Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 41 – 50.

СРАВНЕНИЕ СИЛ МНОГОЧЛЕНОВ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - Армянский (Славянский) Университет [1]
Институт Математики НАН Армении
E-mails: *haikghazaryan@mail.ru*, *vachagan.margaryan@yahoo.com*

Аннотация. Для однородных многочленов двух переменных находятся необходимые и достаточные условия сравнения силы с весом этих многочленов. Условия формулируются в терминах порядков и кратностей нулей сравнимых многочленов.

MSC2010 numbers: 12E10, 26C05.

Ключевые слова: Многогранник Ньютона; сравнение силы (мощности) многочленов.

1. Введение

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times ... \times \mathbb{N}_0-$ множество $n-$ мерных мультииндексов, $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n-$ $n-$мерные евклидовы пространства вещественных точек (векторов) $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ и $x = (x_1, ..., x_n)$, соответственно комплексных точек (векторов) $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$, $\mathbb{R}^{n,0} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 \cdot ... \cdot \xi_n \neq 0\}$ и $\mathbb{R}^{n,+} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_j \geq 0 \ (j = 1, ..., n)\}$.

Для $\nu \in \mathbb{R}^{n,+}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ положим $|\nu| = \nu_1 + ... + \nu_n$, $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$, $|\xi^\nu| = |\xi_1|^{\nu_1} ... |\xi_n|^{\nu_n}$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}, ..., D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ либо $D_j = i^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1, ..., n)$.

Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n,+}$ конечный набор. **Многогранником Ньютона набора** $\mathcal{A}$ называют наименьший выпуклый многогранник $\Re(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}^{n,+}$, содержащий множество $\mathcal{A} \cup 0$. Многогранник $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ называется **полным**, если $\Re$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершину на каждой оси координат. Полный многогранник $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ называется **вполне правильным** (в.п.), если все координаты внешних (относительно $\Re$) единичных нормалей

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта N SCS 15T - 1A 197 и в рамках тематического финансирования РАУ из средств МОБНРФ.

$(n-1)$−мерных некоординатных граней $\Re$ (множество которых обозначим через $\Lambda(\Re)$) положительны.

Очевидно, что между множеством $\Lambda(\Re)$ и множеством всех $(n-1)$−мерных некоординатных граней $\Re$ существует однозначное соответствие, при этом каждой такой грани Γ, или, что то же самое, каждому вектору $\lambda(\Gamma)$ однозначно соответствует число

$$d(\lambda) = \max_{\nu \in \Re}(\lambda, \nu).$$

Пусть $\Re$ в.п. многогранник, обозначим через $\Re^0$ множество его вершин и положим

$$h_\Re(\xi) = \sum_{\nu \in \Re^0} |\xi^\nu|, \;\; \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Для дифференциального оператора $R(D) = R(D_1, ..., D_n)$ через $R(\xi) = (\xi_1, ..., \xi_n)$ обозначим его символ (характеристический многочлен), а через $\tilde{R}(\xi, t)$ обозначим функцию (Л. Хермандера):

$$\tilde{R}(\xi, t) = \sqrt{\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |D^\alpha R(\xi)|^2 t^{2|\alpha|}}; \;\; \tilde{R}(\xi) = \tilde{R}(\xi, 1).$$

Определение 1.1. *(см. [1], определение 10.3.4 и [12]). Многочлен $P(\xi)$ сильнее (мощнее) многочлена $Q(\xi)$, будем обозначать $Q \prec P$, (соответственно $Q < P$) если с некоторой постоянной $C > 0$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ будем иметь $\tilde{Q}(\xi) \leq C\tilde{P}(\xi)$ (соответственно $|Q(\xi)| \leq C[1 + |P(\xi)|]$).*

Определение 1.2. *Пусть $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ в.п. многогранник. Многочлен P $\Re$−сильнее многочлена Q и будем обозначать $Q \prec^\Re P$, если с некоторой постоянной $C > 0$ и для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ будем иметь $\tilde{Q}(\xi, h_\Re(\xi)) \leq \tilde{P}(\xi, h_\Re(\xi))$.*

Представим многочлен P порядка $m > 0$ в виде

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{m} P_j(\xi), \tag{1.1}$$

где P_j однородный многочлен порядка j, $j = 0, 1, ..., m$.

