Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 3, 2018, стр. 3 – 10.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

Г. Г. ГЕВОРКЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mail: *ggg@ysu.am*

Аннотация. Найдены формулы представления коэффициентов рядов Хаара, сходящихся к нулю всюду, кроме быть может некоторого конечного множества.

MSC2010 numbers: 42C10; 42C20.

Ключевые слова: Система Хаара; ряд Хаара; единственность.

1. Введение

В математической литературе встречаются разные определения системы Хаара. Они между собой отличаются определением функций Хаара в точках разрыва. Здесь мы приведем определение системы Хаара, совпадающее с определением, даннвм самим А. Хааром в [1].

Для $n = 2^k + m$, $k = 0, 1, 2, ...$, $m = 1, 2, ..., 2^k$, положим

$$\Delta_n = \left[\frac{m-1}{2^k}, \frac{m}{2^k}\right], \quad \Delta_n^+ = \left(\frac{m-1}{2^k}, \frac{2m-1}{2^{k+1}}\right), \quad \text{и} \quad \Delta_n^- = \left(\frac{2m-1}{2^{k+1}}, \frac{m}{2^k}\right).$$

Система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ определяется следующим образом: $\chi_1(x) = 1$, когда $x \in [0, 1]$, а для $n = 2^k + m$, $k = 0, 1, 2, ...$, $m = 1, 2, ..., 2^k$, полагается

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & \text{когда } x \in \Delta_n^+, \\ -2^{\frac{k}{2}}, & \text{когда } x \in \Delta_n^-, \\ 0, & \text{когда } x \notin \Delta_n. \end{cases}$$

В остальных точках n-ая функция Хаара $\chi_n(x)$ равна арифметическому среднему односторонных пределов в этой точке. Если $n = 2^k + m$, $k = 0, 1, 2, ...$, $m = 1, 2, ..., 2^k$, то k назовем рангом числа n и отрезка Δ_n.

В работах [2]-[4] доказана теорема единственности типа Кантора для системы Хаара, т.е. если ряд по системе Хаара всюду сходится к нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю. А в работе [5] установлено, что одноточечное множество $\{\frac{1}{2}\}$ не является множеством единственности для системы Хаара, т.е.

[1]Исследования выполнены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 15T 1A006

существует нетривиальный ряд по системе Хаара, который всюду, за исключением точки $\frac{1}{2}$, сходится к нулю. В работе [6] показано, что любое одноточечное множество не является множеством единственности для системы Хаара. В [6] также установлена следующая теорема.

Теорема 1.1. (Ф. Г. Арурюнян, А. А. Талалян) *Пусть ряд Хаара*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x) \tag{1.1}$$

всюду, кроме, быть может некоторого счетного множества, сходится к всюду конечной интегрируемой функции f и выполняется

$$a_k \chi_k(x) = o_x(k), \quad \text{для всех } x \in [0,1].$$

Тогда ряд (1.1) является рядом Фурье-Хаара функции f.

Введем обозначения. Ряд (1.1) формально обозначим через $\mathcal{S}$, а его частичные суммы обозначим через $\mathcal{S}_n$. Для $\Delta \in \{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ через $(\mathcal{S}, \Delta)$ обозначим

$$(\mathcal{S}, \Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{\Delta} \chi_k(t) dt. \tag{1.2}$$

Заметим, что на самом деле выражение в правой части (1.2) является конечной суммой и

$$(\mathcal{S}, \Delta_n) = (\mathcal{S}_m, \Delta_n) = (\mathcal{S}_{n-1}, \Delta_n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \int_{\Delta_n} \chi_k(t) dt, \quad \text{когда } m \geq n-1. \tag{1.3}$$

Если $(\mathcal{S}, \Delta)$ рассмотреть как функцию от Δ, при фиксированном ряде (1.1), то получим некоторую квазимеру соответствующую ряду (1.1). Рассмотрение таких квазимер имеет многочисленные применения в теории рядов Хаара. Об этом можно узнать из работы [7], [8] и из других работ цитированных в [7], [8].

