

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ $\mathcal{L}$ -ВИНЕРА-ХОПФА

А. Г. КАМАЛЯН, М. И. КАРАХАНИЯН, А. О. ОГАНЕСЯН

Ерсвандский государственный университет¹

Институт Математики НАН Армении

E-mails: armen.kamalyan@ysu.am; m_karakhanyan@ysu.am; artur.hovhannisyan@ysu.am

Аннотация. Заменой в определении оператора свертки преобразования Фурье, спектральным преобразованием самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля на оси $\mathcal{L}$, введены понятия оператора $\mathcal{L}$ -свертки и оператора $\mathcal{L}$ -Винера-Хопфа. Рассматривается случай безотражательного потенциала с одним собственным значением. Выявлена связь с интегральным оператором Винера-Хопфа. В случае кусочно-непрерывного символа исследованы свойства фредгольмовости и обратимости оператора $\mathcal{L}$ -Винера-Хопфа.

MSC2010 numbers: 47G10, 47B35.

Ключевые слова: оператор $\mathcal{L}$ -свертки; безотражательный потенциал; оператор $\mathcal{L}$ -Винера-Хопфа.

1. ОПЕРАТОРЫ $\mathcal{L}$ -СВЕРТКИ И $\mathcal{L}$ -ВИНЕРА-ХОПФА

Пусть $\mathcal{L}$ – максимальный симметрический оператор порожденный дифференциальным выражением $(\ell y)(x) = -y'' + q(x)y(x)$ с вещественным потенциалом q удовлетворяющим условию $(1 + |x|)|q(x)| \in L_1(\mathbb{R})$, а $u^-(x, \lambda)$, $u^+(x, \lambda)$ ($x, \lambda \in \mathbb{R}$) решения уравнения $\ell y = \lambda^2 y$, являющиеся собственными функциями левой и правой задач рассеяния и представляющие собой полный ортонормированный набор собственных функций непрерывного спектра (см. [1], [2]).

Условимся далее через $m(a)$ ($a \in L_\infty(\mathbb{R})$) и τ обозначать операторы действующие в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ ($1 \leq p < \infty$) по формулам $m(a)y = ay$, $(\tau y)(x) = y(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, а через I будем обозначать тождественный оператор, каждый раз указывая пространство, где он действует.

¹Исследование выполнено при поддержке ГКН МОН РА в рамках совместного научного проекта YSU-SFU-16/1 финансируемого в результате международного конкурса РА-ЕГУ-ЮФУ РФ-2016

Определим операторы $U_{\mp}$, $U : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, по формулам

$$(U_{\mp}y)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_{\mp}(x, \lambda)y(x) dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$U = m(\chi_+)U_- + m(\chi_-)\tau U_+,$$

где $\chi_{\pm}$ — характеристическая функция множества $\mathbb{R}_{\pm}$ ($\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $\mathbb{R}_- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$), а интегралы понимаются в смысле сходимости по норме $L_2(\mathbb{R})$. Операторы $U_{\mp}$, U ограничены и кроме того оператор U является частичной изометрией и удовлетворяет равенствам

$$(1.1) \quad U^*U = I - P, \quad UU^* = I,$$

где P — проектор в $L_2(\mathbb{R})$ на собственное подпространство H соответствующее дискретному спектру оператора $\mathcal{L}$ (см. [1], [3], [4]).

Обозначим через $\mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$, $1 \leq p \leq \infty$, множество всех функций $a \in L_{\infty}(\mathbb{R})$ обладающих следующим свойством: если $y \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$, то $U^*m(a)Uy \in L_p(\mathbb{R})$ и $\|U^*m(a)Uy\| \leq c_p \|y\|_p$, где постоянная c_p не зависит от y . Для $a \in \mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$, оператор $W_{\mathcal{L}}^0(a)$ определенный по формуле $W_{\mathcal{L}}^0(a) = U^*m(a)U$ ограничен в $L_2(\mathbb{R})$ и может быть непрерывным образом продолжен с $L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$ до ограниченного оператора действующего в $L_2(\mathbb{R})$, который также будем обозначать через $W_{\mathcal{L}}^0(a)$. Этот оператор мы будем называть оператором $\mathcal{L}$ -свертки, с $\mathcal{L}$ символом a .

