Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 72 – 83.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПО МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

А. ПОГОСЯН, Т. БАКАРЯН

Институт Математики НАН Армении[1]
E-mails: *arnak@instmath.sci.am*, *tigran@instmath.sci.am*

Аннотация. Рассматривается интерполяция по модифицированной тригонометрической системе и изучается свойства при разных формах сходимости. Доказывается более хорошая сходимость таких интерполяций, для нечетных функций, по сравнению с классической интерполяцией.

MSC2010 number: 65D05; 42A15.

Ключевые слова: модифицированная тригонометрическая система, интерполяция, улучшение сходимости.

1. Введение

Рассматривается интерполяция по модифицорованной тригонометрической системе

$$\mathcal{H} = \{\cos \pi nx : n \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\sin \pi(n - \tfrac{1}{2})x : n \in \mathbb{N}\}, \tag{1.1}$$

который был предложен Крейном [2] без рассмотрения его свойств. Множество $\mathcal{H}$ является ортогональным базисом в $L_2[-1, 1]$, так как состоит из собственных функции оператора Штурма-Лиувилля $\mathcal{L} = -d^2/dx^2$ с граничными условиями $u'(1) = u'(-1) = 0$. Ортогональность и плотность в $L_2[-1, 1]$ следует из классической спектральной теории ([1]).

Разложения по модифицированной тригонометрической системе исследованы в ряде работ [3] - [12]. Обозначим через $\mathcal{M}_N(f, x)$ отрезок ряда по модифицированной системе Фурье

$$\mathcal{M}_N(f, x) = \frac{1}{2} f_0^c + \sum_{n=1}^{N} [f_n^c \cos \pi nx + f_n^s \sin \pi(n - \tfrac{1}{2})x], \tag{1.2}$$

где

$$f_n^c = \int_{-1}^{1} f(x) \cos \pi nx dx, \; f_n^s = \int_{-1}^{1} f(x) \sin \pi(n - \tfrac{1}{2})x dx. \tag{1.3}$$

---

[1]Исследования второго автора профинансированы грантом SCS 16A-1a40.

Легко проверить, что модифицированную тригонометрическую систему можно записать в комплексной форме $\mathcal{H} = \{\varphi_n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}$, где

$$(1.4) \qquad \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \varphi_n(x) = \frac{1}{2}\left((-1)^n e^{\frac{i\pi n x}{2}} + e^{-\frac{i\pi n x}{2}}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда, отрезок ряда по модифицированной системе Фурье можно написать более компактно

$$(1.5) \qquad \mathcal{M}_N(f, x) = \sum_{n=0}^{2N} f_n^m \varphi_n(x),$$

где

$$(1.6) \qquad f_n^m = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{\varphi_n(x)}dx.$$

Из (1.2) и (1.3) следует, что для четных функций, разложения по модифицированной системе совпадают с разложениями по классической системе

$$(1.7) \qquad \mathcal{H}_{class} = \{\cos \pi n x : n \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\sin \pi n x : n \in \mathbb{N}\}, \ x \in [-1, 1].$$

Далее, модифицированная система можно получить из другого классического базиса $\mathcal{H}^*$ on $[0, 1]$

$$(1.8) \qquad \mathcal{H}^* = \{\cos \pi n x : n \in \mathbb{Z}_+\}, \ x \in [0, 1]$$

посредством замены переменной.

Разложения по модифицированной системе имеют лучшую сходимость для нечетных функций по сравнению с классической интерполяцией, так как коэффициенты f_n^s стремятся к нулю быстрее $(O(n^{-2}), n \to \infty)$, чем классические коэффициенты соответствующие функциям $\sin \pi n x$.