Здесь и далее $\Delta_n^\circ = (\alpha, \beta)$, если $\Delta_n = [\alpha, \beta]$. Отметим, что если конечное число интервалов Δ_n° не пересекаются и $\Delta = \bigcup \Delta_i$, то

$$(\mathcal{S}, \Delta) = \sum_i (\mathcal{S}, \Delta_i). \tag{1.4}$$

2. Основные результаты

В настоящей работе мы выясним, каким может быть ряд по системе Хаара, который всюду, за исключением некоторого конечного множества, сходится к нулю. С этой целью сначала докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть для некоторого Δ_n выполняется*

$$(\mathcal{S}, \Delta_n) \neq 0 \tag{2.1}$$

и ряд (1.1) на Δ_n по мере сходится к нулю. Тогда существует $x_0 \in \Delta_n$ такая, что

$$\sup_K \left| \sum_{k=1}^{K} a_k \chi_k(x_0) \right| = \infty. \tag{2.2}$$

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть $\Delta_n = [\alpha, \beta]$ и для него выполняется (2.1). Тогда одно из следующих утверждений верно: существует $\Delta_{n'} \subset (\alpha, \beta)$ такое, что $(\mathcal{S}, \Delta_{n'}) \neq 0$,*

$$\max(\sup_n |\mathcal{S}_n(\alpha)|, \sup_n |\mathcal{S}_n(\beta)|) = \infty. \tag{2.3}$$

Доказательство. Допустим для всех n', с условием $\Delta_{n'} \subset (\alpha, \beta)$, выполняется $(\mathcal{S}, \Delta_{n'}) = 0$. Пусть k_0 больше ранга n на два. Тогда для $j = \alpha 2^{k_0}$ будем иметь $\Delta_n = \bigcup_{i=1}^{4} \Delta_{j+i}$ и поэтому (см. (1.4))

$$(\mathcal{S}, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{4} (\mathcal{S}, \Delta_{j+i}).$$

В силу нашего допущения, хотя бы одно из $(\mathcal{S}, \Delta_{j+1})$, $(\mathcal{S}, \Delta_{j+4})$ не равно нулю. Допустим $(\mathcal{S}, \Delta_{j+1}) \neq 0$ (случай $(\mathcal{S}, \Delta_{j+4}) \neq 0$ рассматривается аналогично). Тогда будем иметь

$$0 \neq d := (\mathcal{S}, \Delta_{j+1}) = \sum_{i=1}^{2^{k-k_0}} (\mathcal{S}, \Delta_{\alpha 2^k + i}) = (\mathcal{S}, \Delta_{\alpha 2^k + 1}) = (\mathcal{S}_{2^k}, \Delta_{\alpha 2^k + 1}). \tag{2.4}$$

Через w_k обозначим то постоянное значение частичной суммы $\mathcal{S}_{2^k}$, которое она принимает внутри $\Delta_{\alpha 2^k+1}$. Из (2.4) следует, что $d = 2^{-k} w_k$, или $w_k = 2^k d$. Через u_k обозначим значение функции $a_{\alpha 2^{k-1}+1} \chi_{\alpha 2^{k-1}+1}$ на $\Delta^+_{\alpha 2^{k-1}+1}$. Отметим, что $\Delta^+_{\alpha 2^{k-1}+1}$ совпадает с $\Delta^\circ_{\alpha 2^k+1}$. Поэтому $u_k = w_k - w_{k-1} = d \cdot 2^{k-1}$. Из определения системы Хаара следует, что $a_{\alpha 2^{k-1}+1} \chi_{\alpha 2^{k-1}+1}(\alpha) = \frac{u_k}{2} = d \cdot 2^{k-2}$. Следовательно, $\sup_n |a_n \chi_n(\alpha)| = \infty$ и доказано выполнение (2.3). Лемма 2.1 доказана.

3. Доказательство Теоремы 2.1 и ее применения

Пусть выполнено (2.1) и $\Delta_n = [\alpha_0, \beta_0]$. С учетом леммы 2.1 можем утверждать, что либо

$$\max(\sup_n |\mathcal{S}_n(\alpha_0)|, \sup_n |\mathcal{S}_n(\beta_0)|) = \infty, \tag{3.1}$$

либо

$$\text{существует } \Delta_{n_1'} = [\alpha_1', \beta_1'] \subset (\alpha_0, \beta_0), \text{ такой что } (\mathcal{S}, \Delta_{n_1'}) \neq 0. \tag{3.2}$$