Определение 1.3. *(см. [1], определение 12.3.3 и теорему 12.4.1). Многочлен P вида (1.1) гиперболичен (по Гордингу) относительно вектора $\eta \in \mathbb{R}^n$, если $P_m(\eta) \neq 0$ и для некоторого $\tau_0 > 0$ $\;P(\xi + i\tau\eta) \neq 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $|\tau| > \tau_0$.*

Определение 1.4. *(см. [3]). Пусть $s > 1$ и $\eta \in \mathbb{R}^n$. Многочлен P вида (1.1) s−гиперболичен относительно вектора η, если $P_m(\eta) \neq 0$ и для некоторого $c > 0$ $P(\xi + i\tau\eta) \neq 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $|\tau| > c(1 + |\xi|)^{1/s}$.*

Определение 1.5. *(см.[4], [5], или [6]) Пусть $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ в.п. многогранник. Многочлен P вида (1.1) $h_\Re-$гиперболичен относительно вектора $\eta \in \mathbb{R}^n$ (P гиперболичен относительно вектора η с весом $h_\Re$), если $P_m(\eta) \neq 0$ и для некоторого $c > 0$ $P(\xi + i\tau\eta) \neq 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $|\tau| > c\ h_\Re(\xi)$.*

Для числа $s > 0$, вектора $\lambda \in \mathbb{R}^n$, области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и в.п. многогранника $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ введем следующие (изотропный, анизотропный и мультиизотропный) классы Жевре:

$\Gamma^s(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega)$, для любого компакта $K \subset \Omega$ (далее в обозначениях: $K \subset\subset \Omega$) существует число $c = c(K,f) > 0$ такое, что $\sup\limits_{x\in K} |D^\alpha f(x)| \leq c^{|\alpha|+1}\ |\alpha|^s$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$,

$\Gamma^\lambda(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega)$, для любого $K \subset\subset \Omega$ существует число $c = c(K,f) > 0$ такое, что $\sup\limits_{x\in K} |D^\alpha f(x)| \leq c^{|\alpha|+1}\ |\alpha|^{(\lambda,\alpha)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$,

$\Gamma^\Re(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega)$, для любого $K \subset\subset \Omega$ существует число $c = c(K,f) > 0$ такое, что $\sup\limits_{x\in K} |D^\alpha f(x)| \leq c^{j+1}\ j^j \quad \forall \alpha \in j\,\Re\ \ (j = 1,2,...)\}$, где $j\,\Re$ многогранник Ньютона набора точек $\{j\,\alpha : \alpha \in \Re\}$. Очевидно, для любого $j \in \mathbb{N}$ многогранники $\Re$ и $j\,\Re$ подобны с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия j. Известно (см. [7]), что

1) если $\Re = \{\nu \in \mathbb{R}^{n,+}, (\lambda,\nu) \leq 1\}$, то $\Gamma^\Re(\Omega) = \Gamma^\lambda(\Omega)$, при этом, если $\lambda = (s,...,s)$, то $\Gamma^\Re(\Omega) = \Gamma^s(\Omega)$,

2) если $\Re_1$ и $\Re_2$ в.п. многогранники, такие, что $\Re_1 \subset \Re_2$, то $\Gamma^{\Re_2}(\Omega) \subset \Gamma^{\Re_1}(\Omega)$,

3) $\Gamma^{\Re_1}(\Omega) \times \Gamma^{\Re_2}(\Omega) = \Gamma^{\Re_1}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\Re_2 \supset \Re_1^*$.

Пусть $0 \neq \eta \in \mathbb{R}^n$ и $H := \{x \in \mathbb{R}^n, (x,\eta) > 0\}$. В монографии [1] (теоремы 12.3.1, 12.5.1 и лемма 12.3.2) доказано, что задача Коши в $C^\infty(H)$ для оператора $P(D)$ имеет, притом единственное решение тогда и только тогда, когда $P(D)$ гиперболичен по Гордингу относительно вектора η.

В [8] доказано, что если m – однородный многочлен P_m гиперболичен относительно вектора $\eta \in \mathbb{R}^n$, а Q многочлен порядка меньше m, то многочлен $P_m + Q$ гиперболичен относительно вектора η тогда и только тогда, когда $Q \prec P_m$. При этом (см. [1], теоремы 12.4.6), если $Q = \sum\limits_{j=0}^{k} Q_j$, то $Q \prec P_m$ тогда и только тогда, когда $Q_j \prec P_m \ \ j = 0,1,...,k$.

