Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 2, 2018, стр. 15 – 30.

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВИЛЕНКИНА

Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. НАВАСАРДЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *GGG@ysu.am*, *knavasard@ysu.am*

Аннотация. В работе доказываются теоремы единственности и формулы восстановления коэффициентов рядов по системе Виленкина. При этом от ряда требуется сходимость по мере и выполнения одного необходимого условия на функцию распределения мажоранты частичных сумм.

MSC2010 numbers: 42C10; 42C20.

Ключевые слова: система Виленкина, метод суммирования, единственность.

1. Введение

Напомним определение системы Виленкина. Пусть $\{p_k\}$ некоторая последовательность натуральных чисел, с условием $p_k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Положим $m_0 = 1$, $m_k = m_{k-1}p_k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда любое неотрицательное целое число n единственным образом представляется в виде

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k m_{k-1}, \quad \text{где} \quad n \in \{0, 1, \cdots, p_k - 1\}.$$

Любое число $x \in [0, 1)$ тоже единственным образом представляется в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}, \quad \text{где} \quad x_k \in \{0, 1, \ldots, p_k - 1\}, \ k \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

и для бесконечно многих $k \in \mathbb{N}$ имеет место $x_k \neq p_k - 1$. Обобщенные функции Радемахера $R_k(x)$ определяются по формуле

$$R_k(x) := \exp\left(2\pi i \frac{x_k}{p_k}\right). \tag{1.2}$$

Система Виленкина $\Psi := \{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяется по правилу

$$\Psi_n(x) := \prod_{k=1}^{\infty} R_k^{n_k}(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k x_k}{p_k}\right). \tag{1.3}$$

[1]Настоящее исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта 10-3/1-41

Эта система введена в 1947 году Н.Я. Виленкиным [1]. Когда $p_k = 2$, $k \in \mathbb{N}$, система Виленкина совпадает с системой Уолша. Если $p_k = a \in \mathbb{N}$, для всех $k \in \mathbb{N}$, то эта система называется системой Крестенсона-Леви. Если последовательность p_k ограничена, то говорят, что система Ψ порождена ограниченной последовательностью. Свойства таких систем во многом совпадают со свойствами системы Уолша. Однако, в некоторых случаях, это не так (см. например [2]).

В настоящей работе доказываются теоремы единственности для рядов по системе Виленкина. При доказательстве применяется метод суммирования для рядов по обобщенной системе Хаара или Виленкина, введенный в работе [3].

Обозначим

$$\mathfrak{I}_k := \left\{ \left[\frac{j}{m_k}, \frac{j+1}{m_k}\right) : \quad j = 0, 1, \ldots, m_k - 1 \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Для интервала $J \in \mathfrak{I}_k$ обозначим через $\tilde{J}$ тот интервал из $\mathfrak{I}_{k-1}$, который содержит J и определим интервалы $(J)_l$, $(l \in \mathbb{Z})$, следующим образом:

(1) $(J)_0 = J, \quad (J)_l \in \mathfrak{I}_k, \quad (J)_l \subset \tilde{J}$,

(2) правый конец интервала $(J)_l$ совпадает с левым концом интервала $(J)_{l+1}$, причем концы отрезка $\tilde{J}$ отождествляются, т.е. если правый конец интервала $(J)_l$ есть $\dfrac{j}{m_{k-1}}$, то левый конец интервала $(J)_{l+1}$ будет $\dfrac{j-1}{m_{k-1}}$.

Для каждого интервала $J \in \mathfrak{I}_k$ и натурального числа $q \le \frac{p_k}{2}$ положим

$$(J)^q := \bigcup_{l=-q}^{q} (J)_l, \qquad (J)^0 = (J)_0 = J,$$

$$\varphi_J^{(q)}(t) := \begin{cases} \frac{m_k}{q}\left(1 - \frac{|l|}{q}\right), & \text{если} \quad t \in (J)_l, \quad |l| < q, \\ 0, & \text{если} \quad t \notin (J)^{q-1}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Ясно, что (здесь и далее $\mathbf{I}_J$–характеристическая функция множества J)

$$\varphi_J^{(1)}(t) = m_k \mathbf{I}_J(t), \quad \int_0^1 \varphi_J^{(q)}(t)dt = \int_{(J)^{q-1}} \varphi_J^{(q)}(t)dt = 1 \quad \text{для всех } q \le \frac{p_k}{2}.$$

Для каждого натурального числа k и для каждого $x \in [0,1)$ обозначим через $I_{k,x}$ тот интервал из $\mathfrak{I}_k$, который содержит точку x. Иногда, если $J = I_{k,x}$, то для функции определенной в (1.4) будем использовать обозначение $\varphi_{k,x}^{(q)}(t)$, т.е. $\varphi_{k,x}^{(q)}(t) := \varphi_{I_{k,x}}^{(q)}(t)$. Учитывая определение системы $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, очевидно, что при любом $\varphi_{k,x}^{(q)}$, имеем

$$(\Psi_n, \varphi_{k,x}^{(q)}) := \int_0^1 \Psi_n(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt = 0, \quad \text{когда} \quad n \ge m_k.$$

Поэтому для любого ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n(x) \tag{1.5}$$

и любого $x \in [0,1)$, при любых натуральных k и q $(2q \le p_k)$, определены суммы

$$\sigma_{k,q}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 \Psi_n(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt. \tag{1.6}$$

Пусть

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n \Psi_n(x)$$

частичная сумма ряда (1.5). Ясно, что

$$\sigma_{k,1}(x) = S_{m_k-1}(x) \quad \text{и} \quad \sigma_{k,q}(x) = \int_0^1 S_{m_r-1}(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt \quad \text{для всех} \quad r \ge k. \tag{1.7}$$

Положим

$$S^*(x) := \sup_m |S_m(x)|, \qquad \sigma^*(x) := \sup_{k,q} |\sigma_{k,q}(x)|.$$

В работе через $C, C_1, C_2, \dots$ обозначаются постоянные, а через $\mathrm{mes}(A)$ – Лебегова мера множества A.