Если выполняется (3.1), то теорема доказана. Если же выполнено (3.2), то найдется $\Delta_{n_1} \subset \Delta_{n_1'}$, ранга k, такое что

$$\max\{|\mathcal{S}_{2^k}(\Delta_{n_1}^+)|, |\mathcal{S}_{2^k}(\Delta_{n_1}^-)|\} > 1. \tag{3.3}$$

Действительно, если бы не выполнялось бы (3.3), то это означало, что суммы $\mathcal{S}_n(x)$ ограничены на $\Delta_{n_1'}$ и поскольку $\mathcal{S}(x)$ на Δ_n по мере сходится к нулю, то имели бы

$$(\mathcal{S}, \Delta_{n_1'}) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Delta_{n_1'}} \mathcal{S}_n(x)dx = 0.$$

Последнее противоречит (3.2). Через $\Delta_{n_1} = [\alpha_1, \beta_1]$ обозначим замыкание отрезка $\Delta_{n_1}^+$ или $\Delta_{n_1}^-$, на котором реализируется максимум в левой части (3.3).

Итак, либо теорема доказана, либо найдется отрезок $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha_0, \beta_0)$ такое, что $|(\mathcal{S}, \Delta_{n_1})| = |\mathcal{S}_{n_1}(z)| > 1$, где $z \in (\alpha_1, \beta_1)$. Продолжая процесс, либо на каком то шаге завершим доказательство, либо получим последовательности n_k, $\Delta_{n_k} = [\alpha_k, \beta_k]$ такие, что

$$\Delta_{n_k} \subset (\alpha_{n_{k-1}}, \beta_{n_{k-1}}), \quad k = 1, 2, ..., \tag{3.4}$$

и $|\mathcal{S}_{n_k}(z)| > k$ для $z \in (\alpha_k, \beta_k)$. Из (3.4) следует, что существует единственная точка x_0, принадлежащая всем интервалам (α_k, β_k). Поэтому $|\mathcal{S}_{n_k}(x_0)| > k$, для всех натуральных k. Теорема 2.1 доказана. Из доказанной теоремы немедленно следует

Следствие 3.1. (Теорема типа Кантора) *Если ряд (1.1) сходится по мере к нулю и в любой точке x выполняется*

$$\sup_n |\mathcal{S}_n(x)| < \infty, \tag{3.5}$$

то все коэффициенты этого ряда равны нулю.

Известно, что если ряд (1.1) есть ряд Фурье-Хаара ограниченной функции f, то $\sup_n |S_n(x)| \le \|f\|_\infty$. Поэтому из следствия 3.1 вытекает

Следствие 3.2. *Если ряд (1.1) сходится по мере к ограниченной функции f и в любой точке x выполняется (3.5), то ряд (1.1) является рядом Фурье-Хаара этой функции.*

Отметим, что следствие 3.2 не содержится в теореме 1.1, поскольку ряд Фурье-Хаара ограниченной функции не объязан сходится всюду, кроме некоторого счетного множества.

Применяя теорему 2.1, докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть ряд (1.1) всюду, кроме точки $x_0 \in [0,1]$ сходится к нулю. Тогда*

$$a_n = C_1\chi_n(x_0-0) + C_2\chi_n(x_0+0), \quad n = 0,1,2,...$$

если x_0 двоично-рациональня точка из $(0,1)$, и $a_n = C\chi_n(x_0)$, в остальных случаях, где C, C_1, C_2 некоторые постоянные.

Доказательство теоремы 3.1. Для фиксированного ряда (1.1) и отрезка Δ_n обозначим

$$\Delta_n(S) = \frac{1}{|\Delta_n|}(S,\Delta_n) = \frac{1}{|\Delta_n|}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{\Delta_n} \chi_k(t)dt. \tag{3.6}$$

Заметим, что $\Delta_n(S)$ совпадает со значением $S_{n-1}(x)$ во внутренних точках отрезка Δ_n. Очевидно также, что если $\Delta_n = \Delta_{n_1} \bigcup \Delta_{n_1+1}$, то

$$\Delta_n(S) = \frac{1}{2}\Delta_{n_1}(S) + \frac{1}{2}\Delta_{n_1+1}(S). \tag{3.7}$$

