Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 51 – 58

ОБОБЩЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ

Г. В. МИКАЕЛЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *gagik.mikaelyan@ysu.am*

Аннотация. Вводятся обобщенные характеристики для мероморфных в полуплоскости функций, обобщаются формула Левина и первая основная теорема для характеристик Цудзи.

MSC2010 number: 30D30.

Ключевые слова: мероморфная функция; преобразование Фурье; характеристика; первая основная теорема.

1. Введение

При изучении мероморфных в комплексной плоскости функций часто применяются характеристики Неванлинны и их разные обобщения. Однако эти характеристики не учитывают аргументы a-точек функций. Поэтому в теории распределении значений мероморфных функций применяют другие характеристики, учитывающие угловые распределения a-точек (см. [1]). В [2] для мероморфных в полуплоскости функций к таким характеристикам авторы относят характеристики Цудзи, порождаемые формулой Левина.

Мы обобщаем формулу Левина, как и в [3] перефразируя результаты для нижней полуплоскости, после чего формула Левина и характеристики Цудзи приобретают наиболее естественный вид. Затем рассматриваем формулу Левина как значение преобразования Фурье в точке $x = 0$ и вводим обобщенные характеристики для мероморфных в нижней полуплоскости функций и обобщаем первую основную теорему Цудзи.

Пусть f отличная от постоянной мероморфная функция в области

$$D = \left\{\left|z - i\frac{R}{2}\right| \le \frac{R}{2}\right\} \cup \{|z| \le R_0\}, \ 0 < R_0 < R.$$

Справедлива формула Левина (см. [2], [4]).

$$\sum_m \left(\frac{\sin\varphi_m}{r_m} - \frac{1}{R}\right) - \sum_m \left(\frac{\sin\psi_m}{\rho_m} - \frac{1}{R}\right) = \tag{1.1}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\arcsin(R_0 R^{-1})}^{\pi-\arcsin(R_0 R^{-1})} \log\left|f\left(R\sin\left(\theta e^{i\theta}\right)\right)\right| \frac{d\theta}{R\sin^2\theta} + Q\left(R, R_0, f\right),$$

где $r_m e^{i\varphi_m}$- нули, $\rho_n e^{i\psi_n}$ -полюсы функции f лежащие в области $\left\{\left|z - i\frac{R}{2}\right| < \frac{R}{2}\right\} \cup \{|z| > R_0\}$, $Q\left(R, R_0, f\right) = O(1)$ при $R \to \infty$.

Введем теперь характеристики Цудзи для отличной от постоянной мероморфной в области $\{Im(z) > 0\} \cup \{|z| \leq R_0\}$ функции f. Полагая, что $R > R_0$ через $n(R, f)$ обозначим число полюсов функции f, лежащих в множестве $\left\{\left|z - i\frac{R}{2}\right| \leq \frac{R}{2}\right\} \cup \{|z| > R_0\}$, и положим

$$N(R, f) = \int\limits_{R_0}^{R} \frac{n(t, f)}{t^2} dt, \quad L(R, f) = m(R, f) + N(R, f),$$

$$m(R, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\arcsin(R_0 R^{-1})}^{\pi-\arcsin(R_0 R^{-1})} \log^+\left|f\left(R\sin\theta e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{R\sin^2\theta}.$$

С этими характеристиками Цудзи [5] (см.также [2], гл. 1, теорема 5.3) установил следующий аналог первой основной теоремы Неванлинны.

Теорема 1.1. *Пусть f отличная от постоянной мероморфная в области $\{Im(z) > 0\} \cup \{|z| \leq R_0\}$ функция. Тогда для любого комплексного числа a справедливо соотношение*

$$L(R, f) = L\left(R, \frac{1}{f - a}\right) + O(1), \text{ при } R \to \infty.$$

2. Обобщение формулы Левина

Преобразуем формулу (1.1) заменой переменной $w = \dfrac{1}{z}$. При этом отображении верхняя полуплоскость переходит в нижнюю полуплоскость, окружность $\left|z - i\frac{R}{2}\right| = \frac{R}{2}$ в горизонтальную прямую линию $Imw = -\frac{1}{R}$, круг $\left|z - i\frac{R}{2}\right| \leq \frac{R}{2}$ в полуплоскость $Imw \leq -\frac{1}{R}$, круг $|z| \leq R_0$ в область $|w| \geq \frac{1}{R_0}$. Таким образом область D отображается в область $\Omega = \left\{Imw \leq -\frac{1}{R}\right\} \cup \left\{|w| \geq \frac{1}{R_0}\right\}$(см. рис. 1).