Теперь мы в состоянии сформулировать наш первый результат

Теорема 1.1. *Существует постоянная $C > 0$, не зависящая от последовательностей $\{a_n\}$ и $\{p_k\}$, такая, что*

$$\sigma^*(x) \le CS^*(x), \qquad x \in [0,1). \tag{1.8}$$

Более того, если ряд (1.5) в точке x сходится и $S(x)$-сумма ряда в этой точке, то

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{k,q}(x) = S(x).$$

Это означает, что метод суммирования ряда (1.5) по формулам (1.6) регулярен. Отметим, что этот метод отличен от ранее рассмотренных методов суммирования рядов по системе Виленкина (см. [4]).

В работах [5] – [7] доказаны теоремы единственности для простых рядов по обобщенной системе Хаара и системе Виленкина, порожденной ограниченной последовательностью p_k, $k \in \mathbb{N}$, и кратных рядов по классической системе Хаара, мажоранты частичных сумм которых удовлетворяют некоторому условию.

В работе [5] доказан следующий результат.

Теорема 1.2. *(В.В.Костин) Пусть система $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ порождена ограниченной последовательностью p_k, $k \in \mathbb{N}$. Тогда, если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$*

ряда (1.5) почти всюду сходятся к некоторой функции $f(x)$ и для некоторой последовательности $\lambda_p \uparrow +\infty$ выполняется следующее условие:

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p \mathrm{mes}\left\{x \in [0,1) : \sup_k |S_{m_k-1}(x)| > \lambda_p\right\} = 0, \tag{1.9}$$

тогда для всех n имеют место соотношения:

$$a_n = \lim_{p\to\infty} \int_0^1 [f(t)]_{\lambda_p} \overline{\Psi_n(t)} dt, \tag{1.10}$$

где

$$[g(x)]_\lambda = \begin{cases} g(x), & \text{если } |g(x)| \le \lambda, \\ 0, & \text{если } |g(x)| > \lambda. \end{cases}$$

В той же работе [5] приведен пример системы $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ порожденной неограниченной последовательностью p_k, $k \in \mathbb{N}$, для которой теорема 1.2 не верна.

Оказывается, что если в теореме 1.2 в условии (1.9) мажоранту частичных сумм $S_{m_k-1}(x)$ заменить мажорантой всей последовательности частичных сумм $S^*(x)$, то формулы (1.10) верны для любой системы Виленкина. Точнее верно следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ ряда (1.5) по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_p \uparrow +\infty$ выполняется условие*

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p mes\{x \in [0,1) : S^*(x) > \lambda_p\} = 0,$$

тогда для всех n имеют место формулы (1.10).

Эта теорема следует из более общей теоремы 1.4 и теоремы 1.1

Теорема 1.4. *Если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_p \uparrow +\infty$ выполняется*

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p mes\{x \in [0,1) : \sigma^*(x) > \lambda_p\} = 0, \tag{1.11}$$

то для всех n имеют место формулы (1.10).

Напомним, что функция f называется A-интегрируемой на множестве $X \subset [0;1]^d$, если выполняется

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in X : |f(\mathbf{x})| > \lambda\} = 0$$

и существует

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_X [f(\mathbf{x})]_\lambda d\mathbf{x} =: (A) \int_X f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Из теоремы 1.4 следует утверждение.

Теорема 1.5. *Если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ ряда (1.5) по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции f и выполняется*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot mes\{x \in [0,1] : \sigma^*(x) > \lambda\} = 0,$$

то функция f является A-интегрируемой функцией, а ряд (1.5) является рядом Фурье этой функции в смысле A-интегрирования.

В работе [3] доказано, что если ряд (1.5) является рядом Фурье интегрируемой функции f, то суммы $S_{m_k-1}(t)$ по мере сходятся к f и выполняется

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \mathrm{mes}\{t \in [0,1) : \sigma^*(t) > \lambda\} = 0. \tag{1.12}$$

Поэтому верно следующее утверждение.

Теорема 1.6. *Для того, чтобы ряд (1.5) являлся бы рядом Фурье интегрируемой функции f, необходимо и достаточно, чтобы суммы $S_{m_k-1}(t)$ по мере сходились к f и выполнялось (1.12).*

В работе [8] аналогичные теоремы без доказательств сформулированы также для обобщенной системы Хаара.

2. Вспомогательные леммы

Пусть семейства $\mathfrak{X} = \{x_k\}_{k=1}^n$ и $\mathfrak{S} = \{q_k\}_{k=1}^n \subset \{1,2,\dots,n\}$ удовлетворяют условиям:

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b, \tag{2.1}$$

$$x_{k+q_k} - x_{k-q_k} \le b-a, \text{ где } x_{k\pm n} = x_k \pm (b-a), \quad k = 1,2,\dots,n. \tag{2.2}$$

Для каждого $k \in \{1,2,\dots,n\}$ обозначим

$$h_k^*(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_k, \\ 0, & \text{если } x \notin (x_{k-q_k}, x_{k+q_k}), \\ \text{линейная на отрезках } [x_{k-q_k}, x_k] \text{ и } [x_k, x_{k+q_k}]. \end{cases}$$

$$h_k(x) := h_k^*(x) + h_k^*(x+(b-a)) + h_k^*(x-(b-a)).$$

$$H_{\mathfrak{X},\mathfrak{S},k}(x) \equiv H_k(x) := h_k(x)\mathrm{I}_{[a,b]}(x). \tag{2.3}$$

Следующая лемма по формулировке и доказательству похожа на лемму 3 из [9].