Определим операторы $\pi_{\pm} : L_p(\mathbb{R}) \rightarrow L_p(\mathbb{R}_{\pm})$, $\pi_{\pm}^0 : L_p(\mathbb{R}_{\pm}) \rightarrow L_p(\mathbb{R})$, ($1 \leq p \leq \infty$) по формулам $(\pi_{\pm}y)(x) = y(x)$, $x \in \mathbb{R}_{\pm}$, $(\pi_{\pm}^0y)(x) = y(x)$ при $x \in \mathbb{R}_{\pm}$ и $(\pi_{\pm}^0y)(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}_{\mp}$. Оператор $W_{\mathcal{L}}(a) = \pi_+ W_{\mathcal{L}}^0(a) \pi_+^0 : L_p(\mathbb{R}) \rightarrow L_p(\mathbb{R})$ будем называть интегральным оператором $\mathcal{L}$ -Винера-Хопфа. Заметим, что в случае $q = 0$, оператор U совпадает с преобразованием F :

$$(Fy)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} y(s) ds, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad y \in L_2(\mathbb{R}).$$

По этой причине, в случае $q = 0$, операторы $W_{\mathcal{L}}^0(a)$ и $W_{\mathcal{L}}(a)$ совпадают соответственно с оператором свертки $W(a)$ и с оператором Винера-Хопфа (см. [5]). Условимся также в случае $q = 0$ множество $\mathcal{M}_{p,\mathcal{L}}$ обозначать через $\mathcal{M}_p$. Как известно (см. [5]) $\mathcal{M}_p$ является банаховой алгеброй с нормой $\|a\|_{\mathcal{M}_p} = \|W^0(a)\|_{\mathcal{L}(L_p)}$.

2. БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

В данной работе мы исследуем свойства фредгольмовости и обратимости оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$ в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$, в случае оператора $\mathcal{L}$ соответствующему безотражательному потенциалу с дискретным спектром состоящим из одного собственного значения $(i\mu)^2$ и с правым нормировочным коэффициентом c_+ . Коэффициент прохождения $t(\lambda)$ в указанном случае определяется равенством $t(\lambda) = (\lambda + i\mu)(\lambda - i\mu)^{-1}$ (см. [2], теорема 3.5.1).

Как известно (см. [1],[2]) операторы преобразования действующие по формулам

$$(\mathcal{K}_+ y)(x) = y(x) + \int_x^\infty K_+(x, t)y(t) dt, \quad (\mathcal{K}_- y)(x) = y(x) + \int_{-\infty}^x K_-(x, t)y(t) dt,$$

ограничены соответственно в пространствах $L_p(\gamma, \infty)$, $L_p(-\infty, \gamma)$, $1 \leq p \leq \infty$, при всех $\gamma \in \mathbb{R}$. Ядра $K_\pm$ определяются из уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко и в нашем случае (см., например, [6]) справедливы равенства

$$K_\pm(x, t) = -\varphi(x)\psi_\pm(t),$$

где $\varphi(x) = \sqrt{\mu/2} \operatorname{ch}^{-1} \mu(x - \xi)$, $\psi_\pm(t) = \sqrt{2\mu} e^{\mp \mu(t - \xi)}$, а $\xi = \mu^{-1} \ln [c_+(2\mu)^{-1/2}]$.