Функция $f(w)$ мероморфна в области Ω, которая получается удалением из комплексной плоскости сегмента содержащего точки $w = 0$.

Из формулы (1.1) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\arcsin(R_0 R^{-1})}^{\pi-\arcsin(R_0 R^{-1})} \log\left|\left(R\sin\theta e^{i\theta}\right)^\lambda\right| \frac{d\theta}{R\sin^2\theta} = O(1), \text{ при } R \to \infty,$$

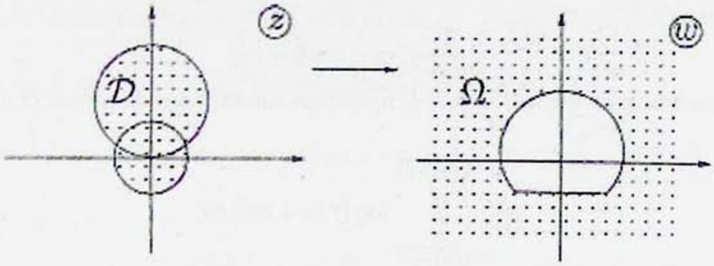

Рис. 1

где λ действительное число. Следовательно, если точка $z = 0$ является нулем порядка λ или полюсом порядка $(-\lambda)$, то рассмотрев функцию $f(z)\,z^{-\lambda}$, мы можем считать $f(0) = 1$. Таким образом после отображения $w = \frac{1}{z}$ имеем, что функция f аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки и $f(\infty) = 1$. В этом случае в окрестности бесконечно удаленной точки справедливо разложение

$$f(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{w^k}.$$

Отсюда следует, что

$$\log f(w) = \frac{\varphi(w)}{w}, \text{ где } \varphi(w) = O(1), \text{ при } w \to \infty \tag{2.1}$$

Пусть $\mu_m = \frac{1}{r_m} e^{-i\varphi_m}$, $\nu_n = \frac{1}{\rho_n} e^{-i\psi_n}$ - образы соответственно нулей $r_m e^{i\varphi_m}$ и полюсов $\rho_n e^{i\psi_n}$ функции $f(z)$. Они лежат в области $\left\{Imw < -\frac{1}{R},\ |w| < \frac{1}{R_0}\right\}$ (см.рис.2).

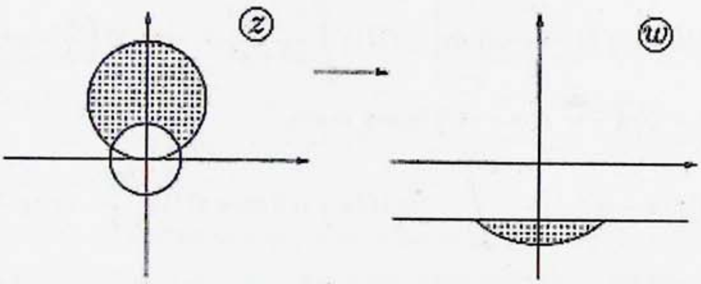

Рис. 2

Так как $f(\infty) = 1$, то можно считать, что нули и полюсы функции $f(w)$ лежат в полуплоскости $\left\{Imw < -\frac{1}{R}\right\}$.

Поскольку

$$\frac{1}{\sin\theta e^{i\theta}}=\frac{1}{R}\cot\theta-i\frac{1}{R}$$

то обозначения $u=\frac{1}{R}\cot\theta,\ v=-\frac{1}{R}$ приводят интеграл в формуле (1.1) в интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sqrt{v_0^2-v^2}}^{\sqrt{v_0^2-v^2}}\log|f(u+iv)|\,du,$$

где $v_0=-\frac{1}{R_0}$.

