*Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 59 – 71.*

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМУМА, МИНИМУМА И ДИАПАЗОНА ВЫБОРКИ

Т.В. ПИЛИПОСЯН

*Ереванский государственный университет*
E-mail: *tigran.piliposyan@gmail.com*

Аннотация. Диапазон выборки, это разность между максимальным и минимальным значениями выборки. Диапазон, это размер наименьшего интервала, который содержит все данные и обеспечивает индикацию статистической дисперсии. Обычно на фьючерсном рынке ежедневно даются максимальные, минимальные цены и цены открытия и закрытия фьючерсов. В этой статье мы рассмотрим максимальные и минимальные цены и выясним, какое распределение будет их лучше описывать.

**MSC2010 number:** 62E17; 62F03.

**Ключевые слова:** максимум выборки; минимум выборки; диапазон выборки; распределение диапазона.

## 1. Распределение диапазона выборки

Диапазон выборки, это разность между максимальным и минимальным значениями выборки. Диапазон, это размер наименьшего интервала, который содержит все данные и обеспечивает индикацию статистической дисперсии (см. [1] и [2]). Обычно на фьючерсном рынке ежедневно даются максимальные, минимальные цены и цены открытия и закрытия фьючерсов. В этой статье мы рассмотрим максимальные и минимальные цены и выясним, какое распределение будет их лучше описывать.

Пусть $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ выборка из $n$ независимых и одинаково распределенных случайных величин с общей функцией плотности $f$ и функцией распределения $F$. Пусть $U = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $V = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $R = U - V$.

**Распределение максимума выборки** связано с распределением $X_i$ по следующей формуле

$$P(U \leqslant x) = P[(X_1 \leqslant x) \cap \ldots \cap (X_n \leqslant x)] = P(X_1 \leqslant x) \cdots P(X_n \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x)^n,$$

здесь мы использовали как независимость, так и одинаковую распределенность. Таким образом, функция распределения $G_U(x)$ случайной величины $U$ является

$n$-й степенью функции распределения $X_i$:

$$G_U(x) = F(x)^n. \tag{1.1}$$

Тогда функция плотности вероятности максимума $g_U(x)$ будет иметь вид:

$$g_U(x) = nF(x)^{n-1} f(x).$$

**Распределение минимума выборки**

$$P(V > x) = P[(X_1 > x) \cap \ldots \cap (X_n > x)] = P(X_1 > x) \cdots P(X_n > x)$$

$$1 - P(V \leqslant x) = (1 - P(X_1 \leqslant x))^n.$$

Таким образом, функция распределения $G_V(x)$ случайной величины $V$ равна:

$$G_V(x) = 1 - (1 - F(x))^n, \tag{1.2}$$

поэтому плотность вероятности минимума $g_V(x)$ имеет вид:

$$g_V(x) = n(1 - F(x))^{n-1} f(x).$$

Легко убедиться, что

$$P[(U < u) \cap (V > v)] = P[(v < X_1 < u) \cap \ldots \cap (v < X_n < u)]$$

$$= P(v < X_1 < u) \cdots P(v < X_n < u) = \left( \int_v^u f(t)\, dt \right)^n = (F(u) - F(v))^n,$$

Поэтому совместное распределение $U$ и $V$, когда $u \geqslant v$, имеет следующий вид:

$$F_{U,V}(u, v) = P(U \leqslant u \cap V \leqslant v) = P(U \leqslant u) - P(U \leqslant u \cap V > v)$$

$$= F_U(u) - (F(u) - F(v))^n,$$

а если $u < v$, то имеем

$$F_{U,V}(u, v) = P(U \leqslant u \cap V \leqslant v) = P(U \leqslant u) = (F_U(u))^n.$$

Отсюда следует, что совместная плотность имеет вид:

$$g(u, v) = \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial u\, \partial v} = \begin{cases} n(n-1)(F(u) - F(v))^{n-2} f(u) f(v), & \text{если } u \geqslant v, \\ 0, & \text{если } u < v. \end{cases}$$