Заметим также, что (см. [6]) потенциал определяется равенством

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} (K^+(x, e)) = -\frac{2\mu^2}{\operatorname{ch}^2 \mu(x - \xi)},$$

а $\varphi(x)$ является нормированной собственной функцией соответствующей собственному значению $(i\mu)^2$. Кроме того, имеем

$$(2.1) \quad u^-(x, \lambda) = t(\lambda) \left(1 - \frac{1}{\mu - i\pi} \psi_+(x) \varphi(x) \right) e^{i\lambda x}, \quad u^+(x, \lambda) = t(\lambda) u^-(x, -\lambda).$$

Рассмотрим операторы $V_\pm, \Gamma_\pm : L_p(\mathbb{R}_\pm) \rightarrow L_p(\mathbb{R}_\pm)$, $\Gamma : L_p(\mathbb{R}) \rightarrow L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, определенные по формулам:

$$\begin{aligned} (V_+ y)(x) &= \int_0^x y(t) dt, & (V_- y)(x) &= \int_x^0 y(t) dt, \\ \Gamma_\pm &= I - m(\psi_\pm) V_\pm m(\varphi), & \Gamma &= \pi_+^0 \Gamma_+ \pi_+ + \pi_-^0 \Gamma_- \pi_- . \end{aligned}$$

Заметим, что $\Gamma_\pm = \mathcal{K}_\pm^*$.

Лемма 2.1. Операторы $\Gamma_\pm, \Gamma$ обратимы. Обратные операторы определяются равенствами

$$(2.2) \quad \Gamma_\pm^{-1} = I + m(\varphi) V_\pm m(\psi_\pm), \quad \Gamma^{-1} = \pi_+^0 \Gamma_+^{-1} \pi_+ + \pi_-^0 \Gamma_-^{-1} \pi_- .$$

Доказательство. Пусть операторы $\Gamma_{\pm}^{-1}$ определены формулами (2.2). Пользуясь равенствами $(2\mu)^{-1}\varphi\psi_{\pm}^2 = \psi_{\pm} - \varphi$ и $(2\mu)^{-1}(\psi_{\pm}^2)' = \mp\psi_{\pm}^2$ с помощью интегрирования по частям несложно убедиться, что

$$m(\varphi)V_{\pm}m(\psi_{\pm}^2)V_{\pm}m(\varphi) = -m(\psi_{\pm})V_{\pm}m(\varphi)V_{\pm}m(\psi_{\pm}).$$

Последнее означает, что $\Gamma_{\pm}^{-1}\Gamma_{\pm} = I$.

Обозначим через $\hat{\varphi}$ первообразную функции φ^2 . Меняя местами интегралы в выражении $V_{\pm}m(\varphi^2)V_{\pm}m(\psi_{\pm})y$, где y , определенная на $\mathbb{R}_{\pm}$, непрерывная финитная функция, несложно убедиться, что $V_{\pm}m(\varphi^2)V_{\pm}m(\psi_{\pm}) = \pm m(\hat{\varphi})V_{\pm}m(\psi_{\pm}) \mp V_{\pm}m(\psi_{\pm}\hat{\varphi})$. Следовательно, $\Gamma_{\pm}\Gamma_{\pm}^{-1} = I + m(\varphi \mp \psi_{\pm}\hat{\varphi})V_{\pm}m(\psi_{\pm}) - m(\psi_{\pm})m(\varphi \mp \psi_{\pm}\hat{\varphi})$. Легко видеть, что $(\varphi\psi_{\pm}^{-1} - \hat{\varphi})' = 0$, т.е. $\varphi \mp \hat{\varphi}\psi_{\pm} = d_{\pm}\psi_{\pm}$, где $d_{\pm}$ — числа и потому $\Gamma_{\pm}\Gamma_{\pm}^{-1} = I$. Вторая формула (2.2) очевидным образом следует из определения Γ . $\square$