Лемма 2.1. *Пусть семейства $\mathfrak{X} = \{x_k\}_{k=1}^n$ и $\mathfrak{S} = \{q_k\}_{k=1}^n \subset \{1,2,\dots,n\}$ удовлетворяют условиям (2.1) и (2.2). Тогда существуют неотрицательные числа α_k, $(k = 1,2,\dots,n)$, такие, что*

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k H_k(x) = \mathrm{I}_{[a,b]}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Сначала докажем, что для любого $P \subset \{1,2,\dots,n\}$ существуют неотрицательные числа $\{\beta_k\}_{k\in P}$ такие, что

$$\sum_{k\in P}\beta_k h_k(x_j)=1 \quad \text{для всех } j\in P, \tag{2.4}$$

$$\sum_{k\in P}\beta_k h_k(x)\le 1 \quad \text{для всех } x. \tag{2.5}$$

В случае, когда $\mathrm{card}(P)=1$ и $P=\{k_0\}$, достаточно взять $\beta_{k_0}=1$. Допустим утверждение верно при $\mathrm{card}(P)<s$ и докажем, что оно верно и при $\mathrm{card}(P)=s$. Пусть $P=\{k_1,k_2,\dots,k_s\}$ и $k_1<k_2<\dots<k_s$. Для каждого набора чисел $\{\varepsilon_j\}$, $\varepsilon_j=\pm1$, $j=1,2,\dots,s$, положим

$$R_{\{\varepsilon_j\}}=\left\{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_s)\in[0,1]^s:\ \varepsilon_j\left(\sum_{m=1}^{s}\gamma_m h_{k_m}(x_{k_j})-1\right)\ge 0,\ 1\le j\le s\right\}.$$

Убедимся, что $R_{\{\varepsilon_j\}}\ne\emptyset$ при любом наборе чисел $\varepsilon_j=\pm1$. В случае когда все $\varepsilon_j=-1$, очевидно, что $(0,0,\dots,0)\in R_{\{\varepsilon_j\}}$. Когда все $\varepsilon_j=1$, то $(1,1,\dots,1)\in R_{\{\varepsilon_j\}}$ так как $h_k(x)\ge0$ для всх x и $h_k(x_k)=1,\ k=1,2,\dots,n$. Пусть теперь для набора $\varepsilon_j=\pm1$

$$I^+:=\{j:\ \varepsilon_j=1\},\qquad I^-:=\{j:\ \varepsilon_j=-1\}$$

и $1\le\mathrm{card}(I^+)<s$. В силу нашего предположения, существуют неотрицательные числа $\beta'_m,\quad m\in I^+$, такие, что

$$\sum_{m\in I^+}\beta'_m h_{k_m}(x_{k_j})=1 \quad \text{для всех } \ j\in I^+, \tag{2.6}$$

$$\sum_{m\in I^+}\beta'_m h_{k_m}(x)\le 1 \quad \text{для всех } \ x. \tag{2.7}$$

Обозначим $\beta_{k_m}=\beta'_m$, если $m\in I^+$ и $\beta_{k_m}=0$, если $m\in I^-$. Из (2.6) и (2.7) следует, что $\beta_k\in[0,1]$ и для всех $j,\ j=1,2,\dots,s$,

$$\varepsilon_j\left(\sum_{m=1}^{s}\beta_{k_m}h_{k_m}(x_{k_j})-1\right)=\varepsilon_j\left(\sum_{m\in I^+}\beta_{k_m}h_{k_m}(x_{k_j})-1\right)\ge 0.$$

Поэтому $(\beta_{k_1},\beta_{k_2},\dots,\beta_{k_s})\in R_{\{\varepsilon_j\}}$. Итак, для любого набора $\{\varepsilon_j\}$, $\varepsilon_j=\pm1,\ \ j=1,2,\dots,s$, множество $R_{\{\varepsilon_j\}}$ не пусто.

Допустим не существуют такие неотрицательные числа $\beta_k,\ k\in P$, чтобы выполнялось условие (2.4). Тогда множество

$$A=\left\{\left(\sum_{m=1}^{s}\gamma_m h_{k_m}(x_{k_1})-1,\dots,\sum_{m=1}^{s}\gamma_m h_{k_m}(x_{k_s})-1\right):\ (\gamma_1,\dots,\gamma_s)\in[0,1]^s\right\}$$

не содержит точку $(0,0,\dots,0)$. Ясно, что A-выпуклое и компактное множество в $\mathbb{R}^s$. В силу второй теоремы об отделимости выпуклых множеств (см. [10], стр.210), существует линейный функционал $\mathcal{L}$, определенный на $\mathbb{R}^s$, который принимает отрицательные значения на A. Пусть $\mathcal{L}(a_1,a_2,\dots,a_s)=\sum\limits_{i=1}^{s}\alpha_i a_i$ и

$$\varepsilon_i'=\begin{cases}1 & \text{если} \quad \alpha_i\ge 0,\\ -1 & \text{если} \quad \alpha_i<0.\end{cases}$$

Тогда из непустоты множества $R_{\{\varepsilon_i'\}}$ следует, что функционал $\mathcal{L}$ на множестве A может принимать неотрицательные значения, что противоречит определению функционала $\mathcal{L}$. Полученное противоречие доказывает, что существуют неотрицательные числа β_k, удовлетворяющие условию (2.4).

Из определения функций $h_k(x)$ следует, что $h_k(x)=h_k(x\pm(b-a))$, для любых $x\in[a,b]$ и $k=1,2,\dots,n$. Поэтому из (2.2) получим, что

$$\sum_{k\in P}\beta_k h_k(x_{j\pm n})=1 \qquad \text{для всех} \quad j\in P. \tag{2.8}$$

Заметим, что на интервалах $[x_{k_s-n},x_{k_1}]$, $[x_{k_1},x_{k_2}],\cdots$, $[x_{k_{s-1}},x_{k_s}]$ и $[x_{k_s},x_{k_1+n}]$ функция $\sum\limits_{k\in P}\beta_k h_k(x)$ выпуклая, следовательно, с учетом (2.8) получим, что

$$\sum_{k\in P}\beta_k h_k(x)\le 1 \qquad \text{для всех} \quad x\in[x_{k_s-n},x_{k_1+n}].$$

В частности выполняется неравенство (2.5).