Следовательно, функция распределения диапазона при $x > 0$, равна

$$F_R(x) = \iint\limits_{\substack{v \leqslant u \\ u - v \leqslant x}} g(u, v)\, du\, dv = n \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\, dv \int_v^{v+x} f(u)[F(u) - F(v)]^{n-2} du$$

$$= n \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\, dv \int_v^{v+x} d[[F(u) - F(v)]^{n-1}] = n \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)[F(v + x) - F(v)]^{n-1} dv.$$

Итак:

$$F_R(x) = \begin{cases} n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)[F(x+y) - F(y)]^{n-1} dy, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0, \end{cases}$$

а плотность равна

$$f_R(x) = \begin{cases} n(n-1) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)[F(x+y) - F(y)]^{n-2} f(x+y)\, dy, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

В случае, когда выборка имеет экспоненциальное распределение с параметром $r > 0$, функция распределения диапазона выборки имеет вид (см. [3]):

$$H(z) = \begin{cases} (1 - e^{-rz})^{n-1}, & z > 0 \\ 0, & z \leqslant 0. \end{cases}$$

Рассмотрим максимальные и минимальные цены газовых фьючерсов на десятилетний период (Приложение 1) и подберем некоторые семейства распределений на языке программирования $R$ (Приложение 2). Затем посмотрим, какая из них лучше аппроксимирует данную случайную величину.

## 2. Численные результаты

Для максимальных цен на фьючерсы график Каллена и Фрея имеет вид (см. рис. 2).

На Рисунке 1 показана эмпирическая плотность и функция распределения максимальных цен, а на Рисунке 2 график Каллена и Фрея показывает, что наблюдение попадает в бета распределение из нормальных, равномерных, экспоненциальных, логистических, бета, логнормальных и гамма распределений. Диаграмма говорит, что асимметрия и эксцесс согласуются с бета-распределением, так как наше наблюдение попадает в бета-распределение. Для более практического результата мы делаем то же самое с бутстапными значениями, эти значения заполняются плотно, это означает, что наш результат хорош. Давайте посмотрим, что показывают графики зависимости Q-Q и P-P.

Здесь мы использовали бета, гамма, Вейбул, логнормальное, лог-логистическое и экспоненциальное распределения. На Рисунке 3 показано, что экспоненциальное распределение отличается от других, и оно не соответствует нашим данным. Здесь у нас больше распределений, чем в графе Каллена Фрея.

