Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 2, 2018, стр. 3 – 14.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ КОВАРИОГРАММЫ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Н. Г. АГАРОНЯН, В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *narine78@ysu.am; victoohanyan@ysu.am*

Аннотация. В статье получена формула для вычисления вероятности, что случайный отрезок $L(\omega, u)$ в $\mathbf{R}^n$ с фиксированными направлением u и длиной l полностью лежит в ограниченном выпуклом теле $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ в терминах ковариограммы тела D. Также получена связь между этой вероятностью $P(L(\omega, u) \subset \mathbf{D})$ и зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды для любой размерности n. Используя эту формулу получаем явный вид вероятности $P(L(\omega, u) \subset \mathbf{D})$, в случаях когда D n-мерный шар $(n \geq 2)$ и когда D есть правильный треугольник на плоскости.

MSC2010 numbers: 60D05; 52A22; 53C65

Ключевые слова: Выпуклое тело; ковариограмма; кинематическая мера; зависящая от ориентации функция распределения длины хорды; n-мерный шар; треугольник[1].

1. Введение

Пусть $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ - n-мерное евклидово пространство, $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^n$ - ограниченная выпуклая область с внутренними точками, а $V_n(\cdot)$ - n-мерная мера Лебега в $\mathbf{R}^n$.

Определение 1.1. *(см. [3]). Функция*

$$C(\mathbf{D}, h) = V_n(\mathbf{D} \cap (\mathbf{D} + h)), \quad h \in \mathbf{R}^n, \tag{1.1}$$

называется ковариограммой тела D. *Здесь* $\mathbf{D} + h = \{x + h,\, x \in \mathbf{D}\}$.

Ж. Матерон сформулировал гипотезу, что ковариограмма выпуклого тела D определяет ее в классе всех выпуклых тел, с точностью до параллельных переносов и отражений (см. [3]). Г. Бианчи и Г. Аверков доказали, что каждая плоская выпуклая область определяется в классе всех плоских выпуклых областей по ковариограмме, с точностью до параллельных переносов и отражений (см. [4]).

[1]Настоящее исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке Центра Математических Исследований Ереванского Государственного Университета

Очень мало известно о задаче о ковариограмме, когда размерность пространства больше двух. В случае n-мерного пространства с $n \geq 4$ гипотеза Матерона получила отрицательный ответ. Известно, что центрально-симметричные выпуклые тела любой размерности определяются по их ковариограмме с точностью до параллельных переносов. Для n=3 проблема пока не решена, хотя в случае ограниченного выпуклого многогранника при n=3 гипотеза Матерона получила положительный ответ.

Известно, что задача о ковариограмме эквивалентна задаче восстановления выпуклого тела по зависящей от ориентации распределения случайной хорды (см. [3] - [5]).

Задача нахождения меры отрезков постоянной длины, полностью содержащихся в области D, не имеет простого решения, и зависит от формы D. Известен явный вид кинематической меры для нескольких плоских областей: круга, прямоугольника, если длина отрезка меньше меньшей стороны прямоугольника (см. [1], [2]) и для правильного треугольника, прямоугольника (для произвольной длины отрезка) и правильного пятиугольника (см. [11]).

Пусть S^{n-1} - $(n-1)$-мерная единичная сфера с центром в начале координат в $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим случайную прямую из $\Omega_1(\mathrm{u})$:

$$\Omega_1(\mathrm{u}) = \{\text{прямые параллельные направлению u и пересекающие D}\}.$$

Пусть $\Pi r_{\mathrm{u}^\perp}\mathrm{D}$ - ортогональная проекция D на гиперплоскость $\mathrm{u}^\perp$ ($\mathrm{u}^\perp$ - гиперплоскость проходящая через начало координат с нормальным вектором u).