В [9] доказано, что если задача Коши для оператора $P(D)$ имеет в $\Gamma^s(H)$ единственное решение, то многочлен P $s-$гиперболичен относительно вектора η. В работе [4] Д. Калво в одном частном случае (когда $\eta = (0,...,0,1)$) и в

[9] в более общем случае доказано, что если оператор $P(D)$ $h_{\Re}-$гиперболичен относительно вектора η, то решение задачи Коши при надлежащих начальных условиях принадлежит мультианизотропному классу Жевре $\Gamma^{\Re}$.

В [6] доказано, что если задача Коши для оператора $P(D)$ имеет в $\Gamma^{\Re}(\Omega)$ единственное решение, то многочлен P $h_{\Re}-$гиперболичен относительно вектора η. Там же доказано, что если $m-$однородный многочлен P_m $h_{\Re}-$гиперболичен относительно вектора $\eta \in \mathbb{R}^n$, а Q многочлен порядка меньше m $h_{\Re}-$слабее P_m, то многочлен P_m+Q $h_{\Re}-$гиперболичен относительно вектора η. При этом, если $Q = \sum\limits_{j=0}^{k} Q_j$, то $Q \prec^{\Re} P_m$ тогда и только тогда, когда $Q_j \prec^{\Re} P_m$ $j = 0, 1, ..., k$.

Поэтому возникает естественный вопрос описания (для данного $m-$однородного многочлен P_m, и вполне правильного многогранника $\Re$) множества однородных многочленов $\{Q\}$ $\Re-$слабых P_m. Этому вопросу посвящена эта статья. При этом мы будем рассматривать лишь многочлены двух переменных. Отметим, что аналогичный вопрос для одного класса вполне правильных многогранников специального вида рассмотрен в работе [15]. В работах [10] - [11] в терминах порядков и кратности нулей многочленов Q и P найдены алгебраические условия при которых $Q < P$ или $Q \prec P$.

2. Предварительные результаты

Пусть $\Re \subset \mathbb{R}^{2,+}$ в.п. многоугольник, при этом $\Re^0 = \{e^j\}_{j=0}^{M}$, где точки $\{e^j\}$ пронумерованы в следующем порядке

$$e_1^1 > e_2^1 > ... > e_M^1 = 0; \quad 0 = e_2^1 < e_2^2 < ... < e_2^M. \tag{2.1}$$

Из (1.1) следует, что

$$\rho_1 := \max_{\nu \in \Re}\{\nu_1\} = \max_{1 \le j \le M} e_1^j = e_1^1, \quad \rho_2 := \max_{\nu \in \Re}\{\nu_2\} = \max_{1 \le j \le M} e_2^j = e_2^M. \tag{2.2}$$

Обозначим через λ^j единичную внешнюю нормаль стороны $[e^j, e^{j+1}]$ многогранника $\Re$ и $d_j := \max\limits_{\nu \in \Re}(\lambda^j, \nu)$ $(j = 1, ..., M-1)$. Тогда уравнение прямой, проходящей через сторону $[e^j, e^{j+1}]$ будет $(\lambda^j, \nu) = d_j$ $(j = 1, ..., M-1)$. Как выше положим $\Lambda(\Re) = \{\lambda^1, ..., \lambda^{M-1}\}$.

Всюду ниже будем считать, что $\rho(\Re) := \max\limits_{\nu \in \Re}\{|\nu|\} = \max\limits_{1 \le j \le M}\{|e^j|\} < 1$. Отсюда и из определения чисел ρ_1 и ρ_2 следует, что

$$d_1/\lambda_1^1 = \rho_1 < 1, \quad d_{M-1}/\lambda_2^{M-1} = \rho_2 < 1. \tag{2.3}$$

Пусть $\Re \subset \mathbb{R}^{2,+}$ в.п. многоугольник и $\delta \in (-\infty, 1]$, положим

$$f(\delta) = f_{\Re}(\delta) := \max_{\nu \in \Re}\{\nu_1 + \delta\nu_2\} = \max_{1 \le j \le M}\{e_1^j + \delta e_2^j\}, \tag{2.4}$$

$$g(\delta) = g_{\Re}(\delta) := \max_{\nu \in \Re}\{\delta\nu_1 + \nu_2\} = \max_{1 \le j \le M}\{\delta e_1^j + e_2^j\}. \tag{2.5}$$

Из определения введенных функций и того, что $\rho(\Re) < 1$ и $e_2^1 = e_1^M = 0$ непосредственно следует утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $\Re \subset \mathbb{R}^{2,+}$ в.п. многоугольник, для которого $\rho(\Re) < 1$. Тогда числа*

$$\delta_1 := \max_{1 \le j \le M} \frac{e_1^j}{(1 - e_2^j)} < 1 \text{ и } \delta_2 := \max_{1 \le j \le M} \frac{e_2^j}{(1 - e_1^j)} < 1 \tag{2.6}$$

являются единственными решениями уравнений $f(\delta) = \delta$ и $g(\delta) = \delta$ соответственно.