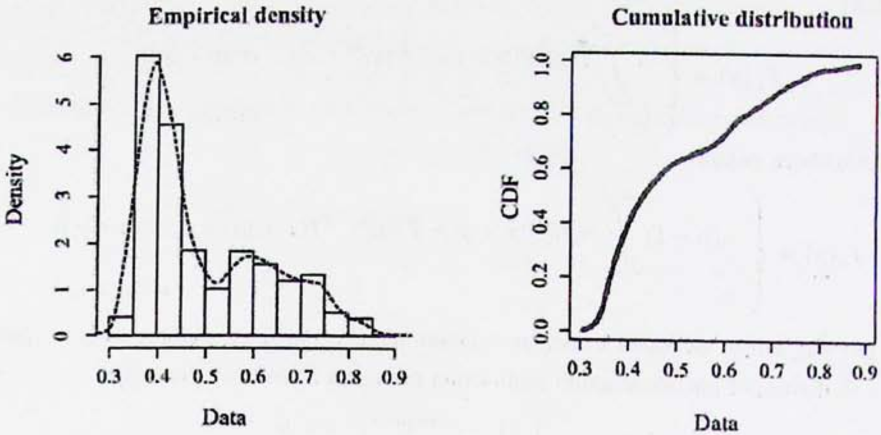


Рис. 1

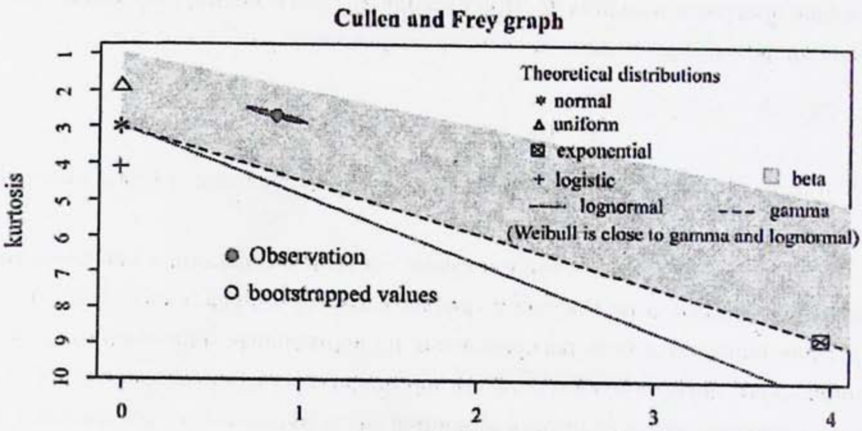


Рис. 2

В статистике есть много способов выяснить, какое распределение подходит для наших данных лучше, например, тест Колмогорова-Смирнова. Возьмем некоторые из них и используем их.

Таблица 1.

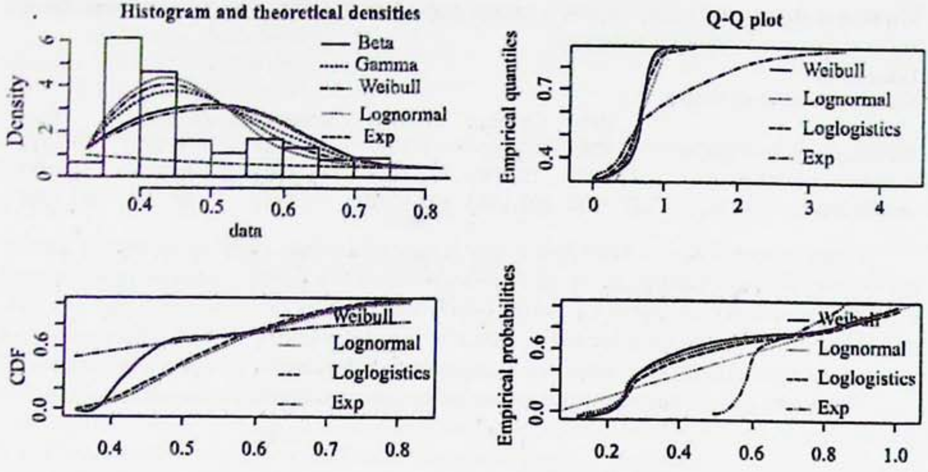


Рис. 3

Goodness-of-fit statistics

| | Beta | Gamma | Weibull | Lognomal | Loglogistics | Exp |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Koliogorov-Smirrov st. | 0.1798 | 0.1558 | 0.1693 | 0.1487 | 0.1190 | 0.4951 |
| Cramer-von Mises st. | 23.1175 | 19.0298 | 21.5541 | 17.2426 | 14.0474 | 144.0261 |
| Anderson-Darling st. | 127.5552 | 106.2417 | 121.5746 | 96.8110 | 91.0866 | 683.5985 |

В Таблице 1 мы взяли:

(1) Расстояние Колмогорова-Смирнова: $\sup\limits_{x\in R}|F_n(x) - F(x)|$.

(2) Расстояние Крамера-фон Мизеса: $\int (F_n(x) - F(x))^2 dF(x)$.

(3) Расстояние Андерсона-Дарлинга: $\int \frac{(F_n(x)-F(x))^2}{F(x)(1-F(x))} dF(x)$,

где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения. Пусть $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ будет выборкой из $n$ независимых и одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Тогда эмпирическая функция распределения определяется как (см. [4]):

$$F_n(x) = \frac{\text{количество элементов в выборке} \leqslant x}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{x_i \leqslant x\}},$$

где $\mathbf{1}_A$ – индикатор события $A$.