Случайная прямая, параллельная направлению u и пересекающая D имеет точку пересечения (обозначим ее через x) с $\Pi r_{\mathrm{u}^\perp}\mathrm{D}$. Можно отождествлять точки $\Pi r_{\mathrm{u}^\perp}\mathrm{D}$ с прямыми, которые пересекают D и параллельны направлению u. Последнее означает, что можно отождествлять $\Omega_1(\mathrm{u})$ и $\Pi r_{\mathrm{u}^\perp}\mathrm{D}$. Предположив, что точка пересечения x равномерно распределена в выпуклом теле $\Pi r_{\mathrm{u}^\perp}\mathrm{D}$ мы можем определить следующую функцию распределения:

Определение 1.2. *Функция*

$$F(\mathrm{u}, t) = \frac{V_{n-1}\{x \in \Pi r_{\mathrm{u}^\perp}\mathrm{D} : V_1(g(\mathrm{u}, x) \cap \mathrm{D}) < t)\}}{b_{\mathrm{D}}(\mathrm{u})} \tag{1.2}$$

называется зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды D *в направлении* $\mathrm{u} \in S^{n-1}$ *в точке* $t \in \mathbf{R}^1$*, где* $g(\mathrm{u}, x)$ *- прямая параллельная* u *и пересекающая* $\Pi r_{\mathrm{u}^\perp}\mathrm{D}$ *в точке* x*, а* $b_{\mathrm{D}}(\mathrm{u}) = V_{n-1}(\Pi r_{\mathrm{u}^\perp}\mathrm{D})$.

Вектор $h \in \mathbf{R}^n$ можно задавать как $h = (\mathbf{u}, t)$, где $\mathbf{u}$ - направление h, а t его длина.

Лемма 1.1. *(см. [3]). Пусть $\mathbf{u} \in S^{n-1}$, а $t > 0$ такое, что $\mathbf{D} \cap (\mathbf{D} + t\mathbf{u})$ содержит внутренние точки. Тогда $C(\mathbf{D}, \mathbf{u}, t)$ дифференцируема по t и*

$$-\frac{\partial C(\mathbf{D}, \mathbf{u}, t)}{\partial t} = (1 - F(\mathbf{u}, t)) \cdot b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u}). \tag{1.3}$$

В точке $t = 0$ существует правосторонняя производная и формула также выполнена.

Пусть $L(\mathbf{u}, \omega)$ - случайный отрезок длины $l > 0$, параллельный фиксированному направлению $\mathbf{u}$ и пересекающий $\mathbf{D}$. Рассмотрим случайную величину $|L|(\mathbf{u}, \omega) = V_1(L(\mathbf{u}, \omega) \cap \mathbf{D})$, где $L(\mathbf{u}, \omega) \in \Omega_2(\mathbf{u})$, причем

$\Omega_2(\mathbf{u}) = \{$отрезки длины l, параллельные направлению $\mathbf{u}$ и пересекающие $\mathbf{D}\}$.

Случайный отрезок $L(\mathbf{u}, \omega)$, лежащий на прямой $g(\mathbf{u}, x)$, можно задавать координатами $(g(\mathbf{u}, x), y)$, где y одномерная координата центра отрезка $L(\mathbf{u}, \omega)$ на прямой $g(\mathbf{u}, x)$. Началом координат на прямой $g(\mathbf{u}, x)$ берется одна из точек пересечений $g(\mathbf{u}, x)$ с $\partial \mathbf{D}$. Используя вышеупомянутые обозначения можно отождествлять $\Omega_2(\mathbf{u})$ с множеством:

$$\Omega_2(\mathbf{u}) = \left\{(x, y) : x \in \Pi r_{\mathbf{u}^\perp} \mathbf{D}, \quad y \in \left[-\frac{l}{2}, \chi(\mathbf{u}, x) + \frac{l}{2}\right]\right\},$$