Замечание 2.1. *В условиях леммы 2.1 функции $\delta - f(\delta)$ и $\delta - g(\delta)$ строго монотонно возрастающие в $(-\infty, 1]$ функции. При этом*

1) $\delta_1 \in [\rho_1, 1)$, $\delta_2 \in [\rho_2, 1)$,

2) функция $\delta - f(\delta)(\delta - g(\delta))$ строго монотонно возрастает и $f(\delta) \ge \rho_1$ при $\delta \in (-\infty, 1]$ ($g(\delta) \ge \rho_2$ при $\delta \in (-\infty, 1]$)

3) $f(\delta) > \delta$ при $\delta \in (-\infty, \delta_1)$, $f(\delta_1) = \delta_1$ и $f(\delta) < \delta$ при $\delta \in (\delta_1, 1]$ ($g(\delta) > \delta$ при $\delta \in (-\infty, \delta_2)$, $g(\delta_2) = \delta_2$ и $g(\delta) < \delta$ при $\delta \in (\delta_2, 1]$).

Лемма 2.2. *В условиях леммы 2.1 $f(\delta) = \rho_1$ при $\delta \le \lambda_2^1/\lambda_1^1$ и $g(\delta) = \rho_2$ при $\delta \le \lambda_1^{M-1}/\lambda_2^{M-1}$.*

Доказательство. В силу монотонности f и соотношений (2.3) при $\delta \le \lambda_2^1/\lambda_1^1$ имеем

$$f(\delta) \le f(\lambda_2^1/\lambda_1^1) = \max_{1 \le j \le M}(e^j, \lambda^1)/\lambda_1^1 = d_1/\lambda_1^1 = \rho_1.$$

С другой стороны, так как $e_2^1 = 0$, то $f(\delta) \ge e_1^1 + \delta\, e_2^1 = e_1^1 = \rho_1$ для всех $\delta \in (-\infty, 1]$ Это доказывает первую часть леммы. Аналогично доказывается вторая часть. □

Ниже, в доказательстве основной теоремы 2.1 мы будем пользоваться следующими утверждениями.

Лемма 2.3. *(см.[11] или [12]). Пусть R однородный многочлен двух переменных, τ, η [illegible], $|\tau| = |\eta| = 1$, $\tau \in \Sigma(R)$, $(\tau, \eta) = 0$, $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$, $\{\psi_s\}_{s=1}^{\infty}$ последовательности вещественных чисел таких, что $\varphi_s \to \infty$, $\psi_s/\varphi_s \to 0$ при $s \to \infty$*

и $\xi^s = \varphi_s\tau + \psi_s\eta (s = 1, 2, ...)$. *Если кратность корня* τ *многочлена* $R : l_R(\tau) \geq l$, *то существует число* $c_0 > 0$ *такое, что*

$$|R(\xi^s)| \leq c_0 \, |\varphi_s|^{m-l} |\psi_s|^l, \; s = 1, 2, \ldots$$

При этом, если $l_R(\tau) = l$, *то существует число* $c > 0$ *такое, что для всех достаточно больших* s

$$c^{-1} \, |\varphi_s|^{m-l} |\psi_s|^l \leq |R(\xi^s)| \leq c |\varphi_s|^{m-l} |\psi_s|^l.$$

Лемма 2.4. *Пусть* $\Re \subset \mathbb{R}^{2,+}$ *в.п. многоугольник, для которого* $\rho(\Re) < 1$, $\tau, \eta \in \mathbb{R}^{2,0}$, $|\tau| = |\eta| = 1$, $(\tau, \eta) = 0$, $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$, $\{\psi_s\}_{s=1}^{\infty}$ *последовательности вещественных чисел такие, что* $\varphi_s \to \infty$, $\psi_s/\varphi_s \to 0$ *при* $s \to \infty$ *и* $\xi^s = \varphi_s \tau + \psi_s \eta \;\; (s = 1, 2, ...)$. *Тогда существует число* $c > 0$ *такое, что для всех достаточно больших* s $c^{-1} \, |\varphi_s|^{\rho(\Re)} \leq h_{\Re}(\xi^s) \leq c \, |\varphi_s|^{\rho(\Re)}$.