Лемма 2.1. *При любых* $v_0\in(-\infty,0)\,,\lambda\in(-\infty,+\infty)\,,v\in(v_0,0)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda u}\log|f(u+iv)|\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sqrt{v_0^2-v^2}}^{\sqrt{v_0^2-v^2}}\log|f(u+iv)|\,du+K(v,v_0,\lambda,f)\,,$$

где а) $\lim\limits_{v\to0}K(v,v_0,0,f)=0$ *и б)* $K(v,v_0,\lambda,f)=O(1)$ *при* $v\to0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\lambda=0$. При $a>0$ имеем

$$\int\limits_{a}^{\infty}\log|f(u+iv)|\,du+\int\limits_{-\infty}^{-a}\log|f(u+iv)|\,du=\int\limits_{a}^{\infty}\log|f(u+iv)\,f(-u+iv)|\,du$$

Пусть $\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$, тогда в силу (2.1)

$$\begin{aligned}&\log|f(u+iv)\,f(-u+iv)|=\log|f(u+iv)|+\log|f(-u+iv)|=\\ &=Re\frac{\varphi_1+i\varphi_2}{u+iv}+Re\frac{\varphi_1+i\varphi_2}{-u+iv}=-\frac{2v\varphi_2}{u^2+v^2}\end{aligned}\tag{2.2}$$

Следовательно при $v\to0$

$$\left|\int\limits_{a}^{\infty}\log|f(u+iv)\,f(-u+iv)|\,du\right|\le O(1)\int\limits_{a}^{\infty}\frac{|v|}{u^2+v^2}du=O(1)\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{a}{|v|}\right).$$

Полагая $a=\sqrt{v_0^2-v^2}$ при $v\to0$ будем иметь

$$\int\limits_{\sqrt{v_0^2-v^2}}^{\infty}\log|f(u+iv)|\,du+\int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{v_0^2-v^2}}\log|f(u+iv)|\,du=O(1)\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{v_0^2-v^2}}{|v|}\right)\to0.$$

Теперь докажем лемму в случае $\lambda\neq0$. Обозначим $\lim\limits_{w\to\infty}\varphi(w)=\varphi_0$. Тогда при $w\to\infty$ имеем $\varphi(w)-\varphi_0=\frac{O(1)}{w}$. При $a>0$ справедливо равенство

$$\int\limits_{a}^{\infty}e^{-i\lambda u}\log|f(u+iv)|\,du+\int\limits_{-\infty}^{-a}e^{-i\lambda u}\log|f(u+iv)|\,du=$$

$$= \int_a^\infty \cos\lambda u \log\left|f(u+iv)\,f(-u+iv)\right| du + i\int_a^\infty \sin\lambda u \log\left|\frac{f(u+iv)}{f(-u+iv)}\right| du$$

В силу (2.2) как и в случае $\lambda = 0$ справедлива оценка

$$\left|\int_a^\infty \cos\lambda u \log\left|f(u+iv)\,f(-u+iv)\right| du\right| \le O(1)\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a}{|v|}\right).$$

Из равенства

$$\log\left|\frac{f(u+iv)}{f(-u+iv)}\right| = \frac{2u\varphi_1}{u^2+v^2} = \frac{2uRe\varphi_0}{u^2+v^2} + \frac{2u(\varphi_1 - Re\varphi_0)}{u^2+v^2}$$

следует, что при $v \to 0$

$$\int_a^\infty \sin\lambda u \log\left|\frac{f(u+iv)}{f(-u+iv)}\right| du = 2Re\varphi_0 \int_a^\infty \frac{u\sin\lambda u}{u^2+v^2} du + O(1)\int_a^\infty \frac{u}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} du \tag{2.3}$$

Так как

$$\int_a^\infty \frac{u\sin\lambda u}{u^2+v^2} du = \frac{1}{\lambda}\frac{a}{a^2+v^2}\cos\lambda a + \frac{1}{\lambda}\int_a^\infty \cos\lambda u \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} du$$

