamma+1)+1)(\tau^l_{j_m+1} - \tau^l_{j_m-1}) < 3\gamma^2(\tau^l_{j_m+1} - \tau^l_{j_m-1})$ содержит в себе $\Delta^{l-1}_{\mathbf{m}}$. Ясно, что

$$\mathrm{mes}(Q) < (3\gamma^2)^d \mathrm{mes}(\Delta^l_{\mathbf{j}}). \tag{3.16}$$

Из (3.15), (3.16) и $\mathbf{y} \in \Delta^l_{\mathbf{i}} \subset Q$ следует, что $\mathcal{M}(\chi_{E_k}, \mathbf{y}) > (9\gamma^2)^{-d}$.

По определению множества B_k (см. (3.4)), имеем $\mathbf{y} \in B_k$. Следовательно, $\Delta^{l-1}_{\mathbf{m}} \subset B_k$. Следовательно $\mathbf{m} \notin \mathcal{K}_{l-1}$. Поэтому $\mathbf{i} \notin \mathcal{J}_l$. Полученное противоречие доказывает (3.14).

Обозначим $H_n = \bigcup_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_n} \Delta^n_{\mathbf{i}}$. Тогда из (3.12) следует, что

$$|S_n(\mathbf{x})| \le 2^d \cdot \lambda_k, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in H_n. \tag{3.17}$$

Обозначим

$$\varrho^{(n)}_1(\mathbf{x}) = \sum_{l=m_1}^{n} \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}_l} \alpha^{(l)}_{\mathbf{i}} M^l_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \varrho^{(n)}_2(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_n} \beta^{(n)}_{\mathbf{i}} M^n_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}).$$

Поскольку $\alpha^{(l)}_{\mathbf{i}} \ge 0$, $\beta^{(n)}_{\mathbf{i}} \ge 0$ и $M^{m_0}_{\mathbf{j}^0}(\mathbf{x}) = \varrho^{(n)}_1(\mathbf{x}) + \varrho^{(n)}_2(\mathbf{x})$, то получаем

$$0 \le \varrho^{(n)}_1(\mathbf{x}) \le M^{m_0}_{\mathbf{j}^0}(\mathbf{x}) \le \frac{2^d}{\mathrm{mes}(\Delta^{m_0}_{\mathbf{j}^0})} =: C_{m_0 \mathbf{j}^0} \tag{3.18}$$

и

$$0 \le \varrho^{(n)}_2(\mathbf{x}) \le M^{m_0}_{\mathbf{j}^0}(\mathbf{x}) \le C_{m_0 \mathbf{j}^0}. \tag{3.19}$$

Перейдем к оценке

$$\omega_n := \int |[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})| \, M_{\mathbf{j}^0}^{m_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x} =: \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \xi_3^{(n)}, \tag{3.20}$$

где

$$\xi_1^{(n)} = \int_{D_n} |[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})|\varrho_1^{(n)}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{3.21}$$

$$\xi_2^{(n)} = \int_{H_n \bigcap E_k} |[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})|\varrho_2^{(n)}(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{3.22}$$

$$\xi_3^{(n)} = \int_{H_n \setminus E_k} |[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})|\varrho_2^{(n)}(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{3.23}$$

Из (3.14) и (3.17) – (3.19) следует, что подынтегральные функции в (3.21) - (3.23) ограничены числом $C_{m_0\mathbf{j}^0}(2^d+1)\lambda_k$. Поэтому, из (3.13) и (3.2) следуют, что

$$\xi_1^{(n)} < \varepsilon \cdot C_{m_0\mathbf{j}^0,d} \quad \text{и} \quad \xi_2^{(n)} < \varepsilon \cdot C_{m_0\mathbf{j}^0,d}. \tag{3.24}$$

Учитывая, что $f(\mathbf{x}) = [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}$ для $\mathbf{x} \notin E_k$ и последовательность $S_n(\mathbf{x})$ по мере сходится к $f(\mathbf{x})$, получим, что последовательность $|[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})|\chi_{H_n\setminus E_k}(\mathbf{x})\varrho_2^{(n)}(\mathbf{x})$ по мере сходится к нулю и ограничена числом $C_{m_0\mathbf{j}^0}(2^d+1)\lambda_k$. Следовательно

$$\lim_{n\to\infty} \xi_3^{(n)} = 0. \tag{3.25}$$

Из (3.20) – (3.25) следует, что при достаточно больших n имеем $\omega_n < 3\varepsilon \cdot C_{m_0\mathbf{j}^0,d}$. Отсюда следует (3.1). Теорема 2.3 доказана.

Abstract. The paper considers the general Franklin system corresponding to a strongly regular by couples partition of the segment [0; 1]. For series by this system, we prove uniqueness theorems and obtain restoration formulas for coefficients, provided that the series converge in measure and satisfy some necessary condition.

Список литературы

[1] Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions", Funct. Approx. Comment. Math., **25**, 129 – 143 (1997).
[2] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), **374**, 1 – 59 (1998).
[3] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin system in $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$", Studia Math., **164**, no. 2, 161 – 204 (2004).
[4] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "General Franklin system as bases in $H^1[0,1]$", Studia Math., **167**, no. 3, 259 – 292 (2005).
[5] Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Annalen, **100**, 522 – 529 (1928).
[6] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., **23**, 141 – 157 (1963).
[7] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", Studia Math., **27**, 289 – 323 (1966).

[8] Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, **46**, no. 2, 289 – 323 (1989).
[9] М. П. Погосян, "О единственности рядов по общей системе Франклина", Изв. НАН Армении, сер. матем., **35**, no. 4, 75 – 81 (2000).
[10] Г. Г. Геворкян, "Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, **59**, no. 4, 521 – 545 (1996).
[11] Г. Г. Геворкян, "Теоремы единственности для рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, **98**, no. 5, 786 – 789 (2015).
[12] Г. Г. Геворкян, М. П. Погосян, "О восстановлении коэффициентов ряда Франклина с "хорошей" мажорантой частичных сумм", Изв. НАН Армении, сер. матем., **52**, no. 5, 25 – 35 (2017).
[13] Г. Г. Геворкян, "Теорема единственности для кратных рядов Франклина", Мат. Заметки, **101**, no. 2, 199 – 210 (2017).
[14] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On the trigonometric conjugate to the general Franklin system", Studia Math., **193**, no. 3, 203 – 239 (2009).
[15] М. Гусман, Дифференцирование интегралов в R^n, М., Изд-во Мир (1973).

Поступила 6 декабря 2017