Таким образом неравенства (2.4) и (2.5) доказаны для любого $P\subset\{1,2,\dots,n\}$, в частности для $P=\{1,2,\dots,n\}$ существуют неотрицательные числа $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ такие, что (см. также (2.8))

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k h_k(x_j)=1 \qquad \text{для всех} \quad j=0,1,\dots n,n+1.$$

Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k h_k(x)$ линейная на каждом интервале $[x_j,x_{j+1}]$, $j=0,1,\dots,n$, поэтому из последных равенств получим

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k h_k(x)=1 \qquad \text{для всех} \quad x\in[x_0,x_{n+1}].$$

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Пусть* $\Delta\in\mathfrak{I}_{k-1}$ *и* $\Delta=\bigcup\limits_{i=1}^{p_k}\Delta_i$, *где* $\Delta_i\in\mathfrak{I}_k$ *и пронумерованы слева направо, а* $\mathcal{P}=\{\Delta_{r_1},\Delta_{r_2},\dots,\Delta_{r_s}\}$*-некоторое подмножество множества*

$\{\Delta_i\}_{i=1}^{p_k}$. *Если натуральные числа* $\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$ *удовлетворяют условиям:*

$$q_i \le \frac{p_k}{2}, \quad \text{и} \quad (\Delta_{r_i})_{\pm q_i} \in \mathcal{P}, \quad \text{для всех} \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

то существуют неотрицательные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ *такие, что*

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \varphi_{\Delta_{r_i}}^{(q_i)}(t) = \mathbf{I}_\Delta(t).$$

Доказательство. Пусть x_i-серединная точка отрезка Δ_i, $i = 1, 2, \dots, p_k$. Нетрудно заметить, что если обозначить $\mathcal{X} = \{x_{r_i}\}_{i=1}^{s}$ и $\mathcal{S} = \{q_i\}_{i=1}^{s}$, то для функций $H_i(t) = H_{\mathcal{X},\mathcal{S},i}(t)$ (см. (2.3)) и интервала Δ можно применить лемму 2.1. Следовательно, существуют неотрицательные числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_i H_i(t) = \mathbf{I}_\Delta(t).$$

Ясно, что (см. (1.4) и (2.3)) для всех $j = 1, 2, \dots, p_k$ и $i = 1, 2, \dots, s$

$$\varphi_{k,x_{r_i}}^{(q_i)}(x_j) = \frac{m_k}{q_i} H_i(x_j).$$

Из последних равенств следует, что

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{q_i}{m_k} \beta_i \varphi_{k,x_{r_i}}^{(q_i)}(x_j) = 1 \quad \text{для всех} \quad j = 1, 2, \dots, p_k.$$

В сылу того, что функция $\varphi_{k,x_{r_i}}^{(q_i)}(t)$, $(i = 1, 2, \dots, s)$ постоянная на каждом интервале Δ_j, $j = 1, 2, \dots, p_k$, получим, что

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{q_i}{m_k} \beta_i \varphi_{k,x_{r_i}}^{(q_i)}(t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{q_i}{m_k} \beta_i \varphi_{\Delta_{r_i}}^{(q_i)}(t) = \mathbf{I}_\Delta(t).$$

Лемма 2.2 доказана. □

Лемма 2.3. *Пусть* $I = [\frac{r}{m_s}, \frac{r+1}{m_s}) \in \mathcal{I}_s$, $E \subset I$, $E^c := I \setminus E$ *и*

$$\text{(2.9)} \qquad \operatorname{mes}(E) < \varepsilon \cdot |I|,$$

где $\varepsilon \in (0, \frac{1}{20 p_{s+1}})$. *Тогда для любого* $\nu > s$ *существует разложение*

$$\text{(2.10)} \qquad \mathbf{I}_I(t) = \sum_{k=s+1}^{\nu} \sum_{\Delta \in \mathcal{I}_k} \alpha_\Delta \varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t) + \sum_{k=s+1}^{\nu-1} \sum_{\Delta \in \mathcal{I}_k} \beta_\Delta \varphi_\Delta^{(0)}(t) + \sum_{\Delta \in \mathcal{I}_\nu} \gamma_\Delta \varphi_\Delta^{(1)}(t),$$

где $\varphi_\Delta^{(0)} = |\Delta|^{-1} \mathbf{I}_\Delta$, *обладающая следующими свойствами*

$$\text{(2.11)} \qquad \alpha_\Delta \ge 0, \quad \beta_\Delta \ge 0, \quad \gamma_\Delta \ge 0, \operatorname{mes}(\operatorname{supp}\varphi_\Delta^{(q_\Delta)} \cap E) > \frac{1}{6} \operatorname{mes}(\operatorname{supp}\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}),$$

$$\text{(2.12)} \qquad \operatorname{mes}(\operatorname{supp}\varphi_\Delta^{(0)} \cap E) > \frac{1}{20} \operatorname{mes}(\operatorname{supp}\varphi_\Delta^{(0)}),$$

и если $\alpha_\Delta \neq 0$ *или* $\beta_\Delta \neq 0$ *или* $\gamma_\Delta \neq 0$, *то*

$$\operatorname{mes}(\Delta \cap E^c) \geq \frac{1}{2}\operatorname{mes}(\Delta). \tag{2.13}$$

Доказательство. Лемму докажем методом математической индукции. Когда $\nu = s+1$ из (2.9) и $\varepsilon < \frac{1}{20p_{s+1}}$ получим

$$\operatorname{mes}(\Delta \cap E^c) \geq \frac{1}{2}\operatorname{mes}(\Delta), \quad \text{если} \quad \Delta \in \mathfrak{I}_{s+1} \quad \text{и} \quad \Delta \subset I.$$

Поэтому, если для $\Delta \in \mathfrak{I}_{s+1}$ положить $\gamma_\Delta = \frac{1}{m_{s+1}}$, когда $\Delta \subset I$, и $\gamma_\Delta = 0$, когда $\Delta \not\subset I$, то получим (2.10) когда $\nu = s+1$. Отметим, что в этом случае $\alpha_\Delta = \beta_\Delta = 0$.