Поскольку вышеупомянутые критерии основаны на различиях теоретических и эмпирических распределений, в Таблице 1 минимальные значения показывают нам, какое распределение лучше подходит. Результатом является лог-логистическое распределение всеми тремя способами. Это лучше, чем бета распределение, которое показал нам граф Каллен и Фрей. Второй является логнормальное, что очень близко к лог-логистическому распределению.

Картина та же для минимальных цен. В Таблице 2 показаны результаты для минимальных значений по статистике Колмогорова-Смирнова, Крамера-фон

Мизеса и Андерсона-Дарлинга, и снова лог-логистическое распределение лучше всех подходит к нашим данным.

Таблица 2.

Goodness-of-fit statistics

| | Beta | Gamma | Weibull | Lognomal | Loglogistics | Exp |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kolmogorov-Smirnov st. | 0.1765 | 0.1644 | 0.1673 | 0.1582 | 0.1287 | 0.4927 |
| Cramer-von Mises st. | 23.0733 | 19.1864 | 21.7812 | 17.4005 | 14.1937 | 144.3591 |
| Anderson-Darling st. | 127.7583 | 107.1684 | 123.0546 | 97.5811 | 91.7193 | 684.8924 |

Итак допустим, что максимальные и минимальные цены фьючерсов имеют лог-логистическое распределение. Лог-логистическое распределение представляет собой непрерывное распределение вероятностей для неотрицательной случайной величины. Он используется в анализе выживаемости как параметрическая модель для событий, чья скорость сначала увеличивается а затем уменьшается.

Функция распределения лог-логистического распределения имеет вид:

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\beta}}, & x>0,\end{cases} \tag{2.1}$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$.

Параметр $\alpha>0$ является масштабным параметром и также является медианой распределения. Параметр $\beta>0$ является параметром формы. Распределение является унимодальным, когда $\beta>1$ и его дисперсия уменьшается с ростом $\beta$ (см. [5]).

Плотность лог-логистического распределения имеет вид:

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \dfrac{(\beta/\alpha)(x/\alpha)^{\beta-1}}{(1+(x/\alpha)^{\beta})^2}, & x>0.\end{cases}$$

В нашем случае мы имеем функции распределения для максимума выборки и минимума выборки: уравнения (1.1) и (1.2). Поскольку они не совпадают, и оба они имеют одинаковое лог-логистическое распределение, логично, что они имеют разные параметры масштаба и формы. Найдем параметры $\alpha$ и $\beta$. Мы можем рассчитать параметры распределения с помощью языка программирования R методом максимального правдоподобия, это метод оценки параметров статистической модели, данных наблюдений, путем нахождения значений параметров, которые максимизируют вероятность проведения наблюдений с учетом параметров. Результат для максимума выборки показан в Таблице 3, а для минимума – в Таблице 4.

Таблица 3.

Fitting of the distribution ' llogis ' by maximum likelihood

Parameters:

| | estimate | Std. Error |
|---|---|---|
| shape | 6.7978763 | 0.109397359 |
| scale | 0.4673385 | 0.002423145 |

Таблица 4.

Fitting of the distribution ' llogis ' by maximum likelihood

Parameters:

| | estimate | Std. Error |
|---|---|---|
| shape | 6.8233459 | 0.109891183 |
| scale | 0.4558791 | 0.002354103 |

Мы видим, что параметры формы и масштаба близки друг к другу, но не равны.

## 3. Две теоремы

Мы взяли такой образец, который не содержит резкого увеличения или снижения цен на рынке фьючерсов, и мы проделали эти шаги для некоторых других выборок, таких как наши, и видели, что результаты очень близки друг к другу.

