Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 2, 2018, стр. 47 – 60.

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ И ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. А. ДАРБИНЯН, А. Г. ТУМАНЯН

Российско-Армянский (Славянский) Университет[1]
E-mails: *arman.darbinyan@rau.am*, *ani.tumanyan92@gmail.com*

Аннотация. Работа посвящена априорным оценкам специального вида и фредгольмовости дифференциальных операторов, действующих в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$. Изучаются условия на символ оператора, необходимые для выполнения априорной оценки. При определенных условиях на коэффициенты получены априорные оценки в соотвествующих весовых пространствах.

MSC2010 number: 35H30, 47A53.

Ключевые слова: фредгольмовость; индекс оператора; априорная оценка; полуэллиптический оператор.

1. Введение и основные понятия и определения

В работе исследуется фредгольмовость и выполнение специальных априорных оценок для дифференциальных операторов со специальными переменными коэффициентами в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$. Для рассматриваемых операторов устанавливается связь с полуэллиптичностью.

Для сингулярных интегро-дифференциальных операторов, определенных на гладких компактных многообразиях с краем и без края М. С. Аграновичем (см. [1]) получена априорная оценка, установлена эквивалентность фредгольмовости, выполнения априорной оценки и эллиптичности в определенных соболевских пространствах. В работе [2] получены априорные оценки для полуэллиптических операторов с постоянными коэффициентами в ограниченной области и на основе этих оценок доказана фредгольмовость таких операторов. В [3] получено

[1]Работа выполнена в рамках тематического финансирования РАУ из средств МОБНРФ и при поддержке тематического финансирования комитета науки при МОН РА (код проекта SCS N 15T-1A197).

необходимое и достаточное условие фредгольмовости для произвольных операторов с постоянными коэффициентами в анизотропных пространствах в $\mathbb{R}^n$. Инвариантность индекса полуэллиптических операторов на шкале анизотропных пространств исследована в работе [4].

Определение 1.1. *Ограниченный линейный оператор A, определенный на всем банаховом пространстве X и действующий в банахово пространство Y, называется n-нормальным, если выполняются следующие условия:*

(1) *ядро оператора A является конечномерным ($\dim Ker(A) < \infty$);*
(2) *область значений оператора A замкнуто ($Im(A) = \overline{Im(A)}$);*

и называется фредгольмовым, если кроме того

(3) *коядро оператора A конечномерно ($\dim coker(A) = \dim Y/Im(A) < \infty$).*

Определение 1.2. *Ограниченный линейный оператор A, определенный на всем банаховом пространстве X и действующий в банахово пространство Y, называется d-нормальным, если выполняются следующие условия:*

(1) *ядро сопряженного оператора A^* конечномерно ($\dim Ker(A^*) < \infty$) ;*
(2) *область значений оператора A замкнуто ($Im(A) = \overline{Im(A)}$).*

Индексом фредгольмова оператора A назовем разность между размерностью ядра и коядра:

$$ind\,(A) = \dim Ker(A) - \dim coker(A).$$

Пусть $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{R}^n$ - n-мерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}_+$ - множество неотрицательных целых чисел, $\mathbb{Z}_+^n$ - множество n-мерных мультииндексов, $\mathbb{N}^n$ - множество n-мерных мультииндексов с натуральными компонентами.

Для $k \in \mathbb{R}$ и $\nu \in \mathbb{N}^n$ обозначим

$$H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S' : \widehat{u} - \text{функция}, \|u\|_{k,\nu} = \left(\int |\widehat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|_\nu)^{2k}\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

где $|\xi|_\nu = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^{2\nu_i}\right)^{1/2}$, S' пространство обобщенных функций медленного роста, $\widehat{u}$ - преобразование Фурье распределения u.

Замечание 1.1. *Из равенства Парсеваля следует, что при $k \in \mathbb{Z}_+$ норма в пространстве $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна следующей:*

$$\|u\|'_{k,\nu} = \left(\sum_{(\alpha:\nu) \le k} \int |D^\alpha u(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Пусть $C(\mathbb{R}^n)$ множество непрерывных функций. Для $r \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ обозначим

$$C^{r,\nu}(\mathbb{R}^n) := \left\{a(x) : D^\beta a(x) \in C(\mathbb{R}^n),\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\beta a(x)| < \infty, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n \ s.t.\ (\beta : \nu) \le r\right\},$$

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}_+} C^{r,\nu}(\mathbb{R}^n),$$

$$Q = \{g(x) \in C(\mathbb{R}^n) : g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n\},$$

$$Q^{r,\nu} = \left\{g(x) \in C^{r,\nu}(\mathbb{R}^n) : g(x) \in Q \text{ и } \frac{1}{g(x)} \rightrightarrows 0, \frac{|D^\beta g(x)|}{g(x)} \rightrightarrows 0 \text{ при } |x| \to \infty,\right.$$

$$\left.\beta \in \mathbb{Z}_+^n, 0 < (\beta : \nu) \le r\right\}.$$

Для $k \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ и $q \in Q$ обозначим $H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ множество измеримых функций $\{u\}$ с нормой

$$\|u\|_{k,\nu,q} = \sum_{(\alpha:\nu) \le k} \|D^\alpha u \cdot q^{(k-(\alpha:\nu))}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$P(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu) \le s} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{1.1}$$