Докажем, что если разложение (2.10) возможно для ν, то возможно и для $\nu+1$. Фиксируем некоторое $\Delta \in \mathfrak{I}_\nu$, для которого $\gamma_\Delta \neq 0$. Тогда если

$$\operatorname{mes}(\Delta \cap E) > \frac{1}{20}\operatorname{mes}(\Delta), \tag{2.14}$$

то $\gamma_\Delta\varphi_\Delta^{(1)}$ рассмотрим как $\beta_\Delta\varphi_\Delta^{(0)}$. Причем выполнится (2.12). Если же

$$\operatorname{mes}(\Delta \cap E) \leq \frac{1}{20}\operatorname{mes}(\Delta), \tag{2.15}$$

то положим

$$\mathcal{G}(\Delta) := \{\Delta' \in \mathfrak{I}_{\nu+1} : \ \Delta' \subset \Delta, \ \operatorname{mes}(\Delta' \cap E^c) \geq \frac{1}{2}\operatorname{mes}(\Delta')\}. \tag{2.16}$$

Для каждого $\Delta' \in \mathcal{G}(\Delta)$ положим

$$q_{\Delta'} := \min\{l \in \mathbb{N} : \ (\Delta')_{\pm l} \in \mathcal{G}(\Delta)\}. \tag{2.17}$$

Убедимся, что $q_{\Delta'} \leq \frac{p_{\nu+1}}{2}$. Поскольку $p_{\nu+1} \geq 2$, то нужно рассмотреть только случай когда $q_{\Delta'} > 1$. В таком случае из (2.17) следует, что хотья бы каждый пятый из интервалов $(\Delta')_{\pm l}$, $|l| \leq q_{\Delta'}$, не принадлежит $\mathcal{G}(\Delta)$. Поэтому, из (2.16) имеем

$$\operatorname{mes}((\Delta')^{q_{\Delta'}} \cap E_p) > \frac{1}{10}\operatorname{mes}((\Delta')^{q_{\Delta'}}).$$

Из этого и (2.15) вытекает, что $\operatorname{mes}((\Delta')^{q_{\Delta'}}) \leq \frac{1}{2}\operatorname{mes}(\Delta)$. Следовательно можно применить лемму 2.2. Применяя лемму 2.2 найдем такие неотрицательные $\eta_{\Delta'}$, что

$$\gamma_\Delta\varphi_\Delta^{(1)}(t) = \sum_{\Delta' \in \mathcal{G}(\Delta)} \eta_{\Delta'}\varphi_{\Delta'}^{(q_{\Delta'})}(t).$$

Обозначив $\gamma_{\Delta'} := \eta_{\Delta'}$, $\alpha_{\Delta'} := 0$, если $q_{\Delta'} = 1$ и $\alpha_{\Delta'} := \eta_{\Delta'}$, $\gamma_{\Delta'} := 0$ если $q_{\Delta'} > 1$, получим разложение типа (2.10) для $\nu+1$, с неотрицательными коэффициентами. Выполнение (2.13) следует из (2.16). Из того же (2.16) и (2.17) следует (2.11). Лемма 2.3 доказана. □

В работе [3] для интегрируемой функции f введена функция

$$\mathcal{M}^*(f,x) = \sup_{\substack{J: x\in J\in\mathcal{I}_k \\ 1\le q\le \frac{p_k}{2}}} \frac{1}{|(J)^q|}\int_{(J)^q} |f(t)\varphi^q_{k,x}(t)|dt$$

и доказано, что

(2.18) $$\operatorname{mes}\{x : \mathcal{M}^*(f,x) > \lambda\} \le \frac{3}{\lambda}\|f\|_1, \ \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\cdot\operatorname{mes}\{x : \mathcal{M}^*(f,x) > \lambda\} = 0.$$

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $x \in [0,1)$, $k, q \in \mathbb{N}$ и $2q \le p_k$. Допустим $I_{k,x}$ (интервал из $\mathcal{I}_k$, который содержит точку x) имеет вид

$$I_{k,x} = \left[\frac{r}{m_{k-1}} + \frac{s}{m_k}, \frac{r}{m_{k-1}} + \frac{s+1}{m_k}\right),$$

где $r \in \{0,1,\ldots,m_{k-1}-1\}$, $s \in \{0,1,\ldots,p_k-1\}$. Сумму $S_{m_k-1}(x)$ сгруппируем следующим образом

(3.1)

$$S_{m_k-1}(x) = \sum_{n=0}^{m_k-1} a_n\Psi_n(x) = \sum_{j=0}^{p_k-1}\sum_{\nu=0}^{m_{k-1}-1} a_{\nu+jm_{k-1}}\Psi_{\nu+jm_{k-1}}(x) =: \sum_{j=0}^{p_k-1}\theta_{k,j}(x).$$

Из определения функций $\Psi_n(x)$ (см. (1.1)–(1.3)) для $\Psi_{\nu+jm_{k-1}}(x)$ имеем

(3.2) $$\Psi_{\nu+jm_{k-1}}(x) = \Psi_\nu(x)R_k^j(x) = \Psi_\nu(x)\exp\left(2\pi i\frac{js}{p_k}\right) \quad \text{когда } \nu < m_{k-1}.$$

Заметим, что функция Ψ_ν, $0 \le \nu < m_{k-1}$ постоянна на

$$\widetilde{I}_{k,x} = \left[\frac{r}{m_{k-1}}, \frac{r+1}{m_{k-1}}\right).$$

Поэтому

(3.3) $$(\Psi_{\nu+jm_{k-1}}, \varphi^{(q)}_{k,x}) = \Psi_\nu(\widetilde{I}_{k,x})(R_k^j, \varphi^{(q)}_{k,x}),$$

где $\Psi_\nu(\widetilde{I}_{k,x})$-значение функции Ψ_ν на $\widetilde{I}_{k,x}$, т.е. $\Psi_\nu(\widetilde{I}_{k,x}) = \Psi_\nu(x)$, $x \in \widetilde{I}_{k,x}$, $\nu < m_{k-1}$.