где $\chi(\mathbf{u}, x) = V_1(g(\mathbf{u}, x) \cap \mathbf{D})$. Заметим, что $\Omega_2(\mathbf{u})$ не зависит от того, какая из двух точек пересечений $g(\mathbf{u}, x) \cap \mathbf{D}$ берется в качестве начала координат. Какое из двух направлений выбрано в качестве положительного следует из вида интервала изменения y. Далее, обозначим

$$B_{\mathbf{D}}^{\mathbf{u}, t} = \{(x, y) \in \Omega_2(\mathbf{u}) : \ |L|(\mathbf{u}, x, y) < t\}, \quad t \in \mathbf{R}^1,$$

Очевидно, что $\Omega_2(\mathbf{u})$ и $B_{\mathbf{D}}^{\mathbf{u}, t}$ измеримые подмножества в $\mathbf{R}^n$.

Определение 1.3. *Функция*

$$F_{|L|}(\mathbf{u}, t) = \frac{V_n(B_{\mathbf{D}}^{\mathbf{u}, t})}{V_n(\Omega_2(\mathbf{u}))} = \frac{1}{V_n(\Omega_2(\mathbf{u}))} \int_{B_{\mathbf{D}}^{\mathbf{u}, t}} dx\, dy \tag{1.4}$$

называется зависящей от ориентации функцией распределения длины случайного отрезка $|L|$ в направлении $\mathbf{u} \in S^{n-1}$.

Пусть G_n - пространство всех прямых в $\mathbf{R}^n$. Прямую $g \in G_n$ можно задавать ее направлением $\mathbf{u} \in S^{n-1}$ и точкой пересечения x с гиперплоскостью $\mathbf{u}^\perp$.

Пусть $\mu(\cdot)$ локально-конечная мера в пространстве G_n, инвариантная относительно группы всех евклидовых движений плоскости. Известно, что элемент этой меры с точностью до постоянного множителя имеет следующий вид (см. [1] и [2])

$$\mu(dg) = dg = d\mathbf{u}\, dx,$$

где плотность $d\mathbf{u}$ - элемент объема на единичной сфере S^{n-1}, а dx - элемент объема на $\mathbf{u}^{\perp}$ в точке x.

Обозначим через $O_{n-1} = \sigma_{n-1}(S^{n-1})$ площадь поверхности единичной сферы в $\mathbf{R}^n$. Для каждого ограниченного выпуклого тела $\mathbf{D}$, обозначим множество прямых, пересекающих $\mathbf{D}$ через

$$[\mathbf{D}] = \{g \in G_n,\ g \cap \mathbf{D} \neq \emptyset\}$$

Имеем (см. [1] или [5])

$$\mu([\mathbf{D}]) = \frac{O_{n-2} V_{n-1}(\partial \mathbf{D})}{2(n-1)}.$$

Случайная прямая в $[\mathbf{D}]$ есть прямая с распределением пропорциональным сужению меры μ на $[\mathbf{D}]$. Следовательно, для каждого $t \in \mathbf{R}^1$ имеем

$$F(t) = \frac{\mu(\{g \in [\mathbf{D}],\ V_1(g \cap \mathbf{D}) < t\})}{\mu([\mathbf{D}])}$$

$F(t)$ называется функцией распределения длины хорды тела $\mathbf{D}$.

Пусть $L(\omega)$ - случайный отрезок длины l в $\mathbf{R}^n$, а $K(\cdot)$ - кинематическая мера отрезка L (см. [1]). Если $g \in G_n$ прямая, содержащая $L(\omega)$, а y одномерная координата центра отрезка $L(\omega)$ на g, тогда элемент кинематической меры с точностью до постоянного множителя имеет вид $dK = dg\, dy\, dK_{[1]}$, где dy одномерная лебегова мера на g, а $dK_{[1]}$ элемент движений в $\mathbf{R}^n$, оставляющих прямую g неподвижной (см. [2]). В случае ориентированного отрезка, вышеупомянутый постоянный множитель равен 1, а для неориентированного отрезка множитель $\frac{1}{2}$ (в этой статье рассматриваются только неориентированные отрезки).