Доказательство. Так как в условиях леммы, очевидно, с некоторой постоянной $c_1 > 0$ и для достаточно больших s справедливы неравенства $c_1^{-1} |\varphi_s| \leq |\xi_j^s| \leq c_1 \, |\varphi_s| \; (j = 1, 2)$ и, следовательно неравенство

$$c_2^{-1} |\varphi_s| \leq |\xi^s| \leq c_2 \, |\varphi_s|$$

с некоторой постоянной $c_2 > 0$, то требуемое неравенство непосредственно следует из определения числа $\rho(\Re)$ и функции $h_{\Re}$. □

Пусть для данного $\delta \in (-\infty, 1]$ максимум в правой части (2.4) достигается для индексов $j_k = j_k(\delta) \;\; (k = 1, ..., M_1 = M_1(\delta)) : \;\; f(\delta) = e_1^{j_k} + \delta e_2^{j_k} \quad k = 1, ..., M_1$. Обозначим

$$a_1(\delta) = \max_{1 \leq k \leq M_1} e_2^{j_k}, \;\; a_2(\delta) = \min_{1 \leq k \leq M_1} e_2^{j_k}. \tag{2.7}$$

Лемма 2.5. *Пусть* $\Re \subset \mathbb{R}^{2,+}$ *в.п. многоугольник, для которого* $\rho(\Re) < 1$, $\tau = (1, 0)$, $\eta = (0, 1)$, $\theta \in (-\infty, 1]$, $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$, $\{t_s\}_{s=1}^{\infty}$ *последовательности вещественных чисел таких, что* $\varphi_s \to \infty$, $\varphi_s^{\theta} \, t_s / \varphi_s \to 0$ *при* $s \to \infty$, *и* $\xi^s = \varphi_s \tau + \varphi_s^{\theta} \, t_s \eta = (\varphi_s, \varphi_s^{\theta} \, t_s) \;\; (s = 1, 2, \ldots)$. *Пусть также для любого* $\varepsilon > 0$ $\varphi_s^{\varepsilon} \, t_s \to \infty$, $\varphi_s^{-\varepsilon} \, t_s \to 0$ *при* $s \to \infty$. *Тогда существует число* $c > 0$ *такое, что для всех достаточно больших* s *имеем*

$$c^{-1} \, |\varphi_s|^{f(\theta)} \, |t_s|^{a(\theta)} \leq h_{\Re}(\xi^s) \leq c \, |\varphi_s|^{f(\theta)} \, |t_s|^{a(\theta)}, \tag{2.8}$$

где (см. обозначения (2.7)) $a(\theta) = a_1(\theta)$, *для тех* s *для которых* $|t_s| \geq 1$ *и* $a(\theta) = a_2(\theta)$, *для тех* s *для которых* $|t_s| \leq 1$.

Доказательство. Пусть $\delta \in (-\infty, 1]$, обозначим $\mathcal{D}(\delta) = \mathcal{D}(\delta, f) := \{j : 1 \le j \le M,\ e_1^j + \theta\, e_2^j = f(\theta)\}$. Из определения чисел $a_1(\delta)$, $a_2(\delta)$ (см. (2.7)) и последовательности $\{\xi^s := (\varphi_s, \varphi_s^\theta t_s)\}$ имеем $a_1(\delta) = \max\limits_{j\in\mathcal{D}(\delta)}\{e_2^j\}$, $a_2(\delta) = \min\limits_{j\in\mathcal{D}(\delta)}\{e_2^j\}$ и

$$h_{\Re}(\xi) := \sum_{\nu\in\Re^0} |(\xi^s)^\nu| = 1 + \sum_{j=1}^M |(\xi^s)^{e^j}| = 1 + \sum_{j=1}^M \varphi_s^{e_1^j+\theta e_2^j}\, t_s^{e_2^j}$$

$$= 1 + \sum_{j\in\mathcal{D}(\delta)} \varphi_s^{f(\theta)}\, t_s^{e_2^j} + \sum_{j\notin\mathcal{D}(\delta)} \varphi_s^{e_1^j+\theta e_2^j}\, t_s^{e_2^j}. \tag{2.9}$$

Так как $f(\theta) \ge \rho_1 > 0$ (см. доказательство леммы 2.2) и $e_1^j + \theta e_2^j < f(\theta)$ при $j \in \mathcal{D}(\delta)$, то из условия леммы на последовательность $\{\varphi_s; t_s\}$ при $s \to \infty$ имеем

$$\sum_{j\notin\mathcal{D}(\delta)} \varphi_s^{e_1^j+\theta e_2^j}\, t_s^{e_2^j} = o\Big(\sum_{j\in\mathcal{D}(\delta)} \varphi_s^{f(\theta)}\, t_s^{e_2^j}\Big).$$