Из определения функций R_k, $\varphi^{(q)}_{k,x}$ и интервала $I_{k,x}$ имеем

(3.4) $$(R_k^j, \varphi^{(q)}_{k,x}) = \frac{1}{q}\sum_{l=-q+1}^{q-1}\left(1-\frac{|l|}{q}\right)\exp\left(2\pi i\frac{j(s+l)}{p_k}\right) =$$

$$\frac{1}{q}\exp\left(2\pi i\frac{js}{p_k}\right)\sum_{l=-q+1}^{q-1}\left(1-\frac{|l|}{q}\right)\exp\left(2\pi i\frac{jl}{p_k}\right) =$$

$$R_k^j(x)\frac{1}{q}\sum_{l=-q+1}^{q-1}\left(1-\frac{|l|}{q}\right)\exp\left(2\pi i\frac{jl}{p_k}\right).$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{l=-(q-1)}^{q-1} \exp(iul)\left(1-\frac{|l|}{q}\right) = 2K_{q-1}(u) = \frac{1}{q}\left(\frac{\sin\frac{qu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2,$$

где $K_{q-1}(u)$-ядро Фейера для тригонометрической системы (см. [11]).

Следовательно, из (1.7), (3.1)–(3.4) получим, что

$$(3.5)\quad \sigma_{k,q}(x) = \int_0^1 S_{m_k-1}(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt = \sum_{j=0}^{p_k-1}\sum_{\nu=0}^{m_{k-1}-1} a_{\nu+jm_{k-1}}(\Psi_{\nu+jm_{k-1}},\varphi_{k,x}^{(q)}) =$$

$$\frac{2}{q}\sum_{j=0}^{p_k-1}\sum_{\nu=0}^{m_{k-1}-1} a_{\nu+jm_{k-1}}\Psi_{\nu+jm_{k-1}}(x)K_{q-1}\left(\frac{2\pi j}{p_k}\right) = \frac{2}{q}\sum_{j=0}^{p_k-1}\theta_{k,j}(x)K_{q-1}\left(\frac{2\pi j}{p_k}\right).$$

Обозначим

$$\Theta_{k,j}(x) = \sum_{p=0}^{j}\theta_{k,p}(x), \qquad \Theta_{k,-1}(x) = 0.$$

Ясно, что

$$(3.6)\qquad |\Theta_{k,j}(x)| \le S^*(x),\ \ 0 \le j < p_k.$$

Применяя преобразование Абеля, из (3.5), получим

$$(3.7)\qquad \sigma_{k,q}(x) = \frac{2}{q}\sum_{j=0}^{p_k-1}(\Theta_{k,j}(x)-\Theta_{k,j-1}(x))K_{q-1}\left(\frac{2\pi j}{p_k}\right) =$$

$$\frac{2}{q}\sum_{j=0}^{p_k-2}\Theta_{k,j}(x)\left(K_{q-1}\left(\frac{2\pi j}{p_k}\right) - K_{q-1}\left(\frac{2\pi(j+1)}{p_k}\right)\right) +$$

$$\frac{2}{q}\Theta_{k,p_k-1}(x)K_{q-1}\left(\frac{2\pi(p_k-1)}{p_k}\right) =: A_1 + A_2.$$

Поскольку ядро Фейера удовлетворяет условию $0 \le K_{q-1}(t) \le \frac{q}{2}$ для всех $t \in [0,2\pi]$, то из (3.6) и (3.7) имеем, что

$$(3.8)\qquad |A_2| \le S^*(x).$$

Ясно, что

$$(3.9)\qquad |A_1| \le \frac{2S^*(x)}{q}\sum_{j=0}^{p_k-2}\int_{\frac{2\pi j}{p_k}}^{\frac{2\pi(j+1)}{p_k}} |K'_{q-1}(t)|dt \le \frac{2S^*(x)}{q}\int_0^{2\pi}|K'_{q-1}(t)|dt =$$

$$\frac{4S^*(x)}{q}\int_0^{\pi}|K'_{q-1}(t)|dt = \frac{4S^*(x)}{q^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\left(\frac{\sin^2(qu)}{\sin^2 u}\right)'\right|du.$$

Производная функции $g(u) = \dfrac{\sin^2(qu)}{\sin^2 u}$ представим в следующем виде:

$$g'(u) = \left(\frac{\sin^2(qu)}{u^2}\cdot\frac{u^2}{\sin^2 u}\right)' = \frac{2qu\sin(qu)\cos(qu) - 2\sin^2(qu)}{u^3}\cdot\frac{u^2}{\sin^2 u} +$$

$$(3.10) \qquad + \frac{\sin^2(qu)}{u^2}\cdot\frac{2u\sin u - 2u^2\cos u}{\sin^3 u} =: g_1(u) + g_2(u).$$

Учитывая, что $\sin u \geq \dfrac{2}{\pi}u$, когда $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, получим следующую оценку:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g_1(u)|du \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{qu\sin(2qu) - 2\sin^2(qu)}{u^3}\right|du =$$

(3.11)

$$= \frac{\pi^2 q^2}{4}\int_0^{\frac{\pi q}{2}}\left|\frac{t\sin(2t) - 2\sin^2 t}{t^3}\right|dt \leq \frac{\pi^2 q^2}{4}\int_0^{\infty}\left|\frac{t\sin(2t) - 2\sin^2 t}{t^3}\right|dt \leq C_1 q^2.$$

Ясно также, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g_2(u)|du \leq q^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{2u\sin u - 2u^2\cos u}{\sin^3 u}\right|du \leq C_2 q^2.$$

Сопоставляя последнее неравенство с (3.9)-(3.11) получим, что

$$(3.12) \qquad |A_1| \leq C_3 S^*(x).$$

Из (3.12), (3.7), (3.8) выводим $|\sigma_{k,q}(x)| < C_4 S^*(x)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $0 < q \leq \frac{p_k}{2}$. Тем самым соотношение (1.8) доказано. Теперь допустим для $x \in [0,1)$ выполняется

$$(3.13) \qquad \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n\Psi_n(x) = S.$$

Обозначим

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=m_{k-1}}^{m_k - 1} a_n\Psi_n(x) \quad \text{и} \quad S^{k,*}(x) = \max_{m<m_k}\left|\sum_{m_{k-1}}^{m} a_n\Psi_n(x)\right|.$$

Тогда из (3.13) имеем

$$\lim_{k\to\infty} S^{k,*}(x) = 0.$$

Поэтому, из уже доказанной части теоремы, получим

$$\lim_{k\to\infty}|\sigma_{k,q}(x) - (S_{m_{k-1}-1}, \varphi_{k,x}^{(q)})| = \lim_{k\to\infty}|(S^{(k)}, \varphi_{k,x}^{(q)})| \leq C\lim_{k\to\infty} S^{k,*}(x) = 0.$$

Поскольку сумма $S_{m_{k-1}-1}$ на носителе функции $\varphi_{k,x}^{(q)}$ постоянна и $\|\varphi_{k,x}^{(q)}\|_1 = 1$, то $(S_{m_{k-1}-1}, \varphi_{k,x}^{(q)}) = S_{m_{k-1}-1}(x)$. Поэтому,

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{k,q}(x) = S.$$

Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.4. Пусть частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ ряда (1.5) по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_p \uparrow +\infty$ выполняется (1.11).