Длина случайного отрезка $|L|(\omega) = V_1(L(\omega) \cap \mathbf{D})$, при условии, что $L(\omega)$ пересекает $\mathbf{D}$, имеет следующую функцию распределения

$$F_{|L|}(t) = \frac{K(L : L \cap \mathbf{D} \neq \emptyset, V_1(L \cap \mathbf{D}) < t)}{K(L : L \cap \mathbf{D} \neq \emptyset)}, \qquad t \in \mathbf{R}^1.$$

$F_{|L|}(t)$ - функция распределения длины случайного отрезка $|L|(\omega)$.

2. Основные формулы

Напомним утверждения, полученные в предыдущих статьях и используемые в настоящей работе.

Теорема 2.1. *(см. [12]) Связь между функцией распределения случайной величины $|L|(\mathbf{u},\omega)$ и зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды в $\mathbf{R}^n$*

$$F_{|L|}(\mathbf{u},t)=\begin{cases}0 & \text{для}\quad t\le 0,\\ \dfrac{b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})\left[2t+F(\mathbf{u},t)(l-t)-\int_0^t F(\mathbf{u},z)\,dz\right]}{V_n(\mathbf{D})+lb_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})} & \text{для}\quad 0\le t\le l,\\ 1 & \text{для}\quad t>l.\end{cases}\tag{2.1}$$

В [8]-[10] получены явные выражения зависящей от ориентации функции распределения длины хорды для треугольника, эллипса, правильного многоугольника и параллелограмма. Следовательно, подставляя в (2.1) $n=2$ и $F(\mathbf{u},t)$ получаем явные выражения для $F_{|L|}(\mathbf{u},t)$ для вышеупомянутых плоских выпуклых областей.

Теорема 2.2. *(см. [12]) Связь между функцией распределения случайной величины $|L|(\mathbf{u},\omega)$ и ковариограммой на интервале $[0,l]$ задается следующей формулой*

$$F_{|L|}(\mathbf{u},t)=1+\frac{1}{V_n(\mathbf{D})+l\,b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})}\left[\frac{\partial C(\mathbf{D},\mathbf{u},t)}{\partial t}(l-t)-C(\mathbf{D},\mathbf{u},t)\right]\tag{2.2}$$

Значения $F_{|L|}(\mathbf{u},t)$ равны 0, для $t\le 0$ и равны 1, для $t>l$.

Теорема 2.3. *(см. [12]) Связь между функцией распределения длины случайного отрезка, пересекающего $\mathbf{D}$ и функцией распределения длины хорды $\mathbf{D}$ в $\mathbf{R}^n$ (см. [12], формула (2.5)):*

$$F_{|L|}(t)=\begin{cases}0 & \text{для}\quad t\le 0,\\ \dfrac{O_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})\left(2t+F(t)(l-t)-\int_0^t F(z)dz\right)}{(n-1)O_{n-1}V_n(\mathbf{D})+lO_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})} & \text{для}\quad 0\le t\le l,\\ 1 & \text{для}\quad t>l.\end{cases}\tag{2.3}$$

Если предположить, что $F_{|L|}(t)$ имеет плотность, подставляя в (2.3) $n=2$, получаем результат из [11].

Используя результаты (2.1)-(2.3) мы приходим к основным результатам настоящей работы.

Обозначим через $\mathbf{P}(L(\mathbf{u},\omega) \subset \mathbf{D})$ вероятность, что отрезок $L(\mathbf{u},\omega)$ (фиксированной длины l и направления $\mathbf{u}$) полностью лежит в теле $\mathbf{D}$.