**Теорема 3.1.** *Если $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ представляет собой выборку из n независимых и одинаково распределенных случайных величин и $U = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $V = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, тогда наилучшим предположением о распределении U и V является лог-логистическое распределение с параметрами: $\alpha_U = 0.47$, $\alpha_V = 0.46$, $\beta_U = 6.8$, $\beta_V = 6.82$.*

Теперь рассмотрим диапазон выборки. Результат показан в Таблице 5. Здесь логнормальное распределение лучше подходит для всех трех статистических данных, но теперь лог-логистическое распределение находится на втором месте и очень близко к логнормальному распределению.

Таблица 5.
Goodness-of-fit statistics

| | Beta | Gamma | Weibull | Lognomal | Loglogistics | Exp |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kolmogorov-Smirnov st. | 0.04883 | 0.04807 | 0.06677 | 0.01569 | 0.02946 | 0.2342 |
| Cramer-von Mises st. | 2.05374 | 1.96358 | 4.19960 | 0.12950 | 0.55041 | 40.5841 |
| Anderson-Darling st. | 12.19328 | 11.69045 | 27.87877 | 0.93553 | 3.87484 | 224.0618 |

Логнормальное распределение – это непрерывное распределение вероятностей случайной величины, логарифм которой имеет нормальное распределение. Логнормальное распределение имеет также два параметра, которые являются соответственно средним и стандартным отклонением натурального логарифма случайной величины.

Плотность распределения логнормального распределения имеет вид (см. [6]):

$$f(x) = \begin{cases} 0. & x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \end{cases}$$

В Таблице 6 показаны параметры логнормального распределения: $\mu = -4.5$, $\sigma = 0.59$.

Таблица 6.
Fitting of the distribution ' llogis ' by maximum likelihood
Parameters:

| | estimate | Std. Error |
|---|---|---|
| shape | -4.5883944 | 0.011707233 |
| scale | 0.5936156 | 0.008278158 |

Следовательно, приходим к следующему утверждению

**Теорема 3.2.** *Если $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ выборка из $n$ независимых и одинаково распределенных случайных величин, $U = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $V = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $R = U - V$ – диапазон выборки, тогда наилучшим предположением о распределении $R$ является логнормальное распределение с параметрами $\mu = -4.5$, $\sigma = 0.59$.*

Сейчас рассмотрим что будет с выборкой, имея распределение максимума выборки и параметры распределения. Используя уравнения (1.1) и (1.2), получим такой вид функции распределения выборки:

$$F(x) = \sqrt[n]{G_U(x;\alpha,\beta)} = \sqrt[n]{\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\beta}}}\ ,$$

где $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

В этом случае, рассмотрим наиболее близкое распределение к лог-логистическому распределению: распределение Дагума. Распределение Дагума представляет собой непрерывное распределение вероятностей, определенное для положительных вещественных чисел. Он назван в честь Камило Дагума, он имеет три параметра, и если один из них равен 1, то это точно такое же распределение, что и лог-логистическое. Функция распределения Дагума имеет вид:

$$F(x;\alpha,\beta,p) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \left(1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\beta}\right)^{-p}, & x > 0, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p > 0$.

Следовательно, $n$-й корень функции распределения является одним и тем же распределением, но с другим параметром:

$$\sqrt[n]{F(x;\alpha,\beta,p)} = \left(1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\beta}\right)^{-p} = F(x;\alpha,\beta,p/n).$$

Итак, максимум выборки имеет функцию распределения Дагума $\alpha = 0.47$, $\beta = 6.8$, $p = 1$ параметрами, соответственно, выборка будет иметь ту же функцию распределения Дагума, но уже $\alpha = 0.47$, $\beta = 6.8$, $p = 1/n$ параметрами:

$$\begin{aligned} F(x) = \sqrt[n]{G_U(x;\alpha,\beta,p)} = G_U(x;\alpha,\beta,p/n) = \\ \left(1+\left(\frac{x}{0.47}\right)^{-6.8}\right)^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{0.47}\right)^{-6.8}\right)^{\frac{1}{n}}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