где $s \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \nu \in \mathbb{N}^n$, $(\alpha : \nu) = \frac{\alpha_1}{\nu_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\nu_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, D_j = i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, a_\alpha(x) \in C(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим

$$P_s(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu) = s} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{1.2}$$

главную часть дифференциального выражения $P(x, \mathbb{D})$, а

$$P_s(x, \xi) = \sum_{(\alpha:\nu) = s} a_\alpha(x) \xi^\alpha \tag{1.3}$$

символ главной части $P(x, \mathbb{D})$. Обозначим

$$L(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu) < s} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{1.4}$$

младшие члены дифференциального выражения $P(x, \mathbb{D})$.

Определение 1.3. *Дифференциальная форма $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптична в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если $P_s(x_0, \xi) \ne 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \ne 0$. Дифференциальная форма $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптична в $\mathbb{R}^n$, если $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптична в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$.*

Для положительного числа N и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$K_N = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le N\}, \quad K_N(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \le N\}.$$

2. Необходимые условия выполнения априорных оценок

Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geq s, q \in Q$ и коэффициенты дифференциальной формы $P(x, \mathbb{D})$ вида (1.1) удовлетворяют условиям:

$$|D^\beta a_\alpha(x)| \leq C_{\alpha,\beta}\, q(x)^{(s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu))} \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n\ (\alpha:\nu) \leq s, (\beta:\nu) \leq k-s.$$

Нетрудно заметить, что $P(x, \mathbb{D})$ порождает ограниченный линейный оператор из $H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим этот оператор через $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$.

Теорема 2.1. *Пусть для дифференциальной формы $P(x, \mathbb{D})$ с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{2.1}$$

Тогда $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Предположим обратное, что $P(x, \mathbb{D})$ не полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то есть существуют $x^0, \xi^0 \in \mathbb{R}^n$, $|\xi^0| \neq 0$ такие, что $P_s(x^0, \xi^0) = 0$.

Пусть N любое фиксированное положительное число и $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $supp\phi \subset K_N(x^0)$, $\|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 1$. Для положительного числа λ обозначим $\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi^0 = \left(\lambda^{\frac{1}{\nu_1}}\xi_1^0, \ldots, \lambda^{\frac{1}{\nu_n}}\xi_n^0\right)$ и $u_{\lambda,\nu}(x) = e^{i\left(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi^0, x\right)}\phi(x)$. Так как для произвольного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$D^\alpha u_{\lambda,\nu}(x) = \left(\xi^0\right)^\alpha \lambda^{(\alpha:\nu)} e^{i\left(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi^0, x\right)}\phi(x) + \sum_{0 \leq \beta < \alpha} C_\beta^\alpha \lambda^{(\beta:\nu)}\left(\xi^0\right)^\beta e^{i\left(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi^0, x\right)} D^{\alpha-\beta}\phi(x),$$

то для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, (\alpha:\nu) \leq k$ имеем

$$\|D^\alpha u_{\lambda,\nu} \cdot q^{(k-(\alpha:\nu))}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{(\alpha:\nu)} |\left(\xi^0\right)^\alpha| \|\phi \cdot q^{(k-(\alpha:\nu))}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + o(\lambda^{(\alpha:\nu)}).$$

Тогда

$$\|u_{\lambda,\nu}\|_{k,\nu,q} = \sum_{(\alpha:\nu)\leq k} \lambda^{(\alpha:\nu)} |\left(\xi^0\right)^\alpha| \|\phi \cdot q^{(k-(\alpha:\nu))}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + o(\lambda^k) \text{ при } \lambda \to \infty. \tag{2.2}$$

С другой стороны, в силу условия на коэффициенты $P(x, \mathbb{D})$ и учитывая, что $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $supp\phi \subset K_N(x^0)$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, (\alpha:\nu) \leq k-s$ при $\lambda \to \infty$ имеем

$$\|D^\alpha\left(P(x, \mathbb{D})\, u_{\lambda,\nu}\right) q^{(k-s-(\alpha:\nu))}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq |\left(\xi^0\right)^\alpha| \lambda^{(\alpha:\nu)}\lambda^s \cdot \max_{x\in K_N(x^0)} |P_s(x, \xi^0)| \|\phi \cdot q^{(k-s-(\alpha:\nu))}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + o(\lambda^k).$$

Отсюда при $\lambda \to \infty$ получим

$$\|Pu_{\lambda,\nu}\|_{k-s,\nu,q} \leq \sum_{(\alpha:\nu)\leq k-s} |\left(\xi^0\right)^\alpha| \lambda^{(\alpha:\nu)+s} \max_{x\in K_N(x^0)} |P_s(x, \xi^0)| \|\phi \cdot q^{(k-s-(\alpha:\nu))}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + o(\lambda^k). \tag{2.3}$$