Предложение 2.1. *Вероятность* $\mathbf{P}(L(\mathbf{u},\omega) \subset \mathbf{D})$ *в терминах функции распределения* $F(\mathbf{u},z)$ *имеет следующий вид:*

$$\mathbf{P}(L(\mathbf{u},\omega) \subset \mathbf{D}) = \frac{V_n(\mathbf{D}) - l\,b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) + b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u}))\int_0^l F(\mathbf{u},z)\,dz}{V_n(\mathbf{D}) + l\,b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})}, \tag{2.4}$$

а в терминах ковариограммы тела $\mathbf{D}$ *имеет вид:*

$$\mathbf{P}(L(\mathbf{u},\omega) \subset \mathbf{D}) = \frac{C(\mathbf{D},\mathbf{u},l)}{V_n(\mathbf{D}) + l\,b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})}, \tag{2.5}$$

Доказательство. Если подставить $t = l$ в выражения (2.1) и (2.2), то $F_{|L|}(\mathbf{u},l)$ есть вероятность, что длина части отрезка, лежащего в $\mathbf{D}$ меньше l. Следовательно,

$$1 - F_{|L|}(\mathbf{u},l) = \mathbf{P}(|L|(\mathbf{u},\omega) \geq l).$$

А так как длина отрезка $L(\mathbf{u},\omega)$ равна l, то $\mathbf{P}(|L|(\mathbf{u},\omega) \geq l)$ совпадает с $1 - F_{|L|}(\mathbf{u},l)$ используя (2.1) получаем (2.4).

Аналогично, но с использованием (2.2) получаем (2.5). □

Обозначим через $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{D})$ вероятность того, что случайный отрезок длины l в $\mathbf{R}^n$ имеющий общую точку с телом $\mathbf{D}$ полностью лежит в теле $\mathbf{D}$ (в этом случае направление отрезка $L(\omega)$ произвольно). Отметим, что вероятность $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{D})$ можно получить из вероятности $\mathbf{P}(L(\mathbf{u},\omega) \subset \mathbf{D})$ проинтегрировав по всем направлениям $\mathbf{u} \in S^{n-1}$.

Предложение 2.2.

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{D}) = \frac{O_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})\left(\int_0^l F(z)dz - l\right) + (n-1)O_{n-1}V_n(\mathbf{D})}{(n-1)O_{n-1}V_n(\mathbf{D}) + lO_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})} \tag{2.6}$$

Доказательство. Если подставить $t = l$ в формулу (2.3), то функция распределения $F_{|L|}(l)$ есть вероятность, что длина части отрезка, лежащего в $\mathbf{D}$ меньше l. Следовательно,

$$1 - F_{|L|}(l) = \mathbf{P}(|L|(\omega) \geq l).$$

А так как длина отрезка $L(\omega)$ равна l, то $\mathbf{P}(|L|(\omega) \geq l)$ совпадает с $\mathbf{P}(L(\mathbf{u},\omega) \subset \mathbf{D})$. Преобразовав $1 - F_{|L|}(l)$ используя (2.3) получаем (2.6). Предложение 2.2 доказано. □

В параграфах 3 и 4 мы используем полученные формулы для некоторых частных случаев.

3. Случай n-мерного шара

Так как шар $\mathbf{B_n(R)}$ является изотропным телом, то $C(\mathbf{B_n(R)}, u, l) = C(\mathbf{B_n(R)}, l)$ не зависит от направления $u \in S^{n-1}$. Следовательно, получаем

$$(3.1)\qquad \mathbf{P}(L(\mathbf{u}, \omega) \subset \mathbf{B_n(R)}) = \mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_n(R)}) = \frac{C(\mathbf{B_n(R)}, l)}{V_n(\mathbf{B_n(R)}) + l \cdot b_{\mathbf{B_n(R)}}(u)}.$$

Известно, что объем n-мерного шара радиуса R равен

$$(3.2)\qquad V_n(\mathbf{B_n(R)}) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot R^n,$$

а $b_{\mathbf{B_n(R)}}(u)$ - проекция n-мерного шара радиуса R на гиперплоскость $\mathbf{u}^{\perp}$ равна

$$(3.3)\qquad b_{\mathbf{B_n(R)}}(u) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdot R^{n-1},$$

где

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

– гамма функция. Известно, что $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Нетрудно убедиться, что ковариограмма n-мерного шара радиуса R равна удвоенному объему n-мерного шарового сегмента высоты $R - l/2$. Используя формулу для n-мерного шарового сегмента (см. [14]), получаем

$$(3.4)\qquad C(\mathbf{B_n(R)}, l) = 2 \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdot R^n \cdot \int_0^\phi \sin^n \theta\, d\theta,$$

где $\phi = \arccos \frac{l}{2R}$.