Для неотрицательного целого n выберем наименьшее s для которого $n < m_s$. На интервалах $I_u \in \mathfrak{I}_s$, $u = 1, 2, \dots, m_s$, функция Ψ_n принимает ненулевые постоянные значения. Эти значения обозначим через $\Psi_n(I_u)$. Ясно, что $|\Psi_n(I_u)| = 1$ для всех u и

$$a_n = \int_0^1 S_{m_s-1}(t)\overline{\Psi_n(t)}dt = \sum_{u=1}^{m_s} \overline{\Psi_n(I_u)} \int_{I_u} S_{m_s-1}(t)dt.$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно доказать, что для любого натурального s и любого $I \in \mathfrak{I}_s$ имеет место

$$\lim_{p\to\infty} \int_I [f(t)]_{\lambda_p} dt = \int_I S_{m_s-1}(t)dt. \tag{3.14}$$

Для фиксированного $I \in \mathfrak{I}_s$ докажем (3.14). Положим

$$E_p = \{x \in I : \sigma^*(x) > \lambda_p\} \quad \text{и} \quad E_p^c = \{x \in I : \sigma^*(x) \le \lambda_p\}$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{1}{20 p_{s+1}})$. Выберем натуральное число p настолько большим, чтобы выполнялись условия

$$|\sigma_{k,q}(t)| < \lambda_p \quad \text{для всех} \quad k \le s+1,\ q \le \frac{p_k}{2},\ t \in [0,1),$$

$$\lambda_p \cdot \mathrm{mes}(E_p) < \varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I). \tag{3.15}$$

Применив лемму 2.3 к I, $E = E_p$, $E_p^c = \{x \in I : \sigma^*(x) \le \lambda_p\}$, для любого $\nu \ge s+1$ получим разложение

$$\mathrm{I}_I(t) = \sum_{k=s+1}^{\nu} \sum_{\Delta \in \mathfrak{I}_k} \alpha_\Delta \varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t) + \sum_{k=s+1}^{\nu-1} \sum_{\Delta \in \mathfrak{I}_k} \beta_\Delta \varphi_\Delta^{(0)}(t) + \sum_{\Delta \in \mathfrak{I}_\nu} \gamma_\Delta \varphi_\Delta^{(1)}(t), \tag{3.16}$$

со свойствами

$$\alpha_\Delta \ge 0, \quad \beta_\Delta \ge 0, \quad \gamma_\Delta \ge 0,$$
$$\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(q_\Delta)} \cap E_p) > \frac{1}{6}\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}),$$
$$\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(0)} \cap E_p) > \frac{1}{20}\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(0)}),$$

и если $\alpha_\Delta \ne 0$ или $\beta_\Delta \ne 0$ или $\gamma_\Delta \ne 0$, то

$$\mathrm{mes}(\Delta \cap E_p^c) \ge \frac{1}{2}\mathrm{mes}(\Delta).$$

Обозначим

$$F_\nu := \left(\bigcup_{k=s+1}^{\nu} \bigcup_{\Delta \in \mathfrak{I}_k : \alpha_\Delta \ne 0} \mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(q_\Delta)} \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=s+1}^{\nu-1} \bigcup_{\Delta \in \mathfrak{I}_k : \beta_\Delta \ne 0} \mathrm{supp}\varphi_\Delta^{(0)} \right) \tag{3.17}$$

и докажем, что

(3.18)
$$\sum_{k=s+1}^{\nu}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\alpha_\Delta+\sum_{k=s+1}^{\nu-1}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\beta_\Delta+\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu,\Delta\subset F_\nu}\gamma_\Delta\le 60\mathrm{mes}(E_p)\quad\text{и}\quad\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu}\gamma_\Delta\le\mathrm{mes}(I).$$

Сначала отметим, что интегралы функций $\varphi_\Delta^{(i)}$, фигурирующие в (3.16), равны единице. Поэтому второе неравенство из (3.18) следует из неотрицательности коэффициентов в (3.16). Из (2.11), (2.12) следует, что $\mathcal{M}^*(\mathrm{I}_{E_p},x)>\frac{1}{20}$ когда $x\in F_\nu$. Поэтому (см. (2.18))

$$\mathrm{mes}(F_\nu)<60\mathrm{mes}(E_p). \tag{3.19}$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{k=s+1}^{\nu}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\alpha_\Delta+\sum_{k=s+1}^{\nu-1}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\beta_\Delta+\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu,\Delta\subset F_\nu}\gamma_\Delta=\sum_{k=s+1}^{\nu}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\alpha_\Delta\int_I\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt+$$
$$\sum_{k=s+1}^{\nu-1}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\beta_\Delta\int_I\varphi_\Delta^{(0)}(t)dt+\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu,\Delta\subset F_\nu}\gamma_\Delta\int_I\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt<\int_F dt<60\mathrm{mes}(E_p).$$

Соотношения (3.18) доказаны. Для любого $\nu\ge s$ имеет место

$$\int_I S_{m_\nu-1}(t)dt=\int_I S_{m_s-1}(t)dt \tag{3.20}$$

и (см. (3.19))

$$\left|\int_I[f(t)]_{\lambda_\nu}dt-\int_{I\setminus F_\nu}[f(t)]_{\lambda_\nu}dt\right|<60\lambda_p\mathrm{mes}(E_p). \tag{3.21}$$