Тогда из оценки (2.1) в силу (2.2)-(2.3), разделив на λ^k и устремив $\lambda \to \infty$, получим

$$\sum_{(\alpha:\nu)=k} |(\xi^0)^\alpha| \leq C \sum_{(\alpha:\nu)=k-s} |(\xi^0)^\alpha| \max_{x\in K_N(x^0)} |P_s(x,\xi^0)|. \tag{2.4}$$

Так как $\nu \in \mathbb{N}^n, k \in \mathbb{N}, k \geq s$, то нетрудно заметить, что существуют положительные числа δ_1 и δ_2 такие, что

$$rl \sum_{(\alpha:\nu)=k} |\xi^\alpha| \geq \delta_1|\xi|_\nu^k; \quad \sum_{(\alpha:\nu)=k-s} |\xi^\alpha| \leq \delta_2|\xi|_\nu^{k-s} \;\; \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

С учетом (2.5) из (2.4), получим

$$\delta_1|\xi^0|_\nu^k \leq C\delta_2|\xi^0|_\nu^{k-s} \max_{x\in K_N(x^0)} |P_s(x,\xi^0)|.$$

Обозначим $(\xi^0)' = \left(\frac{\xi_1^0}{|\xi^0|_\nu^{\frac{1}{\nu_1}}}, \ldots, \frac{\xi_n^0}{|\xi^0|_\nu^{\frac{1}{\nu_n}}}\right)$.

В силу $1/\nu$-однородности порядка s многочлена $P_s(x,\xi)$ имеем, что $P_s(x,\xi^0) = |\xi^0|_\nu^s P_s(x,(\xi^0)')$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно

$$\delta_1|\xi^0|_\nu^k \leq C\delta_2|\xi^0|_\nu^k \max_{x\in K_N(x^0)} |P_s\left(x,(\xi^0)'\right)|. \tag{2.6}$$

Так как $P_s\left(x^0,(\xi^0)'\right) = |\xi^0|_\nu^{-s} P_s(x^0,\xi^0)$, то в силу обратного предположения получим, что $P_s(x^0,(\xi^0)') = 0$. Следовательно в силу непрерывности коэффициентов $P_s(x,\mathbb{D})$ существует $N_0 > 0$ такое, что $\max_{x\in K_{N_0}(x^0)} |P_s(x,(\xi^0)')| < \frac{\delta_1}{C\delta_2}$. Последнее при $N = N_0$ противоречит оценке (2.6) и доказывает теорему. □

Теорема 2.2. (см. [5] теорема 7.1). *Пусть E, F, E_0 банаховы пространства, причем E компактно вложено в E_0. Пусть A ограниченный линейный оператор, действующий из E в F. Для того, чтобы оператор A, действующий из E в F, был n−нормальным необходимо и достаточно выполнение априорной оценки:*

$$\|x\|_E \leq C\left(\|Ax\|_F + \|x\|_{E_0}\right), \; \forall x \in E.$$

Из теоремы 2.2 получаем следующий результат.

Следствие 2.1. *Пусть $P(x,\mathbb{D})$ дифференциальная форма вида (1.1). Тогда для того, чтобы оператор $(P; H_q^{k,\nu})$ был n−нормальным необходимо и достаточно, чтобы с некоторой постоянной $C > 0$ и некоторым числом $M > 0$ выполнялась следующая оценка*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right), \quad \forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Легко убедиться, что из теоремы 2.1, в силу следствия 2.1 следует утверждение.

Теорема 2.3. *Пусть* $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ *фредгольмов оператор. Тогда* $P(x, \mathbb{D})$ *полуэллиптичен в* $\mathbb{R}^n$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения, являющегося аналогом предложения 1.8.1 из [8].

Предложение 2.1. *Пусть* $k_1 < k < k_2$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $C_\varepsilon > 0$ *такое, что для функций* $u \in H^{k_2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{k,\nu} \le \varepsilon \|u\|_{k_2,\nu} + C_\varepsilon \|u\|_{k_1,\nu}. \tag{2.7}$$

Замечание 2.1. *В общем случае из полуэллиптичности в* $\mathbb{R}^n$ *не следует выполнение априорной оценки (2.1).*

Проверим это для $q \equiv 1$. Рассмотрим полуэллиптическую в $\mathbb{R}^n$ дифференциальную форму $P(x, \mathbb{D})$ такую, что $a_\alpha(x) \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$ для всех $(\alpha : \nu) = s, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Покажем, что априорная оценка вида (2.1) не выполняется.

Для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обозначим $\Delta(P_s, \Omega) := \max\limits_{(\alpha:\nu)=s} \sup\limits_{x\in\Omega} |a_\alpha(x)|$.