Следовательно, подставляя $C(\mathbf{B_n(R)}, l)$ из (3.4) и используя (3.2 и (3.3), получаем, что вероятность того, что отрезок длины $l \leq 2R$ полностью лежит в n-мерном шаре радиуса R равна

$$(3.5)\qquad \mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_n(R)}) = \frac{2R}{\left(R \frac{\sqrt{\pi}\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2+1)} + l\right)} \int_0^\phi \sin^n \theta\, d\theta.$$

Очевидно, для любой размерности n имеем $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_n(R)}) = 1$ для $l = 0$ и $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_n(R)}) = 0$ для $l \geq 2R$.

Рассмотрим частные случаи $n = 2, 3, 4, 5$.

3.1. Случай $n = 2$. Подставляя $n = 2$ в (3.5), для круга $\mathbf{B_2(R)}$ радиуса R, получаем

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_2(R)}) = \frac{4R}{\pi R + 2l} \int_0^{\arccos \frac{l}{2R}} \sin^2 \theta \, d\theta =$$

$$= \frac{R}{\pi R + 2l} \left(2 \arccos \frac{l}{2R} - \sin 2(\arccos \frac{l}{2R}) \right).$$

Следовательно, для $l \leq 2R$ окончательно получаем

$$\text{(3.6)} \quad \mathbf{P}(L(\mathbf{u}, \omega) \subset \mathbf{B_2(R)}) = \mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_2(R)}) = \frac{2R \arccos \frac{l}{2R} - \frac{l}{2R}\sqrt{4R^2 - l^2}}{\pi R + 2l}.$$

При $l = R$ получаем $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_2(R)}) = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6(\pi+2)} \approx 0.239$.

Числитель выражения (3.6) помноженный на R (так как мы сократили числитель и знаменатель дроби на R) совпадает с кинематической мерой отрезков полностью лежащих в круге $\mathbf{B_2(R)}$ радиуса R (см. [1] и [2]).

Так как круг является изотропной областью, то можно получить результат (3.6) используя формулы (2.1) или (2.3). Если подставить в (2.1) $n = 2$, то получаем

$$\text{(3.7)} \qquad P(L(\omega) \subset B_2(R)) = 1 - \frac{|\partial D|}{\pi \|D\| + l|\partial D|} \left[2l - l \cdot F_D(l) + \int_0^l u\, f(u)\, du \right],$$

так как

$$\int_0^l F_D(u) = l \cdot F_D(l) - \int_0^l f_D(u)\, du.$$

Так как известны плотность и функция распределения длины хорды для круга радиуса R (см. [6], [7])

$$f_{\mathbf{B_2(R)}}(u) = \begin{cases} 0, & u \notin [0, 2R) \\ \frac{u}{2R\sqrt{4R^2 - u^2}}, & u \in [0, 2R) \end{cases}$$

$$F_{\mathbf{B_2(R)}}(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{4R^2}}, & u \in [0, 2R) \\ 1, & u \leq 2R \end{cases}$$

то надо подставить эти функции в (3.7) и вычислить стандартный интеграл. Следовательно, получаем

$$P(L(\omega) \subset B_2(R)) = \frac{\pi R - \frac{l}{R}\sqrt{4R^2 - l^2} - \frac{1}{R}\int_0^l \frac{u^2}{\sqrt{4R^2 - u^2}}\, du}{\pi R + 2l}$$

Так как

$$\int_0^l \frac{u^2}{\sqrt{4R^2 - l^2}}\, du = -\frac{l}{2}\sqrt{4R^2 - u^2} + 2R^2 \arcsin \frac{l}{2R},$$

то окончательно получаем

$$P(L(\omega) \subset B_2(R)) = \frac{1}{\pi R + 2l}\left[\pi R - \frac{l}{2R}\sqrt{4R^2 - l^2} - 2R\arcsin\frac{l}{2R}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi R + 2l}\left[2R\arccos\frac{l}{2R} - \frac{l}{2R}\sqrt{4R^2 - l^2}\right],$$

что совпадает с (3.6).