Сначала рассмотрим случай, когда x_0-двоично-иррациональная или $x_0 \in \{0,1\}$. Тогда для каждого k существует единственное $n_k = 2^k + i_k$, $1 \le i_k \le 2^k$, со свойством $\Delta_{n_k} \ni x_0$. Пусть

$$A_k := \Delta_{n_k}(S). \tag{3.8}$$

В силу теоремы 3.2 и обозначения (3.6), если $n = 2^k + i$, $i = 1,...,2^k$, и $n \ne n_k$, то $\Delta_n(S) = 0$. Поэтому из (3.7) и (3.8) имеем

$$A_k = 2A_{k-1} = \ldots = 2^k A_0 \text{ и } A_0 = a_0.. \tag{3.9}$$

Следовательно, для $n = 2^k + i$, $i = 1, ..., 2^k$, имеем

$$(3.10)\qquad \frac{1}{|\Delta_n|}\int_{\Delta_n}\sum_{m=1}^{2^{k+1}} a_m\chi_m(t)dt = \Delta_n(\mathcal{S}) = \begin{cases} 0, & \text{когда } n \neq n_k \\ 2^{k+1}a_0, & \text{когда } n = n_k. \end{cases}$$

Отметим, что сумма $\sum_{m=1}^{2^{k+1}} a_m\chi_m(x)$ принимает постоянные значения на интервалах $(\frac{i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^{k+1}})$, $i = 1, ..., 2^{k+1}$, а значения в точках $\frac{i}{2^{k+1}}$ равны среднему арифметическому односторонних пределов в этих точках. Система $\{\chi_m(x)\}_{m=1}^{2^{k+1}}$ образует базис в таком конечномерном пространстве (см. [9]). Учитывая, что (см. [9])

$$(3.11)\qquad \sum_{m=1}^{2^{k+1}}\chi_m(x_0)\chi_m(x) = \begin{cases} 2^{k+1}, & \text{когда } x \in (\frac{i_k-1}{2^{k+1}}, \frac{i_k}{2^{k+1}}) \\ 0, & \text{когда } x \notin [\frac{i_k-1}{2^{k+1}}, \frac{i_k}{2^{k+1}}]. \end{cases}$$

из (3.10) получим , что для любого k имеет место

$$\sum_{m=1}^{2^{k+1}} a_m\chi_m(x) = a_0\sum_{m=1}^{2^{k+1}}\chi_m(x_0)\chi_m(x).$$

В рассматриваемом случае теорема доказана.

В случае когда $x_0 \in (0,1)$ и двоично-рациональная, начиная с некоторого k_0 существует единственное n_k, $n_k = 2^k + i_k$, $0 \le i_k \le 2^k - 2$, такое что $\Delta_{n_k} \ni x_0$ и $\Delta_{n_k+1} \ni x_0$. Обозначим $A_k = \Delta_{n_k}(\mathcal{S})$ и $B_k = \Delta_{n_k+1}(\mathcal{S})$. Тогда, аналогично (3.9), получим $A_k = 2^{k-k_0}A_{k_0}$ и $B_k = 2^{k-k_0}B_{k_0}$.

Поэтому, для $n = 2^k + i$, $i = 1, ..., 2^k$, имеем

$$(3.12)\qquad \Delta_n(\mathcal{S}) = \begin{cases} 0, & \text{когда } n \neq n_k \text{ и } n \neq n_k + 1, \\ 2^{k-k_0}A_{k_0}, & \text{когда } n = n_k, \\ 2^{k-k_0}B_{k_0}, & \text{когда } n = n_k + 1. \end{cases}$$

Пусть x_k и y_k некоторые внутренние точки отрезков Δ_{n_k} и Δ_{n_k+1}, соответственно. Тогда из (3.12) и (3.11) получаем

$$\sum_{m=1}^{2^{k+1}} a_m\chi_m(x) = 2^{k-k_0}A_{k_0}\mathcal{I}_{\Delta_{n_k}}(x) + 2^{k-k_0}B_{k_0}\mathcal{I}_{\Delta_{n_k+1}}(x) =$$

$$2^{-k_0}A_{k_0}\sum_{m=1}^{2^{k+1}}\chi_m(x_m)\chi_m(x) + 2^{-k_0}B_{k_0}\sum_{m=1}^{2^{k+1}}\chi_m(y_m)\chi_m(x) =$$

$$2^{-k_0}A_{k_0}\sum_{m=1}^{2^{k+1}}\chi_m(x_0 - 0)\chi_m(x) + 2^{-k_0}B_{k_0}\sum_{m=1}^{2^{k+1}}\chi_m(x_0 + 0)\chi_m(x) =$$

$$\sum_{m=1}^{2^{k+1}}(2^{-k_0}A_{k_0}\chi_m(x_0 - 0) + 2^{-k_0}B_{k_0}\chi_m(x_0 + 0))\chi_m(x).$$

Теорема 3.1 доказана.