и

$$\int_a^\infty \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} du = -\frac{a}{a^2+v^2}$$

то

$$\left|\int_a^\infty \frac{u\sin\lambda u}{u^2+v^2} du\right| \le \frac{2}{|\lambda|}\frac{a}{a^2+v^2}. \tag{2.4}$$

Поскольку

$$\int_a^\infty \frac{u}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} du = \frac{1}{\sqrt{a^2+v^2}}.$$

то полагая $a = \sqrt{v_0^2 - v^2}$, из (2.3) и (2.4) получаем доказательство леммы в случае $\lambda \ne 0$. Лемма 2.1 доказана.

Таким образом в силу пункта а) леммы мы пришли к следующей формулировке теоремы Левина.

Теорема 2.1. *Пусть отличная от постоянной функция f мероморфна в области Ω, аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки и $f(\infty) = 1$. Тогда при $v \to 0$ справедлива формула*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \log\left|f(u+iv)\right| du = \sum_{v_k < v}(v - v_k) - \sum_{q_k < v}(v - q_k) + O(1),\ v < 0 \tag{2.5}$$

где v_k и q_k мнимые части соответственно нулей и полюсов функции f (интеграл следует понимать в смысле главного значения).

В работе [6] (см. также [7]) доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть отличная от постоянной функция f мероморфна в нижней полуплоскости $G = \{w : Imw < 0\}$, аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки и $f(\infty) = 1$. Пусть*

$$\frac{e^{xv_0}}{i\sqrt{2\pi}x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu}\frac{f'(u+iv_0)}{f(u+iv_0)}du = h(x),\ v_0 < \min_k v_k,\ v_0 < \min_k q_k,\ x \neq 0.$$

Тогда $h(x)$ не зависит от v_0, равен нулю при $x > 0$ и при любом $v < 0$ справедлива формула

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}\log|f(u+iv)|\,du = \frac{1}{2}\left(e^{-xv}h(x) + e^{xv}\overline{h(-x)}\right) -$$

$$(2.6)\qquad -\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{v_k<v} e^{-ixu_k}\,\mathrm{sh}\,(x(v_k - v)) + \frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{q_k<v} e^{-ixp_k}\,\mathrm{sh}\,(x(q_k - v)),$$

где $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} = \{u_k + iv_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность нулей а $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} = \{p_k + iq_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность полюсов функции f.

Из (2.6) в силу леммы 2.1 предельным переходом при $x \to 0$ получается формула (2.5). Таким образом формула (2.5) справедлива, если функция f мероморфна в нижней полуплоскости.

3. Обобщение характеристики

Формулу (2.6) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}\log|f(u+iv)|\,du = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(e^{-xv}h(x) + e^{xv}\overline{h(-x)}\right) -$$

$$-\frac{1}{2x}\sum_{v_k<v}\left(e^{-xv}e^{-ixw_k} - e^{xv}e^{-ix\overline{w_k}}\right) + \frac{1}{2x}\sum_{q_k<v}\left(e^{-xv}e^{-ixr_k} - e^{xv}e^{-ix\overline{r_k}}\right),$$

Пусть $\{c_m\}$ произвольная последовательность комплексных чисел, а $\{\lambda_m\}$ произвольная последовательность действительных чисел. Рассмотрим экспоненциальную функцию $E(w) = \sum\limits_{m=-n}^{n} c_m e^{-i\lambda_m w}$, $w \in \mathbb{C}$ и при $v < 0$ введем следующие обозначения

$$n_E(v,f)=\frac{1}{2}\sum_{q_k<v}\left(E(r_k-iv)+E(\overline{r_k}+iv)\right),\quad N_E(v,f)=\int\limits_{-\infty}^{v} n_E(t,f)\,dt,$$

$$H_E^1(v,f)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-n}^{n}c_m e^{-\lambda_m v}h(\lambda_m),\quad H_E^2(v,f)\,\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-n}^{n}c_m e^{\lambda_m v}\overline{h(-\lambda_m)},$$

$$H_E(v,f)=H_E^1(v,f)+H_E^2(v,f).$$

В случае $E\equiv 1$ имеем $n_E(v,f)=\sum\limits_{q_k<v}1$ и $N_E(v,f)=\sum\limits_{q_k<v}(v-q_k)$.