А в случае минимума, используя уравнения (1.2) и (1.2), получим что

$$F(x) = 1 - \sqrt[n]{1-G_V(x;\alpha,\beta)} = 1 - \sqrt[n]{1-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\beta}}}\ .$$

Имея что $\alpha = 0.46$, $\beta = 6.82$, получим:

$$F(x) = 1 - \left(1-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{0.46}\right)^{-6.82}}\right)^{\frac{1}{n}}\ . \tag{3.2}$$

Чтобы понять, насколько хороша наша оценка, нам нужно сравнить результаты (3.1) и (3.2), поэтому давайте нарисуем их графики и посмотрим, какова их разница.

Рисунок 4 показывает, что их разница небольшая, то есть наши оценки довольно хорошие.

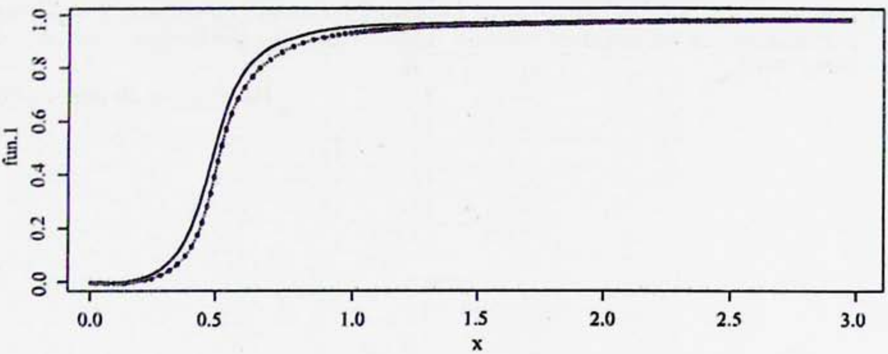


Рис. 4

## 4. Вывод

Проблема заключалась в том, чтобы выяснить, какое распределение будет лучше соответствовать максимальным и минимальным ценам и диапазону цен. Мы взяли максимальные и минимальные цены на газовых фьючерсах и диапазон этих максимальных и минимальных цен на десятилетнем горизонте, и приспособили их к некоторому семейству распределений, в результате мы увидели, что лог-логистическое распределение лучше приспособлено к максимальным и минимальным ценам, а логнормальное распределение лучше приспособлено к диапазону нашей выборки. Таким образом, при создании моделей газовых фьючерсных рынков важно знать, что наилучший результат можно получить, исходя из предположения, что распределение максимумов и минимумов их цен является лог-логистическим, а распределение диапазона этих цен является логнормальным. В случае максимума выборки, если предположим, что распределение максимумов является лог-логистическим, то какое распределение имеет сама выборка? В этом случае, мы пришли к выводу что она имеет распределение Дагума.

**Abstract.** The range of a sample is the difference between the maximum and minimum values. The range is the size of the smallest interval which contains all the data and provides an indication of statistical dispersion. In futures market commonly it is given daily high, low, open and close prices data. In this paper we take high and low prices and find distribution will fit them better.

## Список литературы


[1] G. Woodbury, An Introduction to Statistics, Cengage Learning (2001).

[2] C. Viljoen, "Elementary Statistics", 2, Pearson Education South Africa, 7 27 (2000).

[3] S. Paik, "On the distribution of the range of a sample", Santa Monica College, 1 – 4 (2015).

[4] A. W. van der Vaart, Asymptotic Statistics, Cambridge University Press, (1998).

[5] M. M. Shoukri, I. U. M. Mian, D. S. Tracy, "Sampling properties of estimators of the Log-Logistic distribution with application to Canadian precipitation data", The Canadian Journal of Statistics, 223 – 236 (1988).

[6] L. Norman, J. S. Kotz, W. Balakrishnan, Continuous Univariate Distributions, 1, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics (2nd ed.), New York (1994).