Обозначим через S оператор сингулярного интегрирования, определенный равенством

$$(Sy)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(s)}{s-x} ds, \quad x \in \mathbb{R},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Как известно (см. [7]), оператор S ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Пусть $P_{\pm} = (I \pm S)/2$. Из результатов [4] следует справедливость равенств

$$(2.3) \quad U_- = (m(t)P_+ + P_-)F\Gamma, \quad U_+ = \tau(P_+ + m(\bar{t})P_-)F\Gamma,$$

$$(2.4) \quad U = (m(t\chi_+ + \chi_-)P_+ + m(\chi_+ + \bar{t}\chi_-)P_-)F\Gamma.$$

В частности операторы $U_{\pm}$, U связаны соотношениями $U = m(\chi_+ + \bar{t}\chi_-)U_-$, $U = \tau(\chi_+ + \bar{t}\chi_-)U_+$ и потому

$$(2.5) \quad W_{\mathcal{L}}^0(a) = U_-^*m(a)U_- = U_+^*m(a)U_+,$$

а с учетом (1.1) и очевидного равенства $r^* = \tau$, получаем

$$(2.6) \quad U_-^*U_- = U_+^*U_+ = I - P, \quad U_-U_-^* = U_+U_+^* = I.$$

Пользуясь формулами (2.1), (2.3)-(2.6), несложно убедиться, что в случае, когда $a = 1 + F_k$, где $k \in L_1(\mathbb{R})$, имеем

$$(W_{\mathcal{L}}^0(a)y)(x) = y(x) - \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)y(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} K(x,s)y(s) ds, \quad x \in \mathbb{R},$$

где

$$K(x, s) = k(x - s) + \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x - s - s') e^{\mu s' \operatorname{sgn}(x - s - s')} k(s') ds' \varphi(x) \varphi(s).$$

Аналогично,

$$(W_{\mathcal{L}}(a)y)(x) = y(x) - \varphi(x) \int_0^{\infty} \varphi(s) \eta(s) ds + \int_0^{\infty} K(x, s) y(s) ds.$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В следующей теореме получена связь между операторами $W_{\mathcal{L}}(a)$ и $W(a)$.

Теорема 3.1. Для $a \in \mathcal{M}_{p, \mathcal{L}}$, $1 \leq p < \infty$, справедливо равенство

$$(3.1) \quad W_{\mathcal{L}}(a) = \mathcal{K}_+ W(a) \Gamma_+.$$

Доказательство. Пусть $y \in L_p(\mathbb{R}_+) \cap L_2(\mathbb{R}_+)$. Пользуясь тождествами $P_{\pm} F = F m(\chi_{\pm})$ (см. [5]) из формул (2.3)-(2.5) получим

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{L}}(a)y &= \pi_+ U_-^* m(a) \pi_+^0 y = \pi_+ \Gamma^* (m(\chi_+) W^0(a) m(\chi_+) + m(\chi_-) W^0(a) m(\chi_+) + \\ &+ m(\chi_+) W^0(\bar{t}a) m(\chi_-) + m(\chi_-) W^0(a) m(\chi_-)) \Gamma \pi_+^0 y \\ &= \mathcal{K}_+ \pi_+ (m(\chi_+) + m(\chi_-)) \begin{pmatrix} W^0(a) & W^0(\bar{t}a) \\ W^0(ta) & W^0(a) \end{pmatrix} \pi_+^0 \Gamma_+ y \\ &= \mathcal{K}_+ \pi_+ W^0(a) \pi_+^0 \Gamma_+ y = \mathcal{K}_+ W(a) \Gamma_+ y. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор $W(a)$ одновременно с $W_{\mathcal{L}}(a)$ допускает непрерывное продолжение в $L_p(\mathbb{R})$. $\square$

Следствие 3.1. Множество $\mathcal{M}_{p, \mathcal{L}}$, $1 \leq p < \infty$, совпадает с $\mathcal{M}_p$.