Теорема 1.1. [6, 7] *Пусть $f \in C^{2q+2}(-1, 1)$, $f^{(2q+2)} \in BV[-1, 1]$, $q \geq 0$ и для f выполнены условия для первых q нечетных производных $f^{(2r+1)}(\pm 1) = 0$, $r = 0, \ldots, q-1$. Тогда, если $|x| < 1$,*

$$f(x) - \mathcal{M}_N(f, x) = O(N^{-2q-2}), \ N \to \infty,$$

или,

$$f(\pm 1) - \mathcal{M}_N(f, \pm 1) = O(N^{-2q-1}), \ N \to \infty.$$

Теорема 1.2. [6, 11] *Пусть $f \in C^{2q+1}(-1, 1)$, $f^{(2q+1)} \in BV[-1, 1]$, $q \geq 0$ и для f выполнены условия для первых q нечетных производных $f^{(2r+1)}(\pm 1) = 0$, $r = 0, \ldots, q-1$. Тогда,*

$$||f(x) - \mathcal{M}_N(f, x)||_{L_2} = O(N^{-2q-\frac{3}{2}}), \ N \to \infty.$$

Мы видим, что условия для производных

$$f^{(2r+1)}(\pm 1) = 0,\ r = 0, \ldots, q-1 \tag{1.9}$$

являются ключевыми для сходимости разложений по модифицированной системе. Если для функции не выполнены условия для производных, то применение хорошо известного метода полиномиальной коррекции (см. [13 – 16]) поправит условия производных на концах отрезка $x = \pm 1$. Точнее, пусть $f \in C^{2q-1}[-1,1]$, и обозначим,

$$B_{2k+1}(f) = \left(f^{(2k+1)}(1) + f^{(2k+1)}(-1)\right)(-1)^k, \quad k = 0, \ldots, q-1, \tag{1.10}$$

$$A_{2k+1}(f) = \left(f^{(2k+1)}(1) - f^{(2k+1)}(-1)\right)(-1)^k, \quad k = 0, \ldots, q-1. \tag{1.11}$$

Пусть четные полиномы $P_k(x)$ и нечетные $Q_k(x)$, $k = 0, \ldots, q-1$ удовлетворяют следующим условиям (см. [16])

$$A_{2k+1}(P_j(x)) = \delta_{k,j},\ B_{2k+1}(Q_j(x)) = \delta_{k,j}, \quad 0 \le k, j \le q-1. \tag{1.12}$$

Несколько первых полиномов имеют следующий вид

$$P_0(x) = \frac{1}{4}x^2, \quad P_1(x) = \frac{1}{48}x^2(x^2-2), \quad Q_0(x) = \frac{1}{2}x, \quad Q_1(x) = \frac{1}{12}x(x^2-3).$$

Пусть F определен следующим образом

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{q-1} A_{2k+1}(f)P_k(x) - \sum_{k=0}^{q-1} B_{2k+1}(f)Q_k(x). \tag{1.13}$$

Тогда, для функции F выполнены условия для первых q нечетных производных. Рассмотрим аппроксимацию

$$\mathcal{M}_{N,q}(f,x) = \mathcal{M}_N(F,x) + \sum_{k=0}^{q-1} A_{2k+1}(f)P_k(x) + \sum_{k=0}^{q-1} B_{2k+1}(f)Q_k(x). \tag{1.14}$$

Тогда, Теоремы 1.1 и 1.2 справедливы для интерполяции $\mathcal{M}_{N,q}(f,x)$ без условия для первых q нечетных производных. Если точные значения производных неизвестны, то их аппроксимация возможна решением системы линейных уравнений (см. [16]). В этой работе, рассматривается интерполяция по модифицированной тригонометрической системе и изучается сходимость в разных формах. Получены точные константы для асимптотических ошибок в L_2-норме, при точечной сходимости при $|x| < 1$ и на концах отрезка $x = \pm 1$. Сравнение с классической интерполяцией показывает лучшую сходимость модифицированных интерполяций для нечетных функций во всех случаях.

2. Модифицированная интерполяция

Собственные функции (1.4) имеют важные свойства дискретной ортогональности. Пусть $x_k = \frac{2k}{2N+1}$, $|k| \le N$ равномерная сетка на отрезке $[-1,1]$. Легко проверить, что

$$\frac{2}{2N+1}\sum_{n=0}^{2N}\varphi_n(x_k)\overline{\varphi_n}(x_s) = \delta_{k,s},\ |k|,|s| \le N, \tag{2.1}$$

и

$$\frac{2}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\varphi_n(x_k)\overline{\varphi_m}(x_k) = \delta_{n,m},\ 0 \le m,n \le 2N. \tag{2.2}$$

Поэтому, сумма

$$\mathcal{I}_N(f,x) = \sum_{n=0}^{2N}\check{f}_n^m\varphi_n(x), \tag{2.3}$$

где

$$\check{f}_n^m = \frac{2}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}f(x_k)\overline{\varphi_n}(x_k) \tag{2.4}$$

точная для базисных функций из $\mathcal{H}$ и интерполирует $f \in C[-1,1]$ на сетке x_k, $|k| \le N$.