Поступила 20 ноября 2017

Приложение 1.

| Dates | HIGH | LOW | OPEN | CLOSE | OPEN INT | VOLUME |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 05/06/2017 | 375.5 | 372 | 373.75 | 373 | 641997 | 196484 |
| 02/06/2017 | 374.75 | 369.5 | 370.5 | 372.75 | 665083 | 131232 |
| 01/06/2017 | 373.75 | 367.5 | 371.5 | 370.5 | 675785 | 177074 |
| 31/05/2017 | 376.5 | 369 | 370.25 | 372 | 684554 | 263402 |
| 30/05/2017 | 373.75 | 366.25 | 373.5 | 367 | 699581 | 208777 |
| 29/05/2017 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 26/05/2017 | 374.75 | 368.75 | 369.25 | 374.25 | 696337 | 130479 |
| 25/05/2017 | 373 | 368.75 | 371 | 369.25 | 716797 | 110606 |
| 24/05/2017 | 371.5 | 368.75 | 370 | 371.25 | 716807 | 108549 |
| 23/05/2017 | 375.75 | 369 | 374.75 | 369.5 | 719678 | 178136 |
| 22/05/2017 | 377.5 | 371.75 | 372.75 | 375 | 718167 | 170819 |
| 19/05/2017 | 373 | 366 | 366 | 372.5 | 722361 | 201665 |
| 18/05/2017 | 371.5 | 364.25 | 371.5 | 366 | 738461 | 194694 |
| 17/05/2017 | 372.25 | 366.25 | 367 | 371.5 | 725209 | 140847 |
| 16/05/2017 | 368.75 | 365.25 | 367.25 | 367.75 | 735987 | 115028 |
| 15/05/2017 | 371.75 | 367.25 | 370.5 | 367.75 | 731454 | 116961 |
| 12/05/2017 | 371.5 | 368 | 369.25 | 371 | 733856 | 92519 |
| 11/05/2017 | 373.75 | 368.75 | 373 | 369.25 | 732645 | 132707 |
| 10/05/2017 | 374 | 366 | 366.5 | 373.75 | 730382 | 251580 |
| 09/05/2017 | 369.5 | 365.75 | 366 | 366.5 | 734400 | 139423 |
| 08/05/2017 | 371.25 | 365 | 369.25 | 366 | 736221 | 156532 |
| 05/05/2017 | 373.75 | 366.75 | 367.5 | 370.75 | 723242 | 185809 |
| 04/05/2017 | 376 | 366 | 374.25 | 366.5 | 737554 | 223621 |
| 03/05/2017 | 375.75 | 370 | 372 | 374.75 | 726524 | 160950 |
| 02/05/2017 | 378.25 | 370.25 | 376.75 | 372.25 | 732658 | 213540 |
| 01/05/2017 | 379 | 369.5 | 371.5 | 377.5 | 731288 | 315785 |
| 28/04/2017 | 369 | 363.5 | 367.75 | 366.5 | 746911 | 197958 |
| 27/04/2017 | 371.25 | 366 | 366.5 | 369.25 | 741373 | 239075 |
| 26/04/2017 | 374.5 | 366 | 371.75 | 366.75 | 742047 | 292659 |
| 25/04/2017 | 374.75 | 362.5 | 365.5 | 371.75 | 732994 | 343896 |
| 24/04/2017 | 367 | 362.5 | 364 | 365.5 | 723336 | 206756 |