Из условия на коэффициенты следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое что $\Delta(P_s, \mathbb{R}^n \backslash K_N) < \varepsilon$. Допустим, что имеет место оценка (2.1). Пусть $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), 0 \le \phi \le 1$ и $\phi(x) = 1$ при $x \in K_N$. Тогда из оценки (2.1) следует

$$\|(1-\phi)u\|_{k,\nu} \le C\left(\|P(1-\phi)u\|_{k-s,\nu} + \|(1-\phi)u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \quad \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{2.8}$$

Применяя Предложение 2.1, из (2.8) легко получить

$$\|(1-\phi)u\|_{k,\nu} \le C'\left(\Delta(P_s, \mathbb{R}^n \backslash K_N)\|(1-\phi)u\|_{k,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \quad \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Возьмем $\varepsilon < \frac{1}{C'}$. Тогда получим оценку

$$\|(1-\phi)u\|_{k,\nu} \le C''\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{2.9}$$

Докажем, что оценка (2.9) не может выполняться для всех $u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $0 \le \eta(x) \le 1$, $\eta(x) = 1$ при $|x| \le 1$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| \ge 2$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K_N$ такая, что $K_2(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K_N$.

Обозначим $u_m(x) = \eta(m \cdot (x - x_0))$, $m \in \mathbb{N}$, тогда для произвольного $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$D^\beta u_m(x) = m^{|\beta|}\left(D^\beta \eta\right)(m \cdot (x - x_0)).$$

Подставив $u_m(x)$ в (2.9), после простых преобразований получим

$$\sum_{(\beta:\nu)\le k} m^{|\beta|}\|D^\beta \eta\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le C_1\|\eta\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.10}$$

Очевидно, что оценка (2.10) не может выполняться для достаточно больших m. Получили противоречие, доказывающее, что для такого оператора априорная оценка вида (2.1) не выполняется.

3. Достаточные условия выполнения априорных оценок

Предложение 3.1. *Пусть $P(x,\mathbb{D})$ полуэллиптическая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма вида (1.1) с коэффициентами из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и постоянными коэффициентами в главной части. Тогда при произвольном $k \in \mathbb{R}, k > 0$ с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \quad \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим через $P_s(\xi)$ символ главной части $P(x,\mathbb{D})$. Из полуэллиптичности $P(x,\mathbb{D})$ следует, что существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$|P_s(\xi)| \geq \delta\, |\xi|_\nu^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Рассмотрим оператор

$$R_0 = F^{-1}\frac{|\xi|_\nu^s}{(1+|\xi|_\nu^s)P_s(\xi)}F. \tag{3.3}$$

Из оценки (3.2) следует, что R_0 является ограниченным линейным оператором, действующим из $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Тогда R_0P_s можно представить в виде

$$R_0P_s = I + T,$$

где $T = -F^{-1}\frac{1}{(1+|\xi|_\nu^s)}F$. Нетрудно заметить, что для произвольного $k \in \mathbb{R}$ оператор T является ограниченным линейным оператором из $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Тогда для $R_0P(x,D)$ получим следующее представление

$$\begin{aligned} R_0P(x,D) &= R_0P_s(D) + R_0L(x,D) = \\ &= I + T + R_0L(x,D). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Используя представление (3.4), в силу оценки (2.7), получим

$$\|u\|_{k,\nu} = \|R_0Pu - Tu - R_0Lu\|_{k,\nu} \leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \ \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Этим утверждение предложения 3.1 доказано. □

Для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ вида (1.1) обозначим

$$\Delta_0(P_s) = \max_{(\alpha:\nu)=s}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|a_\alpha(x) - a_\alpha(0)|, \quad \delta = \delta(P_s) = \min_{|\xi|_\nu=1}|P_s(0,\xi)|.$$

Предложение 3.2. *Пусть $P(x,\mathbb{D})$ полуэллиптическая дифференциальная форма в $\mathbb{R}^n$ вида (1.1) с коэффициентами из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда для произвольного $k\in\mathbb{R}$, $k\geq s$ существует $\eta_0=\eta_0(k,\delta)>0$ такое, что при $\Delta_0(P_s)<\eta_0$ с некоторой постоянной $C>0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu}\leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right),\quad \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{3.5}$$

Доказательство. Так как $P_s(0,\mathbb{D}): H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)\to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям предложения 3.1, то

$$\|u\|_{k,\nu}\leq C\left(\|P_s(0,D)u\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right),\quad \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{3.6}$$

Дифференциальную форму $P_s(0,\mathbb{D})$ представим в следующем виде

$$P_s(0,\mathbb{D})=P(x,\mathbb{D})-(P_s(x,\mathbb{D})-P_s(0,\mathbb{D}))-L(x,\mathbb{D}).$$

Используя это представление из оценки (3.6) с некоторой постоянной $C>0$ получим

$$\|u\|_{k,\nu}\leq C\left(\|P_s(0,D)u\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)\leq$$
$$\leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\|(P_s(x,D)-P_s(0,D))u\|_{k-s,\nu}+\|Lu\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right),$$
$$\forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда в силу Предложения 2.1 для произвольного $\varepsilon>0$ получим

$$\|u\|_{k,\nu}\leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\Delta_0(P_s)\|u\|_{k,\nu}+\varepsilon\|u\|_{k,\nu}+(C_1+1)\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right),\quad \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

При $C\varepsilon<1$ получим

$$\|u\|_{k,\nu}\leq \frac{C}{1-C\varepsilon}\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+(C_1+1)\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}+\Delta_0(P_s)\|u\|_{k,\nu}\right),\quad \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Пусть $\Delta_0(P_s)<\eta_0:=\frac{1-C\varepsilon}{C}$.