Назовем $\mathcal{I}_N(f,x)$ интерполяцией по модифицированной системе, или просто как модифицированная интерполяция. Если функция f вещественнозначная, то модифицированную интерполяцию можно переписать в следующей форме

$$\mathcal{I}_N(f,x) = \frac{1}{2}\check{f}_0^c + \sum_{n=1}^{N}\check{f}_n^c\cos\pi nx + \sum_{n=1}^{N}\check{f}_n^s\sin\pi(n-\tfrac{1}{2})x, \tag{2.5}$$

где

$$\check{f}_0^c = \frac{2}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}f(x_k),\quad \check{f}_n^c = \frac{2}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}f(x_k)\cos\pi nx_k, \tag{2.6}$$

и

$$\check{f}_n^s = \frac{2}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}f(x_k)\sin\pi(n-\tfrac{1}{2})x_k. \tag{2.7}$$

Эта форма более удобна, когда функция f является четной или нечетной на отрезке $[-1,1]$. Вспомним, что модифицированная интерполяция для четных функций совпадает с классической интерполяцией. Поэтому свойства модифицированной интерполяции достаточно изучить для нечетных функций на $[-1,1]$.

Далее, метод полиномиальной коррекции можно применить также для модифицированной интерполяции. Тогда,

$$\mathfrak{I}_{N,q}(f,x) = \sum_{n=0}^{N} \check{F}_n^c \cos \pi n x + \sum_{n=1}^{N} \check{F}_n^s \sin \pi (n-\tfrac{1}{2})x$$
$$+ \sum_{k=0}^{q-1} A_{2k+1}(f) P_k(x) + \sum_{k=0}^{q-1} B_{2k+1}(f) Q_k(x),$$

где

$$\check{F}_n^c = \check{f}_n^c - \sum_{k=0}^{q-1} A_{2k+1}(f) \check{P}_n^c(k), \quad \check{F}_n^s = \check{f}_n^s - \sum_{k=0}^{q-1} B_{2k+1}(f) \check{Q}_n^s(k).$$

Здесь, $\check{P}_n^c(k)$ и $\check{Q}_n^s(k)$ - модифицированные дискретные коэффициенты полиномов $P_k(x)$ и $Q_k(x)$, соответственно. Пусть

$$R_{N,q}(f,x) = f(x) - \mathfrak{I}_{N,q}(f,x). \tag{2.8}$$

Основная задача этой работы - изучение свойств $R_{N,q}(f,x)$ в разных формах сходимости. Раздел 3 рассматривает сходимость в L_2-норме и Раздел 4 изучает точечную сходимость на $[-1,1]$. В каждом случае, результаты для модифицированной интерполяции сравниваются с соответствующими результатами для классической интерполяции

$$\mathfrak{I}_N^{classic}(f,x) = \sum_{n=-N}^{N} \check{f}_n e^{i\pi n x}, \tag{2.9}$$

где $\check{f}_n = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(x_k) e^{-i\pi n x_k}$.

3. Сходимость в L_2-норме

Здесь, рассматривается сходимость модифицированной интерполяции в L_2-норме. Следующая лемма выявляет связь между модифицированными дискретными и непрерывными коэффициентами.

Лемма 3.1. *Пусть $f \in C^2[-1,1]$ и $f'' \in BV[-1,1]$. Тогда, имеет место следующая формула*

$$\check{f}_n^m = f_n^m + \sum_{j=1}^{\infty} f_{n+(2N+1)2j}^m + (-1)^n \sum_{j=1}^{\infty} f_{-n+(2N+1)2j}^m, \quad n = 1, \ldots 2N. \tag{3.1}$$

Доказательство. Согласно точечной сходимости разложений по модифицированной системе (Теорема 1.1 при $q = 0$), имеем

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^m \varphi_j(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{4N+1} f_{j+2r(2N+1)}^m \varphi_{j+2r(2N+1)}(x). \tag{3.2}$$