В силу этого из (2.9) имеем с некоторыми положительными постоянными c_1, c_2

$$1 + \varphi_s^{f(\theta)}\,[t_s^{a_1(\theta)} + t_s^{a_2(\theta)}] \le 1 + \varphi_s^{f(\theta)} \sum_{j\in\mathcal{D}(\delta)} t_s^{e_2^j} \le 1 + \sum_{j=1}^M \varphi_s^{e_1^j+\theta e_2^j}\, t_s^{e_2^j} = h_{\Re}(\xi^s)$$

$$= 1 + \left[\sum_{j\in\mathcal{D}(\delta)} + \sum_{j\notin\mathcal{D}(\delta)}\right] \varphi_s^{e_1^j+\theta e_2^j}\, t_s^{e_2^j} \le \left[1 + \sum_{j\in\mathcal{D}(\delta)} \varphi_s^{f(\theta)}\, t_s^{e_2^j}\right]$$

$$+ c_1 \left[1 + \sum_{j\in\mathcal{D}(\delta)} \varphi_s^{f(\theta)}\, t_s^{e_2^j}\right] = (1+c_1)\,[1 + \sum_{j\in\mathcal{D}(\delta)} \varphi_s^{f(\theta)}\, t_s^{e_2^j}]$$

$$\le c_2 \left[1 + \varphi_s^{f(\theta)}\,(t_s^{a_1(\theta)} + t_s^{a_2(\theta)})\right].$$

Так как для достаточно больших s $\varphi_s^{f(\theta)}\,(t_s^{a_1(\theta)} + t_s^{a_2(\theta)}) > 1$, то это доказывает соотношение (2.8). □

Замечание 2.2. *В силу леммы 2.2* $f(\theta) = \rho_1 = e_1^1$ *при* $\theta \le \lambda_2^1/\lambda_1^1$ *и, так как* $1 \in \mathcal{D}(\delta)\,(e_2^1 = 0)$, *то* $a_2(\theta) = 0$ *при* $\theta \le \lambda_2^1/\lambda_1^1$.

3. Основной результат

Для m-однородного многочлена R_m положим $\Sigma(R_m) = \{\xi \in \mathbb{R}^2, |\xi| = 1, R_m(\xi) = 0\}$, а через $l(\eta) = l_{R_m}(\eta)$ обозначим кратность нуля $\eta \in \Sigma(R_m)$.

Теорема 3.1. *Пусть* $P = P_m$ *и* $Q = Q_k$ *однородные многочлены двух переменных, порядков соответственно* m *и* k, $\Re \subset \mathbb{R}^{2,+}$ *в.п. многоугольник, построенный на наборе* $\{e^j\}_{j=0}^M$ *для которого* $\rho(\Re) < 1$. *Тогда* $Q \prec^{\Re} P$ *в том и только в том случае, когда*

1) $k \le m$

2) $l_P(\tau) - l_Q(\tau) \le (m-k)/(1-\rho(\Re))\ \ \forall \tau \in \Sigma(P_m) \cap \mathbb{R}^{2,0}$

3) $l_P(\tau) - l_Q(\tau) \le (m-k)/(1-\rho_1)$, *если* $\tau = \pm(1,0) \in \Sigma(P)$

4) $l_P(\tau) - l_Q(\tau) \le (m-k)/(1-\rho_2)$, *если* $\tau = \pm(0,1) \in \Sigma(P)$.

Доказательство необходимости проводится аналогично доказательству необходимости теоремы 3.1 работы [15] с применением лемм 2.3 - 2.5 настоящей работы.

Достаточность. Предположим обратное, что при выполнении условий 1) - 4) теоремы, существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$\tilde{Q}(\xi^s, h_{\Re}(\xi^s))/\tilde{P}(\xi^s, h_{\Re}(\xi^s)) \to \infty. \tag{3.1}$$