Тогда с некоторой постоянной $C_2>0$ отсюда получим требуемую оценку

$$\|u\|_{k,\nu}\leq C_2\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right),\quad \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

□

Рассмотрим следующий класс дифференциальных форм

$$P(x,\mathbb{D})=\sum_{(\alpha:\nu)\leq s}a^0_\alpha(x)q(x)^{(s-(\alpha:\nu))}D^\alpha+R(x,\mathbb{D}),$$

где $a^0_\alpha(x)\in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n), q\in Q$ и

$$R(x,\mathbb{D})=\sum_{(\alpha:\nu)\leq s}b_\alpha(x)D^\alpha,$$

где $D^\beta(b_\alpha(x))=o(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)})$ при $|x|\to\infty$ для всех $(\alpha:\nu)\leq s,(\beta:\nu)\leq k-s$.

Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$P^0(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a^0_\alpha(x_0) q(x)^{(s-(\alpha:\nu))} D^\alpha,$$

$$P^1(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a^0_\alpha(x_0) q(x)^{(s-(\alpha:\nu))} D^\alpha + R(x, \mathbb{D}).$$

Условие 3.1. *Пусть*

$$\sum_{(\alpha:\nu)\le s} a^0_\alpha(x_0) \lambda^{(s-(\alpha:\nu))} \xi^\alpha \ne 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

Предложение 3.3. *Пусть $q \in Q^{k,\nu}$ и $P^1(x,\mathbb{D})$ полуэллиптическая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма, удовлетворяющая условию 3.1. Тогда с некоторой постоянной $C > 0$ и числом $M > 0$ выполняется:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C \left(\|P^1 u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right), \quad \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{3.7}$$

Доказательство. При условиях предложения, в силу теоремы 4.1 из [6], с некоторой постоянной $C_1 > 0$ и числом $M_1 > 0$ выполняется оценка:

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C_1 \left(\|P^0 u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_{M_1})}\right), \quad \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{3.8}$$

Тогда из определения дифференциальной формы $P^0(x, \mathbb{D})$ получим

$$\|P^0 u\|_{k-s,\nu,q} \le \|P^1 u\|_{k-s,\nu,q} + \|Ru\|_{k-s,\nu,q}, \quad \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{3.9}$$

Так как $D^\beta(b_\alpha(x)) = o(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)})$ при $|x| \to \infty$ для всех $(\alpha:\nu) \le s$, $(\beta:\nu) \le k-s$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\frac{|D^\beta b_\alpha(x)|}{q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)}} < \epsilon, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus K_{N(\epsilon)}, (\alpha:\nu) \le s, \ (\beta:\nu) \le k-s.$$

Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), 0 \le \psi(x) \le 1$, $\psi(x) = 1$ при всех $|x| \le 1$ и $\psi(x) = 0$ при всех $|x| \ge 2$. Обозначим $\psi_\epsilon(x) = \psi(\frac{x}{N(\epsilon)}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

С некоторой постоянной $C_2 > 0$ получим

$$\|R((1-\psi_\varepsilon)u)\|_{k-s,\nu,q} \le C_2\, \varepsilon \|u\|_{k,\nu,q} \ , \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{3.10}$$

В силу полуэллиптичности $P^1(x,\mathbb{D})$, применяя априорную оценку из работы [7], получим

$$\|R(\psi_\varepsilon u)\|_{k-s,\nu,q} \le C_3 \|\psi_\varepsilon u\|_{k,\nu,q} \le C_4 \left(\|P^1 u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_{N(\varepsilon)})}\right). \tag{3.11}$$

Из оценок (3.8)–(3.11) с некоторой постоянной $C_5 > 0$ получим

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C_5 \left(\|P^1 u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right) + C_1 C_2 \varepsilon \|u\|_{k,\nu,q}, \tag{3.12}$$

где $M = \max(N(\varepsilon), M_1)$. Возьмем $\varepsilon < \frac{1}{C_1 C_2}$ и получим оценку (3.7) для оператора $(P^1; H^{k,\nu}_q)$. □

Для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$, $x_0 \in R^n$ и $q \in Q$обозначим

$$\Delta(P,q) := \max_{(\alpha:\nu)\leq s,(\beta:\nu)\leq k-s} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta \left(a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(x_0)\right) q(x)^{-(\beta:\nu)}|.$$

Теорема 3.1. *Пусть $q \in Q^{k,\nu}$ и $P(x,\mathbb{D})$ полуэллиптическая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма, удовлетворяющая условию 3.1. Тогда существует $\eta_0 = \eta_0(k) > 0$, такое что, при $\Delta(P,q) < \eta_0$ для оператора $\left(P; H^{k,\nu}_q\right)$ с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{3.13}$$