Согласно $\varphi_{j+2r(2N+1)}(x_k) = \varphi_j(x_k)$, получим

$$\check{f}_n^m = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{4N+1} f_{j+2r(2N+1)}^m \frac{2}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \varphi_j(x_k)\overline{\varphi_n}(x_k). \tag{3.3}$$

Легко проверить, что для $j = 2N+1, \ldots, 4N+1$

$$\frac{2}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \varphi_j(x_k)\overline{\varphi_n}(x_k) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ (-1)^n \delta_{4N+2-n,j}, & 1 \le n \le 2N \end{cases} \tag{3.4}$$

Эта оценка, вместе с (2.2) и (3.3), завершает доказательство. □

Мы можем переписать Лемму 3.1 для коэффициентов $\check{f}_n^s$ в упрощенной форме.

Замечание 3.1. *Пусть $f \in C^2[-1,1]$ и $f'' \in BV[-1,1]$. Тогда, имеет место следующее тождество*

$$\check{f}_n^s = f_n^s + \sum_{j \neq 0} f_{n+(2N+1)j}^s, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{3.5}$$

Следующая теорема описывает сходимость в L_2-норме.

Теорема 3.1. *Пусть f нечетная функция на отрезке $[-1,1]$. Пусть $f \in C^{2q+1}[-1,1]$ и $f^{(2q+1)} \in BV[-1,1]$, $q \ge 0$. Тогда, имеет место следующая оценка*

$$\lim_{N\to\infty} N^{2q+\frac{3}{2}} ||R_{N,q}||_{L_2} = |B_{2q+1}(f)| \frac{\sqrt{a(q)}}{\pi^{2q+2}}, \tag{3.6}$$

где

$$a(q) = \frac{1}{4q+3} + \int_0^1 \left(\sum_{s \neq 0} \frac{(-1)^s}{(2s+x)^{2q+2}} \right)^2 dx. \tag{3.7}$$

Доказательство. Перепишем $R_{N,q}(f,x)$ для нечетных f

$$R_{N,q}(f,x) = \sum_{n=1}^{N} (F_n^s - \check{F}_n^s) \sin \pi(n - \tfrac{1}{2})x + \sum_{n=N+1}^{\infty} F_n^s \sin \pi(n - \tfrac{1}{2})x. \tag{3.8}$$

Согласно ортогональности функций системы $\mathcal{H}$, имеем

$$||R_{N,q}||_{L_2}^2 = \sum_{n=1}^{N} \left(F_n^s - \check{F}_n^s\right)^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(F_n^s\right)^2. \tag{3.9}$$

Так как для функции F выполнены условия для первых q нечетных производных (1.9), получим следующую асимптотическую оценку для модифицированных коэффициентов Фурье посредством интегририрования по частям соотсетствующих интегралов

$$F_n^s = B_{2q+1}(f)\frac{(-1)^{n+1}}{(\pi(n-\frac{1}{2}))^{2q+2}} + o(n^{-2q-2}). \tag{3.10}$$

Тогда, применение Замечания 3.1 приводит к следующей оценке для $n = 1, \ldots, N$

$$\tilde{F}_n^s - F_n^s = B_{2q+1}(f)\frac{(-1)^{n+1}}{(\pi N)^{2q+2}}\sum_{j\neq 0}\frac{(-1)^j}{(2j+\frac{n}{N})^{2q+2}} + o(N^{-2q-2}). \tag{3.11}$$

Оценки (3.10) и (3.11), вместе с (3.9), завершают доказательство. □

Когда $q = 0$, Теорема 3.1 показывает скорость сходимости порядка $O(N^{-\frac{3}{2}})$ в L_2-норме. Классическая интерполяция имеет порядок сходимости $O(N^{-\frac{1}{2}})$ в L_2-норме для нечетных функций на $[-1, 1]$ (см. [17]). Тогда, улучшение имеет порядок $O(N)$.