Положим $\tau^s = \xi^s/|\xi^s|$. Так как $|\tau^s| = 1$ для всех $s = 1, 2, \dots$, то, за счет выбора подпоследовательности, можно считать, что последовательность $\tau^s = \xi^s/|\xi^s|$ сходится к некоторой точке $\tau, |\tau| = 1$. Пусть $\eta \in \mathbb{R}^2$, $|\eta| = 1$ и $(\eta, \tau) = 0$. Так как пара (τ, η) является базисом в $\mathbb{R}^2$, то точки ξ^s можно представить в виде $\xi^s = \varphi_s \tau + \psi_s \eta$, где $\varphi_s = (\xi^s, \tau)$, $\psi_s = (\xi^s, \eta)$ $s = 1, 2, \dots$ Из условий $\tau_s \to \tau$ и $|\xi^s| \to \infty$ следует, что $\varphi_s > 0$ для достаточно больших s (не умаляя общности, будем считать, что для всех s). При этом, очевидно, что с некоторой постоянной $c_{10} > 0$ имеем

$$c_{10}^{-1} \varphi_s \le |\xi^s| \le c_{10} \varphi_s, \ s = 1, 2, \dots$$

За счет выбора вектора η и подпоследовательности последовательности $\{\xi^s\}$ можно считать, что $\psi_s \ge 0$ для всех $s = 1, 2, \dots$, при этом $\psi_s/\varphi_s \to 0$ при $s \to \infty$.

Проводя аналогичные рассуждения как при доказательстве достаточности теоремы 3.1 работы [15] с применением лемм 2.1 - 2.4 и соотношения (3.1) настоящей работы получим, что либо $\tau = \pm(1,0)$ либо $\tau = \pm(0,1)$. При этом последовательность $\{\xi^s\}$ представляется в виде $\xi^s = \varphi_s \tau + \varphi_s^{\vartheta} t_s \eta$ $(s = 1, 2, \dots)$, где $\vartheta = \delta_1$ при $\tau = \pm(1,0)$, $\vartheta = \delta_2$ при $\tau = \pm(0,1)$, и для любого $\varepsilon > 0$ $t_s \varphi_s^{\varepsilon} \to +\infty$, $t_s \varphi_s^{-\varepsilon} \to 0$, при $s \to \infty$.

Так как оба случая рассматриваются аналогично, то рассмотрим только случай $\tau = \pm(1,0)$. Вследствии того, что $f(\delta_1) = \delta_1$ (см. лемму 2.1), то в силу лемм 2.3 и 2.5 при достаточно больших s имеем с некоторыми положительными постоянными $c_1, \dots, c_4$, получаем

$$\sum_{\alpha} |D^{\alpha} P(\xi^s)|\ h_{\Re}^{|\alpha|}(\xi^s) \ge |P(\xi^s)| + \sum_{|\alpha| = l_P(\tau)} |D^{\alpha} P(\xi^s)|\ h_{\Re}^{|\alpha|}(\xi^s)$$

$$\geq c_1 \left[\varphi_s^{m-l_P} (\varphi_s^{\delta_1} t_s)^{l_P} + \varphi_s^{m-l_P(1-f(\delta_1))} t_s^{a(\delta_1)\, l_P} (1+o(1))\right]$$

$$\geq c_2 \varphi_s^{m-l_P(1-\delta_1)} (t_s^{l_P} + t_s^{a(\delta_1)\, l_P}). \tag{3.2}$$

$$\sum_\alpha |D^\alpha Q(\xi^s)|\, h_{\Re}^{|\alpha|}(\xi^s) \leq \left[\sum_{|\alpha|\leq l_Q} + \sum_{|\alpha|>l_Q}\right] |D^\alpha Q(\xi^s)| h_{\Re}^{|\alpha|}(\xi^s)$$

$$\leq c_3 [\sum_{|\alpha|\leq l_Q} \varphi_s^{k-|\alpha|-(l_Q-\alpha_2)} (\varphi_s^{\delta_1} t_s)^{l_Q-\alpha_2} (\varphi_s^{f(\delta_1)} t_s^{a(\delta_1)})^{|\alpha|}$$

$$+ \sum_{l_Q<|\alpha|\leq k} \varphi_s^{k-|\alpha|} (\varphi_s^{f(\delta_1)} t_s^{a(\delta_1)})^{|\alpha|}]$$

$$\leq c_4 \left[\sum_{|\alpha|\leq l_Q} \varphi_s^{k-|\alpha|(1-f(\delta_1))-(l_Q-\alpha_2)\,(1-f(\delta_1))-(l_Q-\alpha_2)(f(\delta_1)-\delta_1)}\, t_s^{l_Q-\alpha_2+a(\delta_1)\,|\alpha|}\right.$$

$$\left. + \sum_{l_Q<|\alpha|\leq k} \varphi_s^{k-|\alpha|(1-f(\delta_1))}\, t_s^{a(\delta_1)|\alpha|} + \sum_{l_Q<|\alpha|\leq k} \varphi_s^{k-|\alpha|(1-f(\delta_1))} t_s^{a(\delta_1)|\alpha|}\right]$$

$$= \varphi_s^{k-l_Q(1-\delta_1)} (t_s^{l_Q} + t_s^{a(\delta_1) l_Q})(1+o(1)). \tag{3.3}$$