**И т.д.**

Приложение 2.

```
library("readxl")
library("fitdistrplus")
library("actuar")

FD <- read_excel("C:/Users/Tigran.Piliposyan/Desktop/Futures_Data.xlsx")
FD_high<-FD$HIGH/1000
FD_high<-FD_high[FD_high!=0]
FD_low<-FD$LOW/1000
FD_low<-FD_low[FD_low!=0]
FD_range<-FD$range/1000
FD_range<-FD_range[FD_range!−0]
high_cmp<-plotdist(FD_high, histo = TRUE, dcmp = TRUE)
low_emp<-plotdist(FD_low, histo = TRUE, demp = TRUE)
range_emp<-plotdist(FD_range, histo = TRUE, demp = TRUE)

CulFrey1<-descdist(FD_high, boot = 1000)
CulFrey2<-descdist(FD_low, boot = 1000)
CulFrey3<-descdist(FD_range, boot = 1000)

fb1 <- fitdist(FD_high, "beta")
fb2 <- fitdist(FD_low, "beta")
fb3 <- fitdist(FD_range, "beta")
fg1 <- fitdist(FD_high, "gamma")
fg2 <- fitdist(FD_low, "gamma")
fg3 <- fitdist(FD_range, "gamma")
fw1 <- fitdist(FD_high, "weibull")
fw2 <- fitdist(FD_low, "weibull")
fw3 <- fitdist(FD_range, "weibull")
fln1 <- fitdist(FD_high, "lnorm")
fln2 <- fitdist(FD_low, "lnorm")
fln3 <- fitdist(FD_range, "lnorm")
fllg1 <- fitdist(FD_high, "llogis")
fllg2 <- fitdist(FD_low, "llogis")
fllg3 <- fitdist(FD_rangc, "llogis")
fe1<-fitdist(FD_high, "exp")
fe2<-fitdist(FD_low, "exp")
fc3<-fitdist(FD_rangc, "cxp")

par(mfrow = c(2, 2))
plot.legend <- c("Beta "Gamma "Weibull "Lognormal "Loglogistics "Exp")

denscomp(list(fb1, fg1, fw1,fln1,fllg1,fe1), legendtext = plot.legend)
qqcomp(list(fb1, fg1, fw1,fln1,fllg1,fe1), legendtext = plot.legend)
cdfcomp(list(fb1, fg1, fw1,fln1,fllg1,fe1), legendtext = plot.legend)
ppcomp(list(fb1, fg1, fw1,fln1,fllg1,fe1), legendtext = plot.legend)

denscomp(list(fb2, fg2, fw2,fln2,fllg2,fe2), legendtext = plot.legend)
qqcomp(list(fb2, fg2, fw2,fln2,fllg2,fe2), legendtext = plot.legend)
cdfcomp(list(fb2, fg2, fw2,fln2,fllg2,fe2), legendtext = plot.legend)
ppcomp(list(fb2, fg2, fw2,fln2,fllg2,fe2), legendtext = plot.legend)

denscomp(list(fb3, fg3, fw3,fln3,fllg3,fe3), legendtext = plot.legend)
qqcomp(list(fb3, fg3, fw3,fln3,fllg3,fe3), legendtext = plot.legend)
```

```
cdfcomp(list(fb3, fg3, fw3,fln3,fllg3,fe3), legendtext = plot.legend)
ppcomp(list(fb3, fg3, fw3,fln3,fllg3,fe3), legendtext = plot.legend)

gofstat(list(fb1,fg1,fw1,fln1,fllg1,fe1),fitnames = c("Beta "Gamma "Weibull "Lognormal "Loglogistics "Exp"))
bfllg1 <- bootdist(fllg1, niter = 1001)
plot(bfllg1)
bfb1 <- bootdist(fb1, niter = 1001)
plot(bfb1)

gofstat(list(fb2,fg2,fw2,fln2,fllg2,fe2),fitnames = c("Beta "Gamma "Weibull "Lognormal "Loglogistics "Exp"))
bfllg2 <- bootdist(fllg2, niter = 1001)
plot(bfllg2)
bfb2 <- bootdist(fb2, niter = 1001)
plot(bfb2)

gofstat(list(fb3, fg3, fw3,fln3,fllg3,fe3),fitnames = c("Beta "Gamma "Weibull "Lognormal "Loglogistics "Exp"))
bfllg3 <- bootdist(fllg3, niter = 1001)
plot(bfllg3)
bfb3 <- bootdist(fb3, niter = 1001)
plot(bfb3)
```