4. Точечная сходимость

В этом разделе рассматривается точечная сходимость модифицированных интерполяций на $|x| < 1$ и на концах отрезка $x = \pm 1$. Сначала докажем несколько вспомогательных лемм. Мы часто будем пользоваться свойствами следующих чисел

$$\omega_{p,m} = \sum_{s=0}^{p}\binom{p}{s}(-1)^s s^m, \tag{4.1}$$

которые связаны с числами Стирлинга второго рода ([18]). В [15] показано, что

$$\omega_{p,m} = 0,\ 0 \le m < p,\ \omega_{p,p} = (-1)^p p!,\ \omega_{p,p+1} = (-1)^p\frac{p(p+1)!}{2}. \tag{4.2}$$

Пусть $c = \{c_n\}$ последовательность комплексных чисел. Через $\Delta_n^p(c)$ обозначим следующие конечные разности

$$\Delta_n^p(c) = \sum_{s=0}^{2p}\binom{2p}{s}c_{n+p-s}, \quad p \ge 0. \tag{4.3}$$

Пусть

$$Q_n(m) = \frac{(-1)^{n+1}}{(\pi(n-\frac{1}{2}))^{2m+2}}, \quad Q(m) = \{Q_n(m)\}_{n=1}^{\infty}. \tag{4.4}$$

Из (1.13) и асимптотического разложения (3.10) следует, что числа $Q_n(m)$ являются модифицированными коэффициентами Фурье полиномов $Q_m(x)$. Далее, обозначим $\check{Q}(m) = \{\check{Q}_n^s(m)\}_{n=1}^N$, где $\check{Q}_n^s(m)$ дискретные модифицированные коэффициенты функции $Q_m(x)$.

Лемма 4.1. *Для любого $p \geq 0$ и $m \geq 0$ имеет место следующая оценка*

$$(4.5)\quad \Delta_n^p(Q(m)) = \frac{(-1)^{n+p+1}(2m+2p+1)!}{(\pi(n-\frac{1}{2}))^{2m+2}(n-\frac{1}{2})^{2p}(2m+1)!} + O(n^{-2m-2p-3}),\ n \to \infty.$$

Доказательство. Согласно определению $\Delta_n^p(Q(m))$, имеем

(4.6)

$$\Delta_n^p(Q(m)) = \sum_{s=0}^{2p} \binom{2p}{s} Q_{n+p-s}(m) = \frac{(-1)^{n+p+1}}{(\pi(n-\frac{1}{2}))^{2m+2}} \sum_{s=0}^{2p} \frac{\binom{2p}{s}(-1)^k}{\left(1+\frac{p-k}{n-\frac{1}{2}}\right)^{2m+2}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+p+1}}{(\pi(n-\frac{1}{2}))^{2m+2}} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+2m+1}{2m+1} \frac{(-1)^s}{(n-\frac{1}{2})^s} \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} (-1)^j p^{s-j} \omega_{2p,j},$$

где $\omega_{2p,j}$ определены формулой (4.1). Это завершает доказательство согласно (4.2). □

Лемма 4.2. *Для любого $p \geq 0$ и $m \geq 0$ имеет место следующая оценка*

$$(4.7)\quad \Delta_n^p(\check{Q}(m) - Q(m)) = \frac{(-1)^{n+p+1}(2m+2p+1)!}{(\pi N)^{2m+2} N^{2p}(2m+1)!} \sum_{j\neq 0} \frac{(-1)^j}{(2j+\frac{n}{N})^{2m+2p+2}} + O(N^{-2m-2p-3}),\ n = 1,\dots,N,\ N \to \infty.$$

Доказательство. Согласно Замечанию 3.1, имеем

$$\Delta_n^p(\check{Q}(m) - Q(m)) = \sum_{j\neq 0} \Delta_{n+(2N+1)j}^p (Q(m))$$

$$= \frac{(-1)^{n+p+1}}{(\pi N)^{2m+2}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (-1)^k \sum_{j\neq 0} \frac{(-1)^j}{(2j+\frac{n}{N})^{2m+2}} \frac{1}{\left(1+\frac{j+p-k-\frac{1}{2}}{N(2j+\frac{n}{N})}\right)^{2m+2}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+p}}{(\pi N)^{2m+2}} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{N^t} \binom{2m+1+t}{2m+1} \times \sum_{s=0}^{t} \binom{t}{s} (-1)^s \omega_{2p,s} \sum_{j\neq 0} \frac{(-1)^j (p+j-\frac{1}{2})^{t-s}}{(2j+\frac{n}{N})^{2m+2}},$$

где $\omega_{2p,s}$ определены согласно (4.1). Это завершает доказательство теоремы согласно (4.2). □