Так как $\delta_1 \in [\rho_1, 1)$ (см. замечание 2.1), то в случае когда $m > k$ или $m - l_P(1-\rho_1) > k - l_Q(1-\rho_1)$ имеем $m - l_P(1-\delta_1) > k - l_Q(1-\delta_1)$. В силу этого оценки (3.2) и (3.3) противоречат соотношению (2.2). Если же $m = k$ и $m - l_P(1-\rho_1) = k - l_Q(1-\rho_1)$, то вследствии того, что $\rho_1 < 1$ (см. (2.3)) получим, что $l_P = l_Q$ и опять оценки (2.3) и (2.4) противоречат соотношению (2.2). Полученные противоречия доказывают часть теоремы, относящейся к достаточности. □

Из доказанной теоремы и леммы 3.3 работы [6] непосредственно следует

Следствие 2.1. Пусть P_m и $\Re$ те же, что в теореме 2.1, $Q = Q_1 + ... + Q_M$, где Q_k k–однородный многочлен ($k = 1, ..., M$.) Тогда $Q \prec^{\Re} P_m$ в том и только в том случае, когда

1) $M \leq m$ и для всех $k = 0, 1, ..., M$
2) $l_{P_m}(\tau) - l_{Q_k}(\tau) \leq (m-k)/(1-\rho(\Re))\ \ \forall \tau \in \Sigma(P_m) \cap \mathbb{R}^{2,0}$
3) $l_{P_m}(\tau) - l_{Q_k}(\tau) \leq (m-k)/(1-\rho_1)$, если $\tau = \pm(1,0) \in \Sigma(P_m)$
4) $l_{P_m}(\tau) - l_{Q_k}(\tau) \leq (m-k)/(1-\rho_2)$, если $\tau = \pm(0,1) \in \Sigma(P_m)$.

Abstract. In this paper, for homogeneous polynomials of two variables we find necessary and sufficient conditions for comparison of the weighted strengths of these polynomials. The conditions are stated in terms of orders and multiplicities of the zeros of the considered polynomials.

Список литературы

[1] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, **2**, Springer (1983).
[2] L. Gårding, "Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients", Acta Math., **85**, 1 – 62, (1951).
[3] E. Larson, "Generalized hyperbolicity", Ark. Math., **7**, 11 – 32, (1967).
[4] D. Calvo, Multianisotropic Gevrey Classes and Cauchy Problem, Ph.D Theses, Universita degli studi di Pisa (2000).
[5] L. Rodino, Linear Partial Differential operators in Gevrey spaces, Word Scientific, Singapore (1993).
[6] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "О гиперболических многочленах с весом", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **49**, но. 5, 23 – 40 (2014).
[7] Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О решениях типа Жевре гипоэллиптических уравнений", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **33**, но. 1, 1 – 13 (1998).
[8] L. Svensson, "Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part", Ark.Math. **8**, 145 – 162 (1968).
[9] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "О задаче Коши в мультианизотропных классах Жевре для уравнений гиперболических с весом", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **50**, но. 3, 36 – 46 (2014).
[10] Г. Г. Казарян, "О добавлении младших членов к дифференциальным полиномам", Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика, **9**, но. 6, 473 – 485 (1974).
[11] O. R. Gabrielyan, H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, On inequaliities for polynomials in two variables, Mathematical Inequalities and Applications, **12**, no. 2, April (2009).
[12] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "Behaviour at infinity of polynomials of two variables", Topics in Analysis and its Applications, NATO sciense series, "Kluwer", Dortricht, Boston, London, 163 - 190 (2004).
[13] V. P. Mikhailov, "On the behaviour at infinity of a class of polynomials", Proc. Steklov Inst. Math., **91**, 59 – 81 (1967).
[14] S. Gindikin and L. R. Volevich, The Method of Newton's Polyhedron in Theory of Partial Differential Equations, Kluwer, Academic Publishers, London (1992).
[15] В. Н.Маргарян, "Сравнение двумерных многочленов", Изв. НАН Армении, **51**, но. 1, 38 – 53 (2016).

Поступила 19 сентября 2016