Аналогично теореме 3.1 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть ряд (1.1) по мере сходится к нулю и всюду, кроме, быть может, точек x_i, $i = 1, 2, .., k$, выполняется (3.5). Тогда*

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} (A_i \chi_n(x_i - 0) + B_i \chi_n(x_i + 0)), \tag{3.13}$$

где A_i, B_i некоторые постоянные. И наоборот любой ряд (1.1) с коэффициентами (3.13), всюду, кроме, быть может, точек x_i, $i = 1, 2, .., k$ сходится к нулю.

Предложение 3.1. *Если частичные суммы ряда (1.1), с коэффициентами (3.13), в некоторой точке x_{i_0}, $i_0 \in \{1, 2, ...k\}$, ограничены, то $A_{i_0} = B_{i_0} = 0$ и поэтому ряд (1.1) в точке x_{i_0} сходится к нулю.*

Действительно, если коэффициенты ряда (1.1) имеют вид (3.13), то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} (A_i \chi_n(x_i - 0) + B_i \chi_n(x_0 + 0)) \chi_n(x) =: \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}^{(i)}(x).$$

Поскольку каждый ряд $\mathcal{S}^{(i)}(x)$ сходится к нулю, когда $x \neq x_i$, то ограниченность частичных сумм ряда (1.1) в точке x_{i_0} влечет $\sup_n |\chi_n(x_0)(A_{i_0}\chi_n(x_{i_0} - 0) + B_{i_0}\chi_n(x_i + 0))| < \infty$. А это возможно только, если $A_{i_0} = B_{i_0} = 0$.

В заключении отметим, что легко проверить справедливость следующего утверждения.

Предложение 3.2. *Пусть x_0 двоично-рациональная точка из $(0, 1)$. Тогда ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\chi_n(x_0 + 0) - \chi_n(x_0 - 0)) \chi_n(x)$$

нетривиальный, всюду, кроме точки x_0 сходится к нулю и выполняется

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{2^k} (\chi_n(x_0 + 0) - \chi_n(x_0 - 0)) \chi_n(x_0) = 0.$$

Abstract. In this paper we obtain representation formulas for coefficients of Haar series that converge to zero everywhere except possibly some finite set.

Список литературы

[1] A. Haar, "Zur Theorie der orthogonalen Functionensysteme", Math. Annalen, **69**, 331 – 371 (1910).
[2] Ф. Г. Арутюнян, "О рядах по системе Хаара", ДАН Арм. ССР, **38:3**, 129 – 134 (1964).
[3] М. Б. Петровская, "О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности", Изв. АН СССР, сер. матем., **28:4**, 773 – 798 (1964).
[4] В. А. Скворцов, "Теорема типа Кантора для системы Хаара", Вестник МГУ, сер. матем., **5**, 3 – 6 (1964).
[5] G. Faber, "Über die Orthogonalfunctionen des Herrn Haar", Jahresbericht Deutsch. Math. Vereinigung, **19**, 104 – 112 (1910).
[6] Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян, "О единственности рядов по системам Хаара и Уолша", Изв. АН СССР, сер. матем., **28:6**, 1391 – 1408 (1964).
[7] М. Г. Плотников, "Квазимеры, Хаусдорфовы p-меры и ряды Уолша и Хаара", Изв. РАН, сер. матем., **74:4**, 157 – 188 (2010).
[8] М. Г. Плотников, Ю. А. Плотникова, "Разложение двоичных мер и объединение замкнутых $\mathcal{U}$-множеств для рядов по системе Хаара", Матем. сб., **207:3**, 137 – 152 (2016).
[9] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва, АФЦ (1999).

Поступила 20 июня 2017