Лемма 4.3. *Для любого $m \geq 0$ имеет место следующая оценка*

$$(4.8)\quad \Delta_N^p(\check{Q}(m)) = \frac{(-1)^{N+p}(2m+2p+2)!}{(\pi N)^{2m+2} N^{2p+1}(2m+1)!} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^j (j-\frac{1}{2})}{(2j+1)^{2m+2p+3}} + O(N^{-2m-2p-4}),\quad N \to \infty.$$

Доказательство. Согласно замечанию 3.1, имеем

$$\Delta_N^p(\dot{Q}(m)) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Delta^p_{N+(2N+1)j}(Q(m)) =$$

$$\frac{(-1)^{N+p+1}}{(\pi N)^{2m+2}} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{N^t} \binom{2m+1+t}{2m+1} \sum_{s=0}^{t} \binom{t}{s} (-1)^s \omega_{2p,s} \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^j (p+j-\frac{1}{2})^{t-s}}{(2j+1)^{2m+2}},$$

где $\omega_{2p,s}$ определены по (4.1). Это завершает доказательство согласно (4.2) и

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^{2m+2}} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots. \tag{4.9}$$

Следующая теорема демонстрирует точечную сходимость модифицированной интерполяции внутри интервала $[-1,1]$.

Теорема 4.1. *Пусть f нечетная функция на отрезке $[-1,1]$. Пусть $f \in C^{2q+3}[-1,1]$ и $f^{(2q+3)} \in BV[-1,1]$, $q \geq 0$. Тогда, имеет место следующая оценка на $|x| < 1$*

$$R_{N,q}(f,x) = B_{2q+1}(f) \frac{(-1)^N}{N^{2q+3}} \frac{\pi |E_{2q+2}|}{2^{2q+5}(2q+1)!} \frac{\sin \pi (N+\frac{1}{2})x}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}} + o(N^{-2q-3}),\ N \to \infty,$$

где E_k - числа Эйлера.

Доказательство. Пусть $f^s_{-n} = -f^s_{n+1}$, $\check{f}^s{}_{-n} = -\check{f}^s_{n+1}$, и перепишем ошибку интерполяции в более удобной форме

$$R_{N,q}(f,x) = \frac{1}{2i} \sum_{n=-N+1}^{N} F^s_n - \check{F}^s_n) e^{i\pi(n-\frac{1}{2})x} + \frac{1}{2i} \sum_{n=N+1}^{\infty} F^s_n e^{i\pi(n-\frac{1}{2})x}$$
$$+ \frac{1}{2i} \sum_{n=-\infty}^{-N} F^s_n e^{i\pi(n-\frac{1}{2})x}.$$

Далее, применяя преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} R_{N,q}(f,x) &= \frac{1}{2(1+\cos\pi x)} \left(\check{F}^s_{N+1} \sin\pi(N-\tfrac{1}{2})x - \check{F}^s_N \sin\pi(N+\tfrac{1}{2})x\right) \\ &+ \frac{1}{4(1+\cos\pi x)^2} \left(\Delta^1_{N+1}(\check{F}^s)\sin\pi(N-\tfrac{1}{2}) - \Delta^1_N(\check{F}^s)\sin\pi(N+\tfrac{1}{2})\right) \\ &+ \frac{e^{-i\frac{\pi x}{2}}}{8(1+\cos\pi x)^2} \left(\sum_{n=1}^{N} \Delta^2_n(F^s - \check{F}^s) e^{i\pi n x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta^2_n(F^s) e^{i\pi n x}\right) \\ &+ \frac{e^{i\frac{\pi x}{2}}}{8(1+\cos\pi x)^2} \left(\sum_{n=-N}^{-1} \Delta^2_n(F^s - \check{F}^s) e^{i\pi n x} + \sum_{n=-\infty}^{-N-1} \Delta^2_n(F^s) e^{i\pi n x}\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Согласно следующей асимптотической оценке

$$F_n^s = \sum_{m=q}^{q+1} B_{2m+1}(f)Q_n(m) + o(n^{-2q-4}),\ n \to \infty, \tag{4.11}$$

получим

$$\Delta_n^p(F^s) = \sum_{m=q}^{q+1} B_{2m+1}(f)\Delta_n^p(Q(m)) + o(n^{-2q-4}),\ n \to \infty.$$