Доказательство. Обозначим

$$P^2(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} \left(a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(x_0)\right) q(x)^{(s-(\alpha:\nu))} D^\alpha.$$

Тогда $P(x,\mathbb{D})$ представляется в виде

$$P(x,\mathbb{D}) = P^1(x,\mathbb{D}) + P^2(x,\mathbb{D}). \tag{3.14}$$

Из предложения 3.3, в силу условий теоремы, имеем, что с некоторой постоянной $C > 0$ и числом $M > 0$

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C\left(\|P^1u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right), \quad \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{3.15}$$

Для $(P^2; H^{k,\nu}_q)$ с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$\|P^2u\|_{k-s,\nu,q} \leq C_1\Delta(P,q)\|u\|_{k,\nu,q}, \quad \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{3.16}$$

Учитывая (3.15)–(3.16) получим оценки

$$\begin{aligned}
\|u\|_{k,\nu,q} &\leq C\left(\|P^1u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right) \\
&\leq C\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + C\|P^2u\|_{k-s,\nu,q} + C\|u\|_{L_2(K_M)} \\
&\leq C\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + C_1C\Delta(P,q)\|u\|_{k,\nu,q} + C\|u\|_{L_2(K_M)}.
\end{aligned}$$

Взяв $\eta_0 < \frac{1}{CC_1}$, получим априорную оценку (3.13). □

4. Некоторые приложения априорных оценок для фредгольмовости

Предложение 4.1. *Пусть $k_0 > 0$ и с некоторой постоянной $C > 0$ при всех $k \in [0, k_0]$ выполняется оценка*

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \quad \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{4.1}$$

Если для $k_1 \in [0, k_0]$ оператор $\left(P; H^{k_1,\nu}\right)$ является n–нормальным, то для всех $k_2 \geq k_1, k_2 \in [0, k_0]$ оператор $\left(P; H^{k_2,\nu}\right)$ также будет n–нормальным.

Доказательство. Из n–нормальности оператора $\left(P; H^{k_1,\nu}\right)$ в силу следствия 2.1 имеем, что с некоторой постоянной $C_1 > 0$ и числом $R > 0$ выполняется

$$\|u\|_{k_1,\nu} \leq C_1 \left(\|Pu\|_{k_1-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_R)}\right), \quad \forall u \in H^{k_1,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{4.2}$$

Очевидно, что при $k_2 \geq k_1 \geq 0$ с некоторыми постоянными $C_2, C_3 > 0$ выполняются следующие оценки

$$\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|u\|_{k_1,\nu}, \quad \forall u \in H^{k_1,\nu}(\mathbb{R}^n) \tag{4.3}$$

$$\|Pu\|_{k_1-s,\nu} \leq C_3 \|Pu\|_{k_2-s,\nu}, \quad \forall u \in H^{k_2,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{4.4}$$

Из оценки (4.1) при $k = k_2$ в силу оценок (4.3)-(4.4) имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{k_2,\nu} &\leq C\left(\|Pu\|_{k_2-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right) \leq C\|Pu\|_{k_2-s,\nu} + CC_2\|u\|_{k_1,\nu} \leq \\ &\leq C\|Pu\|_{k_2-s,\nu} + C_4\left(\|Pu\|_{k_1-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_R)}\right) \leq \\ &\leq C_5\left(\|Pu\|_{k_2-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_R)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Следовательно, в силу следствия 2.1, оператор $\left(P; H^{k_2,\nu}\right)$ n–нормален. □

Рассмотрим дифференциальную форму, формально сопряженную для $P(x, \mathbb{D})$

$$P^*(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} D^\alpha \left(\overline{a_\alpha(x)}\,\cdot\right),$$

где $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 4.1. *Пусть $k > 0$ и $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптическая дифференциальная форма в $\mathbb{R}^n$ вида (1.1) с постоянными коэффициентами в главной части. Пусть оператор $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ нормально разрешим. Тогда $coker(P; H^{k,\nu})$ конечномерен тогда и только тогда, когда $Ker(P^*; H^{k,\nu})$ конечномерен, при этом*

$$\dim coker(P; H^{k,\nu}) = \dim Ker(P^*; H^{k,\nu}).$$

Доказательство. Зададим скалярное произведение в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$(u, v)_{k,\nu} = \int \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}(1 + |\xi|_\nu)^{2k} d\xi,$$

а скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать следующим образом:

$$(u, v)_0 = \int u(x)\overline{v(x)} dx$$

В силу замкнутости $Im(P; H^{k,\nu})$ существует $L \subset H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ такое, что

$$Im(P; H^{k,\nu}) \oplus L = H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Для $l \in \mathbb{R}$ обозначим $\Lambda^l := F^{-1}(1+|\xi|_\nu)^l F$ действующий из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-l,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Оператор Λ^l является изометрическим изоморфизмом из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-l,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Докажем, что $\Lambda^{2(k-s)}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между L и $Ker(P^*;H^{k,\nu})$.