Из (3.16) имеем

$$\int_I S_{m_\nu-1}(t)dt=\sum_{k=s+1}^{\nu}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\alpha_\Delta\int_I S_{m_\nu-1}(t)\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt+ \tag{3.22}$$
$$\sum_{k=s+1}^{\nu-1}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\beta_\Delta\int_I S_{m_\nu-1}(t)\varphi_\Delta^{(0)}(t)dt+\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu}\gamma_\Delta\int_I S_{m_\nu-1}(t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt=$$
$$\sum_{k=s+1}^{\nu}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\alpha_\Delta\int_I S_{m_k-1}(t)\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt+\sum_{k=s+1}^{\nu-1}\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_k}\beta_\Delta\int_I S_{m_k-1}(t)\varphi_\Delta^{(0)}(t)dt+$$
$$\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu,\Delta\subset F}\gamma_\Delta\int_I S_{m_\nu-1}(t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt+\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu,\Delta\subset I\setminus F_\nu}\gamma_\Delta\int_I S_{m_\nu-1}(t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt=:$$
$$\omega_{\nu,1}+\omega_{\nu,2}+\omega_{\nu,3}+\omega_{\nu,4}.$$

Из (3.17), (3.16), (1.4) следует, что

$$\sum_{\Delta\in\mathfrak{I}_\nu,\Delta\in I\setminus F_\nu}\gamma_\Delta\varphi_\Delta^{(1)}(t)=\mathrm{I}_{I\setminus F_\nu}.$$

Поэтому

$$\omega_{\nu,4} = \int_{I\backslash F_\nu} S_{m_\nu - 1}(t)dt. \tag{3.23}$$

Из методов выборов функций $\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}$, $\varphi_\Delta^{(0)}$, $\varphi_\Delta^{(1)}$ (см. (2.13), (2.16), (3.1), (2.14)), имеем

$$\left|\int_I S_{m_k-1}(t)\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt\right| < \lambda_p, \quad \left|\int_I S_{m_k-1}(t)\varphi_\Delta^{(0)}(t)dt\right| < \lambda_p,$$

$$\left|\int_I S_{m_\nu-1}(t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt\right| < \lambda_p$$

Поэтому, с учетом (3.18), (3.15), получим

$$\omega_{\nu,1} + \omega_{\nu,2} + \omega_{\nu,3} < 60\lambda_p \mathrm{mes}(E_p) < 60\varepsilon \mathrm{mes}(I). \tag{3.24}$$

Очевидно

$$D_p \subset E_p, \quad \text{где } D_p = \{x \in I : [f(x)]_{\lambda_p} \neq f(x)\}. \tag{3.25}$$

Из (3.20)–(3.24) следует, что для любого $\nu > s$ имеет место

(3.26)

$$\left|\int_I [f(t)]_{\lambda_p} dt - \int_I S_{m_s-1}(t)dt\right| < \left|\int_{I\backslash F_\nu} ([f(t)]_{\lambda_p} - S_{m_\nu-1}(t))dt\right| + 120\lambda_p \mathrm{mes}(E_p).$$

Учитывая, что $|S_{m_\nu-1}(t)| \le \lambda_p$, когда $t \in I\backslash F_\nu$, из (3.25), (3.26), получим

(3.27)

$$\left|\int_I [f(t)]_{\lambda_p} dt - \int_I S_{m_s-1}(t)dt\right| < \left|\int_{I\backslash (F_\nu \cup E_p)} (f(t) - S_{m_\nu-1}(t))dt\right| + 122\lambda_p \mathrm{mes}(E_p).$$

Поскольку последовательность $S_{m_\nu-1}(t)$ по мере сходится к $f(t)$ то для достаточно больших ν

$$\mathrm{mes}\{t \in I : \ |S_{m_\nu-1}(t) - f(t)| > \varepsilon\} < \varepsilon \mathrm{mes}(I).$$

Поэтому с учетом того, что $|S_{m_\nu-1}(t) - f(t)| \le 2\lambda_p$, $t \in I\backslash(F_\nu \cup E_p)$, из (3.27) и (3.15) получим

$$\left|\int_I [f(t)]_{\lambda_p} dt - \int_I S_{m_s-1}(t)dt\right| \le 125\varepsilon\, \mathrm{mes}(I).$$

Теорема 1.4 доказана.

Abstract. In this paper, we prove uniqueness theorems and restoration formulas for coefficients of series by Vilenkin system. The series is assumed to be convergent in measure and the distribution function of the majorant of partial sums satisfies some necessary condition.

Список литературы

[1] Н. Я. Виленкин, "Об одном классе полных ортонормальных систем", Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, no. 4, 363 – 400 (1947).

[2] В. А. Скворцов, М. П. Королева, "О рядах по мултипликативным системам, сходящимся к функциям интегрируемым по Данжуа", Матем. сб., **186**, no. 12, 129 – 150 (1995).

[3] G. G. Gevorkyan, K. A. Navasardyan, "On a summatiom method for Vilenkin and generalized Haar systems", Proceedings of the YSU, Phis.-Math. series, **51**, no. 1, 13 – 17 (2017).

[4] F. Weisz, "Summation of Fourier series", Acta Math. Paedagog. Nyhazi., **20**, 239 – 266 (2004).

[5] В. В. Костин, "К вопросу восстановления коэффициентов рядов по некоторым ортогональным системам функций", Матем. заметки, **73**, no. 5, 704 – 723 (2003).

[6] В. В. Костин, "Обобщение теоремы Л. А. Балашова о подрядах ряда Фурье-Хаара", Матем. заметки, **76**, no. 5, 740 – 747 (2004).

[7] Г. Г. Геворкян, "О единственности аддитивных функций двоичних кубов и рядов по системе Хаара", Изв. НАН Армении, сер. матем., **30**, no. 5, 7 – 21 (1995).

[8] Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, "Об одном методе суммирования рядов по системам Виленкина и Хаара", Докл. НАН Армении, **117**, no. 1, 20 – 25 (2017).

[9] Г. Г. Геворкян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", Матем. сборник, **184**, no. 11, 93 – 130 (1993).

[10] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, М., Наука (1989).

[11] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, Издательство АФЦ (1999).

Поступила 24 марта 2017