Теперь, согласно лемме 4.1, имеем $\Delta_n^2(F^s) = o(n^{-2q-4})$, и бесконечные суммы в правой части (4.10) имеют порядок $O(N^{-2q-3})$. Применяя снова (4.11), напишем

$$\Delta_n^2(\check{F}^s - F^s) = \sum_{m=q}^{q+1} B_{2m+1}(f)\Delta_n^2(\check{Q}(m) - Q(m)) + o(N^{-2q-4}), \tag{4.12}$$

и согласно лемме 4.2, получим

$$\Delta_n^2(F^s - \check{F}^s) = o(N^{-2q-4}), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N. \tag{4.13}$$

Поэтому, конечные суммы в правой части (4.10) имеют порядок $o(N^{-2q-3})$.

Из леммы 4.3 следует, что

$$\Delta_N^1(\check{F}^s) = O(N^{-2q-3}),\ \Delta_{N+1}^1(\check{F}^s) = O(N^{-2q-3}). \tag{4.14}$$

Все это приводит к следующей оценке

$$R_{N,q}(f,x) = \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi x}{2}}\left(\check{F}_{N+1}^s \sin\pi(N - \tfrac{1}{2})x - \check{F}_N^s \sin\pi(N + \tfrac{1}{2})x\right) + O(N^{-2q-3}). \tag{4.15}$$

Согласно Лемме 4.3, получаем

$$\check{F}_N^s = B_{2q+1}(f)\frac{(-1)^N(2q+2)}{(\pi N)^{2q+2}N}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j(j-\frac{1}{2})}{(2j+1)^{2m+3}} + O(N^{-2q-3}). \tag{4.16}$$

С другой стороны

$$\check{F}_{N+1}^s = \frac{2}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} f(x_k)\sin\pi k = 0. \tag{4.17}$$

Тогда,

$$R_{N,q}(f,x) = B_{2q+1}(f)\frac{(-1)^{N+1}(q+1)}{2\pi^{2q+2}N^{2q+3}}\frac{\sin\pi(N+\frac{1}{2})x}{\cos^2\frac{\pi x}{2}} \times \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^j(j-\frac{1}{2})}{(2j+1)^{2q+3}} + O(N^{-2q-3}),$$

что завершает доказательство. □

Когда $q = 0$, Теорема 4.1 показывает скорость сходимости порядка $O(N^{-3})$ при $N \to \infty$ для нечетной функции. Классическая интерполяция (см. [17]) имеет порядок сходимости $O(N^{-1})$ для сетки $x_k = 2k/(2N+1)$ и сходимость порядка $O(N^{-2})$ для оптимальной сетки $x_k = (2k\pm1)/(2N+1)$. Поэтому, имеем улучшение сходимости порядка $O(N)$ при $N \to \infty$.

Следующая теорема изучает сходимость модифицированной интерполяции на концах отрезка $x = \pm 1$.

Теорема 4.2. *Пусть f нечетная функция на отрезке $[-1,1]$. Пусть $f \in C^{2q+2}[-1,1]$ и $f^{(2q+2)} \in BV[-1,1]$, $q \geq 0$. Тогда, имеет место следующая оценка*

$$R_{N,q}(f,\pm1) = \pm B_{2q+1}(f)\frac{(-1)^{N+1}}{N^{2q+1}}\frac{|E_{2q}|}{2^{2q+1}\pi(2q+1)!} + o(N^{-2q-1}), \quad N \to \infty,$$

где E_k - k-ое число Эйлера.

Доказательство. Согласно (3.8), получим

$$R_{N,q}(f,\pm1) = \sum_{n=1}^{N}(F_n^s - \check{F}_n^s)(-1)^{n+1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} F_n^s(-1)^{n+1}. \tag{4.18}$$

Используя следующую асимптотическую оценку для модифицированных коэффициентов Фурье

$$F_n^s = B_{2q+1}(f)Q_n(q) + o(n^{-2q-2}), \quad n \to \infty, \tag{4.19}$$

и применяя замечание 3.1 для $n = 1, \ldots, N$ и $N \to \infty$, получаем

$$\check{F}_n^s - F_n^s = \frac{B_{2q+1}(f)(-1)^{n+1}}{(\pi N)^{2q+2}}\sum_{j\neq0}(-1)^j\frac{1}{(2j+\frac{n}{N})^{2q+2}} + o(N^{-2q-2}). \tag{4.20}$$