Для произвольных $u,v\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ имеет место:

$$(Pu,v)_0=(u,P^*v)_0. \tag{4.6}$$

Продолжим $(\cdot,\cdot)_0$ на прямое произведение $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)\times H^{-k,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Равенство (4.6) сохранится для $u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n), v\in H^{-(k-s),\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\omega\in L$. Обозначим $v=\Lambda^{2(k-s)}\omega\in H^{-(k-s),\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Тогда с использованием равенства Планшареля получим

$$(Pu,v)_0=(Pu,\Lambda^{2(k-s)}w)_0=\int Pu\cdot\overline{F^{-1}\left((1+|\xi|_\nu)^{2(k-s)}\widehat{w}(\xi)\right)}dx$$
$$=\int\widehat{Pu}(\xi)\overline{\widehat{w}(\xi)}\,(1+|\xi|_\nu)^{2(k-s)}\,d\xi=(Pu,w)_{k-s,\nu}=0,\forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда, в силу (4.6)

$$(Pu,v)_0=(u,P^*v)_0=0\ ,\forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Обозначим $u_0=\Lambda^{-2k}(P^*v)\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Подставив u_0 в последнее равенство и применяя равенство Планшареля, из последнего равенства получим

$$(u_0,P^*v)_0=\left(\Lambda^{-2k}(P^*v),P^*v\right)_0=\int F^{-1}\left((1+|\xi|_\nu)^{-2k}\widehat{P^*v}(\xi)\right)\overline{P^*v}dx$$
$$=\int|\widehat{P^*v}(\xi)|^2\,(1+|\xi|_\nu)^{-2k}\,d\xi=0.$$

Следовательно, $P^*v=0$ в $H^{-k,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Так как по условию леммы коэффициенты главной части $P(x,\mathbb{D})$ постоянные, то постоянными будут также коэффициенты главной части $P^*(x,\mathbb{D})$. Для дифференциальной формы $P^*(x,\mathbb{D})$ имеет место представление

$$P^*(x,\mathbb{D})=P^*_s(D)+\overline{Q}(x,\mathbb{D}),$$

где

$$\overline{Q}(x,\mathbb{D})=\sum_{(\alpha:\nu)<s}\sum_{0\le\beta\le\alpha}C^\beta_\alpha D^\beta\left(\overline{a_\alpha(x)}\right)D^{\alpha-\beta}.$$

Обозначим через $P^*_s(\xi)$ символ главной части $P^*(x,\mathbb{D})$.

Рассмотрим оператор

$$\widetilde{R}=F^{-1}\frac{|\xi|^s_\nu}{(1+|\xi|^s_\nu)P^*_s(\xi)}F.$$

Легко заметить, что $\widetilde{R}$ является ограниченным оператором из $H^{r-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n)$ для любого $r \in \mathbb{R}$. Для $\widetilde{R}P^*$ имеет место представление

$$\widetilde{R}P^* = I + T + \widetilde{R}\overline{Q},$$

где $T = F^{-1}\frac{1}{1+|\xi|_\nu^s}F$. Нетрудно заметить, что для произвольного $r \in \mathbb{R}$ T является ограниченным оператором из $H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{r+\gamma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ при всех $0 \le \gamma \le s$. В силу условий леммы, для произвольного $r \in \mathbb{R}$ $\overline{Q}$ является ограниченным оператором из $H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{r-s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ с $\sigma = \left(\prod_{i=1}^n \nu_i\right)^{-1}$, следовательно, $\widetilde{R}\overline{Q}$ – ограниченный оператор из $H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{r+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим $T_1 = T + \widetilde{R}\overline{Q}$. Для $\widetilde{R}P^*$ имеет место представление

$$\widetilde{R}P^* = I + T_1, \tag{4.7}$$

где $T_1 : H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{r+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ при произвольном $r \in \mathbb{R}$ и $\sigma = \left(\prod_{i=1}^n \nu_i\right)^{-1}$.

Из того, что $P^*v = 0$ в $H^{-k,\nu}(\mathbb{R}^n)$, следует, что $v \in Ker(P^*; H^{-k+s,\nu})$. Применив $\widetilde{R}$ к P^*v в силу представления (4.7) получим, что $v = -T_1 v \in H^{-k+s+\sigma}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, получили, что $v \in Ker(P^*; H^{-k+s+\sigma,\nu})$. Повторяя аналогичные рассуждения m раз ($m\sigma \ge 2k - s$), получим, что $v \in Ker(P^*; H^{k,\nu})$. Пусть теперь $v \in Ker(P^*; H^{k,\nu})$. Докажем, что $\omega = \Lambda^{-2(k-s)}v \in L$.