Как известно (см. [5]) любая, имеющая конечное число разрывов кусочно-постоянная функция на $\mathbb{R}$ принадлежит $\mathcal{M}_p$, $1 < p < \infty$. Замыкание алгебры кусочно-постоянных функций в алгебре $\mathcal{M}_p$ обозначим через PC_p . Имеет место следующее включение $PC_p \subset PC_2 = PC$ (см. [5]), где PC класс функций a , имеющих предельные значения $a(x \pm 0)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, в том числе и на бесконечности $a(\infty \pm 0) = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} a(x)$. В свою очередь $C_p \subset PC_p$, где C_p замыкание алгебры Винера $W(\mathbb{R}) = \{c + F_k; c \in \mathbb{C}, k \in L_1(\mathbb{R})\}$ в $\mathcal{M}_p$. Кроме того PC_p содержит функции ограниченной вариации (см. [5]).

Сопоставим каждой функции $a \in PC_p$ (см. [5]) функцию $a_p : \dot{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$ ($\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) — соответственно одноточечная и двухточечная компактификации $\mathbb{R}$) определенную по формуле:

$$a_p(x, \xi) = \frac{1}{2}(a(x-0) + a(x+0)) + \frac{1}{2}(a(x-0) - a(x+0)) \operatorname{cth} \pi \left(\frac{i}{p} + \xi \right).$$

Функция a может иметь не более чем счетное число точек разрывов $a(x_k - 0) \neq a(x_k + 0)$ ($x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$). Функция $a_p(x, \xi)$ непрерывна в следующем смысле (см. [5]): точки $a(x_k - 0)$ и $a(x_k + 0)$ соединяются дугой окружности, из которой отрезок соединяющий точки $a(x_k - 0)$ и $a(x_k + 0)$ виден под углом $2\pi/\max\{p, p'\}$, ($p' = p/p - 1$) расположенная справа (слева) от отрезка при $p > 2$ (при $p > 2$), а при $p = 2$ дуга совпадает с отрезком соединяющим эти точки. В случае $a_p(x, \xi) \neq 0$ индекс $\operatorname{ind} a_p$ определяется как приращение аргумента $(2\pi)^{-1} \operatorname{arg} a_p(x, \xi)$, когда x пробегает $\mathbb{R}$ и в точках разрыва $x_k \in \mathbb{R}$ параметр ξ пробегает от $-\infty$ до ∞ .

Под обобщенной p -факторизацией функции $a \in L_\infty(\mathbb{R})$ будем понимать представление $a(\lambda) = a_-(\lambda)(\lambda - i)^\kappa(\lambda + i)^{-\kappa}a_+(\lambda)$, где $(\lambda - i)^{-2/p}a_- \in P_-(L_p(\mathbb{R}))$, $(\lambda - i)^{-2/p'}a_-^{-1} \in P_-(L_{p'}(\mathbb{R}))$, $(\lambda + i)^{-2/p'}a_+ \in P_+(L_{p'}(\mathbb{R}))$, $(\lambda + i)^{-2/p}a_+^{-1} \in P_+(L_p(\mathbb{R}))$, а κ — целое число называемое p -индексом функции a .

Из теоремы 3.1 и результатов [5] § 4 следуют следующие утверждения.

Теорема 3.2. Пусть $a \in PC_p$, $1 < p < \infty$. Для того, чтобы оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ был нормально разрешимым в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$, необходимо и достаточно чтобы $\inf |a_p(\lambda, \xi)| \neq 0$ ($\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, $\xi \in \bar{\mathbb{R}}$). При выполнении этого условия оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ обратим, обратим слева, обратим справа в зависимости от того является ли число $\operatorname{ind} a_p$ равным нулю, положительным или отрицательным соответственно. Причем $\operatorname{Ind} W_{\mathcal{L}}(a) = -\operatorname{ind} a_p$.