Формула (4.18), вместе с (4.19) и (4.20), приводит к следующей оценке

$$R_{N,q}(f,\pm1) = \pm B_{2q+1}(f)\frac{(-1)^N}{\pi^{2q+2}N^{2q+1}} \times \left(\frac{1}{2q+1} - \int_0^1 \sum_{j\neq0}\frac{(-1)^j}{(2j+x)^{2q+2}}dx\right) + o(N^{-2q-1}),$$

что завершает доказательство. □

Когда $q = 0$, Теорема 4.2 показывает сходимость порядка $O(N^{-1})$. В этом случае, так как $f(1) \neq f(-1)$, классическая интерполяция расходится на концах отрезка. Поэтому, модифицированная интерполяция имеет более хорошую сходимость и улучшение имеет порядок $O(N)$.

Abstract. We consider interpolations by the modified trigonometric system and explore convergence in different frameworks. We prove better convergence of such interpolations for odd functions compared to the interpolations with the classical trigonometric system.

Список литературы

[1] E. B. Davies, Spectral Theory and Differential Operators, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 42 (1995).

[2] M. G. Krein, "On a special class of differential operators", Doklady AN USSR, **2**, no. 273, 345 – 349 (1935).

[3] A. Iserles, S. P. Nørsett, "From high oscillation to rapid approximation. I", Modified Fourier expansions, IMA J. Numer. Anal., IMA Journal of Numerical Analysis, **28**, no. 4, 862 – 887 (2008).

[4] A. Iserles, S. P. Nørsett, "From high oscillation to rapid approximation. III", Multivariate expansions, IMA J. Numer. Anal., IMA Journal of Numerical Analysis, **29**, no. 4, 882 – 916 (2009).

[5] D. Huybrechs, A. Iserles, S. P. Nørsett, "From high oscillation to rapid approximation. IV", accelerating convergence, IMA J. Numer. Anal., IMA Journal of Numerical Analysis, **31**, no. 2, 442 – 468 (2011).

[6] B. Adcock, "Univariate modified Fourier methods for second order boundary value problems", BIT, BIT. Numerical Mathematics, **49**, no. 2, 249 – 280 (2009).

[7] S. Olver, "On the convergence rate of a modified Fourier series", Mathematics of Computation, **78**, no. 267, 1629 – 1645 (2009).

[8] B. Adcock, "Multivariate modified Fourier series and application to boundary value problems", Numerische Mathematik, **115**, no. 4, 511 – 552 (2010).

[9] B. Adcock, "Convergence acceleration of modified Fourier series in one or more dimensions", Mathematics of Computation, **80**, no. 273, 225 – 261 (2011).

[10] B. Adcock, Modified Fourier expansions: theory, construction and applications, Trinity Hall, University of Cambridge, July (2010).

[11] T. Bakaryan, "On a convergence of modified Fourier-Pade approximations", Armen. J. Math., **8**, no. 2, 119 – 143 (2016).

[12] T. Bakaryan, "On a convergence of rational approximations by the modified Fourier basis", Armen. J. Math., **9**, no. 2, 68 – 83 (2017).

[13] A. Krylov, On Approximate Calculations. Lectures delivered in 1906, Tipolitography of Birkenfeld, St. Petersburg (1907).

[14] C. Lanczos, Discourse on Fourier Series, Oliver and Boyd, Edinburgh (1966).

[15] A. Poghosyan, "Asymptotic behavior of the Krylov-Lanczos interpolation, Analysis and Applications, **7**, no. 2, 199 – 211 (2009).

[16] B. Adcock, Convergence Acceleration of Fourier-like Series in One or More Dimensions, Technical report NA2008/11, DAMTP, University of Cambridge (2008).

[17] A. Poghosyan, "Asymptotic estimates for the Krylov-Lanczos interpolation with shifted nodes, Analysis and Applications, **5**, no. 2, 105 – 122 (2014).

[18] J. Riordan, Combinatorial Identities, John Wiley & Sons Inc., New York (1968).

Поступила 10 декабря 2017