В силу предположения $v \in Ker(P^*; H^{k,\nu})$ и равенства $(Pu, v)_0 = (u, P^*v)_0$ получим, что $(Pu, v)_0 = 0$, $\forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Тогда, применяя равенство Планшареля, получим

$$(Pu, w)_{k-s,\nu} = (Pu, \Lambda^{2(k-s)}w)_0 = (Pu, v)_0 = 0, \ \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно, $\omega \in L$. Получили взаимно однозначное соответствие между L и $Ker(P^*; H^{k,\nu})$. Тем самым лемма 4.1 доказана. □

Теорема 4.1. *Пусть $k \in \mathbb{N}, k \ge s$ и $P(x, \mathbb{D})$ дифференциальная форма вида (1.1), такая, что $(\alpha : \nu) = s$ $a_\alpha(x) \equiv a_\alpha$ являются постоянными действительными числами, а при $(\alpha : \nu) < s$ $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ вещественнозначные функции такие, что $D^\beta a_\alpha(x) \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$ для всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n, 0 < (\beta : \nu) \le k, (\alpha : \nu) < s$. Тогда оператор $(P; H^{k,\nu})$ является фредгольмовым тогда и только тогда, когда существуют постоянная $C > 0$ и число $M > 0$ такие, что выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu} \le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right) \ , \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{4.8}$$

Доказательство. Необходимость следует из следствия 2.1. Докажем достаточность. Из условий теоремы следует, что дифференциальную форму $P^*(x, \mathbb{D})$ можно представить в виде

$$P^*(x, \mathbb{D}) = P(x, \mathbb{D}) + \overline{L}(x, \mathbb{D}), \text{ где}$$

$$\overline{L}(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} \sum_{0<\beta\le\alpha} C_\beta^\alpha D^\beta(a_\alpha(x))D^{\alpha-\beta}.$$

Так как $D^\beta a_\alpha(x) \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$, то легко проверить, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $R = R(\varepsilon) > 0$ и $C_\varepsilon > 0$ такие, что $\|\overline{L}u\|_{k-s,\nu} \le \varepsilon\|u\|_{k,\nu} + C_\varepsilon\|u\|_{L_2(K_R)}$. Из оценки (4.8) получим

$$\|u\|_{k,\nu} \le C(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_M)}) \le C\left(\|P^*u\|_{k-s,\nu} + \|\overline{L}u\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right).$$

Тогда возьмчм $\varepsilon < \frac{1}{C}$ и получим априорную оценку для $(P^*; H^{k,\nu})$:

$$\|u\|_{k,\nu} \le C'(\|P^*u\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_N)}), \tag{4.9}$$

где $N = \max(R, M)$.

Из оценок (4.8) и (4.9), в силу следствия 2.1, соответственно имеем

$$\dim Ker(P; H^{k,\nu}) < \infty \text{ и } Im(P; H^{k,\nu}) = \overline{Im(P; H^{k,\nu})},$$

$$\dim Ker(P^*; H^{k,\nu}) < \infty \text{ и } Im(P^*; H^{k,\nu}) = \overline{Im(P^*; H^{k,\nu})}.$$

Отсюда, на основе леммы 4.1, получим

$$\dim coker(P; H^{k,\nu}) = \dim Ker(P^*; H^{k,\nu}) < \infty.$$

Следовательно, оператор $(P; H^{k,\nu})$ фредгольмов. □

Abstract. The paper is devoted to special a priori estimates and Fredholm property of differential operators acting in anisotropic Sobolev spaces in $\mathbb{R}^n$. Necessary conditions for a priori estimates in terms of the symbol of an operator are obtained. Under appropriate conditions imposed on the coefficients, a priori estimates are also obtained in the corresponding weighted spaces.

Список литературы

[1] М.С. Агранович, "Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы", Успехи Мат. Наук, **20**, вып. 5(125), 3 – 120 (1965).
[2] Г. А. Карапетян, А. А. Дарбинян, "Нетеровость полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в области", Уч. Записки ЕГУ, no. 3 (2008).
[3] А. А. Дарбинян, А. Г. Туманян, "Необходимое и достаточное условие нетеровости оператора с постоянными коэффициентами", Вестник РАУ, no. 2, Ер.: Изд-во РАУ, 4 – 14 (2014).
[4] А. Туманян, "Об инвариантности индекса полуэллиптического оператора на шкале анизотропных пространств", Известия НАН Армении, серия Математика, **51**, no. 4, 51 – 69 (2016).
[5] С. Г. Крейн, Линейные Уравнения в Банаховых Пространствах, Наука, Москва (1971).
[6] Г. А. Карапетян и А. А. Дарбинян, "Индекс полуэллиптических операторов в R^n", Известия НАН Армении, серия Математика, **42**, no. 5, 53 – 71 (2007).
[7] E. Pehkonen, "Ein hypoelliptisches Diriclet problem", Com.Mat.Phys., **48**, no. 3, 131 – 143 (1978).
[8] М. С. Агранович, Соболевские Пространства, Их Обобщения и Эллиптические Задачи в Областях с Гладкой и Липшицевой Границей, М., МЦНМО, 379 стр. (2013).

Поступила 4 мая 2017