Теорема 3.3. Пусть $a \in PC_p$, $1 < p < \infty$ и $\inf |a_p(\lambda, \xi)| \neq 0$ ($\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, $\xi \in \bar{\mathbb{R}}$). Тогда a допускает обобщенную p' -факторизацию ($p' = p/(p - 1)$), $a = a_- r_\kappa a_+$, $r_\kappa(\lambda) = (\lambda - i)^\kappa(\lambda + i)^{-\kappa}$, $\kappa = \operatorname{ind} a_p$, и обратный слева (справа) к $W_{\mathcal{L}}(a)$ на плотном множестве в $L_p(\mathbb{R}_+)$ при $\kappa \geq 0$ (при $\kappa \leq 0$) записывается в виде

$$\begin{aligned} (W_{\mathcal{L}}(a))_\ell^{-1} &= \Gamma_+^{-1} W(r_{-\kappa}) W(a_+^{-1}) W(a_-^{-1}) \mathcal{K}_+^{-1} \\ ((W_{\mathcal{L}}(a))_r)^{-1} &= \Gamma_+^{-1} W(a_+^{-1}) W(a_-^{-1}) W(r_{-\kappa}) \mathcal{K}_+^{-1}. \end{aligned}$$

Если $\kappa < 0$, то $\ker W_{\mathcal{L}}(a) = \operatorname{span} \{ \Gamma_+^{-1} \pi_+ F^{-1} g_k; k = 1, \dots, -\kappa \}$, где $g_k(\lambda) = (1 - i\lambda)^{-k}$. Если $\kappa > 0$, то уравнение $W_{\mathcal{L}}(a)\varphi = f$ имеет решение в $L_p(\mathbb{R}_+)$ тогда и

только тогда, когда

$$\int_0^{\infty} (\mathcal{K}_+^{-1} f)(t) \overline{h_k(t)} dt \quad k = 1, \dots, \infty, \quad \text{где } h_k = \pi_+ F^{-1} (\bar{a}_-^{-1} g_{+k}).$$

Заметим, что $\mathcal{M}_1 = W(\mathbb{R})$ (см. [5]) и по этой причине требование $a \in W(\mathbb{R})$ является естественным, при исследовании оператора $W_{\mathcal{L}}(a)$ в пространстве $L_1(\mathbb{R})$. На основе работы [8] и формулы (3.1) результаты аналогичного характера могут быть сформулированы и в этом случае.

Abstract. By replacement in the definition of the convolution operator of Fourier transform by a spectral transform of a selfadjoint Sturm-Liouville operator on the axis $\mathcal{L}$, the concepts of $\mathcal{L}$ -convolution and $\mathcal{L}$ -Wiener-Hopf operators are introduced. The case of the reflectorless potentials with a single eigenvalue is considered. A relationship between the Wiener-Hopf and $\mathcal{L}$ -Wiener-Hopf operators is established. In the case of piecewise continuous symbol the Fredholm property and invertibility of the $\mathcal{L}$ -Wiener-Hopf operator are investigated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Д. Фаддеев, "Обратная задача квантовой теории рассеяния. II", Итоги науки и техники, Сер. Современ. пробл. мат., 3, 93 – 180 1974.
- [2] В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Киев, Наукова думка (1977).
- [3] И. Г. Хачатрян, "Об обратной задаче рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков на всей оси", Изв. АН СССР, Матем., 18, no. 5, 394 – 402 (1983).
- [4] А. Г. Камалян, И. Г. Хачатрян, А. Б. Персеян, "Разрешимость интегральных уравнений с операторами типа $\mathcal{L}$ -свертки", Изв. НАН Армении, сер. Математика, 29, no. 6, 31 – 81 (1994).
- [5] Р. В. Дудучава, Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики, Тбилиси, Мецниереба, (1973).
- [6] Ф. Калоджеро, А. Дегасперис, Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений, Мир, Москва (1985).
- [7] I. Gohberg, N. Krupnik, One-Dimensional Linear Singular Integral Equations. I, Operator Theory: Advances and Applic., 53, Birkhäuser Verlag, Basel (1992).
- [8] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, 13, no. 5(83), 3 – 120 (1958).

Поступила 8 ноября 2017