В условиях теоремы 2.2 имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E(u)\log^+|f(u+iv)|\,du=H_E^1(v,f)+H_E^2(v,f)+N_E\left(v,\frac{1}{f}\right)-N_E(v,f).$$

Введем следующие функции

$$m_E(v,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E(u)\log^+|f(u+iv)|\,du,\ L_E(v,f)=m_E(v,f)+N_E(v,f).$$

Таким образом имеем

$$L_E(v,f)=L_E\left(v,\frac{1}{f}\right)+H_E(v,f),\tag{3.1}$$

где

$$\lim_{v\to 0}H_E(v,f)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-n}^{n}c_m\left(h(\lambda_m)+\overline{h(-\lambda_m)}\right)$$

Обозначим

$$n_E(v,v_0,f)=\frac{1}{2}\sum_{v_0<q_k<v}\left(E(r_k-iv)+E(\overline{r_k}+iv)\right),\ N_E(v,v_0,f)=\int\limits_{v_0}^{v}n_E(t,v_0,f)\,dt,$$

$$m_E(v,v_0,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sqrt{v_0^2-v^2}}^{\sqrt{v_0^2-v^2}}E(u)\log^+|f(u+iv)|\,du,\ L_E(v,v_0,f)$$
$$=m_E(v,v_0,f)+N_E(v,v_0,f).$$

В силу пункта б) леммы 2.1 формулу (3.1) можно записать в виде

$$L_E(v,v_0,f)=L_E\left(v,v_0,\frac{1}{f}\right)+O(1),\ \text{при } v\to 0.\tag{3.2}$$

Мы пришли к следующему обобщению и усилению первой основной теоремы Цудзи.

Теорема 3.1. *Пусть отличная от постоянной функция f мероморфна в нижней полуплоскости $G = \{w : Imw < 0\}$, аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки. Тогда для любого комплексного числа a справедливо соотношение*

$$L_E(v, v_0, f) = L_E\left(v, v_0, \frac{1}{f-a}\right) + O(1), \text{ при } v \to 0.$$

Доказательство. При $v \to 0$ справедлива оценка

$$|m_E(v, v_0, f) - m_E(v, v_0, f-a)| \leq \left(\log^+ a + \log 2\right) \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sqrt{v_0^2-v^2}}^{\sqrt{v_0^2-v^2}} |E(u)|\, du = O(1)$$

Доказательство получается применением формулы (3.2) к функции $f - a$.

Abstract. In this paper we introduce generalized characteristics for meromorphic in the half-plane functions, and generalize the Levin's formula and the first fundamental theorem for Tsuji's characteristics.

Список литературы

[1] L. A. Rubel, "A generalized characteristic for meromorphic functions", Journal of math. Analysis and applicat., **18**, 565 – 584 (1967).

[2] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, "Распределение значений мероморфных функций", М., Наука (1970).

[3] A. M. Jerbashian, "Functions of alpha-Bounded Type in the Half-Plane", Springer, New York (2005).

[4] Б. Я. Левин, "О функциях, голоморфных в полуплоскости", Труди Одеського державного университета, **3**, 5 – 14 (1941).

[5] M. Tsuji, "On Borels directions of meromorphic functions of finite order", Tohoku Math. J., **2**, 97 – 112 (1950).

[6] Г. В. Микаелян, "Преобразование Фурье, ассоциированное с функциями, мероморфными в полуплоскости", Изв АН Арм ССР, Сер. Математика, **5**, 361 – 376 (1984).

[7] Г. В. Микаелян, "О росте функций, мероморфных в полуплоскости", Известия вузов, **4**, 79 – 82 (1988).

Поступила 3 декабря 2016