3.2. **Случай** $n = 3$. Подставляя $n = 3$ в (3.5), для шара $\mathbf{B_3(R)}$ радиуса R, получаем

$$\mathrm{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_3(R)}) = \frac{6R}{4R + 3l}\int_0^{\arccos\frac{l}{2R}} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{6R}{4R + 3l}\left(\frac{l^3}{24R^3} - \frac{l}{2R} + \frac{2}{3}\right)$$

(так как $\Gamma(2) = 1$ и $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$).

Следовательно, для $l \le 2R$ окончательно получаем

$$\mathrm{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_3(R)}) = \frac{l^3 - 12lR^2 + 16R^3}{16R^3 + 12lR^2} \tag{3.8}$$

При $l = R$ получаем $\mathrm{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_3(R)}) = \frac{5}{28} \approx 0.1786$.

3.3. **Случай** $n = 4$. Подставляя $n = 4$ в (3.5), для шара $\mathbf{B_4(R)}$ радиуса R, получаем

$$\mathrm{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_4(R)}) = \frac{16R}{3\pi R + 8l}\int_0^{\arccos\frac{l}{2R}} \sin^4\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{16R}{3\pi R + 8l}\left(\frac{3}{8}\arccos\frac{l}{2R} - \frac{1}{4}\sin(2\arccos\frac{l}{2R}) + \frac{1}{32}\sin(4\arccos\frac{l}{2R})\right) =$$

$$= \frac{16R}{3\pi R + 8l}\left(\frac{3}{8}\arccos\frac{l}{2R} - \frac{l}{8R^2}\sqrt{4R^2 - l^2} + \frac{l^3}{64R^4}\sqrt{4R^2 - l^2} - \frac{l}{32R^2}\sqrt{4R^2 - l^2}\right).$$

Следовательно, для $l \le 2R$ окончательно получаем

$$\mathrm{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_4(R)}) = \frac{2R}{3\pi R + 8l}\left[3\arccos\frac{l}{2R} + \frac{l\sqrt{4R^2 - l^2}}{8R^2}\left(\frac{l^2}{R^2} - 10\right)\right] \tag{3.9}$$

При $l = R$ получаем $\mathrm{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_4(R)}) = \frac{8\pi - 9\sqrt{3}}{12\pi + 32} \approx 0.136935$.

3.4. **Случай** $n = 5$. Подставляя $n = 5$ в (3.5), для шара $\mathbf{B_5(R)}$ радиуса R, получаем

$$\mathrm{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_5(R)}) = \frac{30R}{16R + 15l}\int_0^{\arccos\frac{l}{2R}} \sin^5\theta\, d\theta$$

(так как $\Gamma(3) = 2$ и $\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$).

Следовательно, для $l \le 2R$ окончательно получаем

$$\mathrm{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_5(R)}) = \frac{30R}{16R + 15l}\left(-\frac{l^5}{160R^5} + \frac{l^3}{12R^3} - \frac{l}{2R} + \frac{8}{15}\right). \tag{3.10}$$

При $l = R$ получаем $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_5(R)}) = \frac{53}{496} \approx 0.1068$.

Замечание 1. Вероятности $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{B_n(R)})$, при $n = 2, 3, 4, 5$ убывают с возрастанием n от 0.239 (n=2) до 0.1068 (n=5).

4. Случай правильного треугольника

Для произвольного тела $\mathbf{D}$ n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$ имеем:

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{D}) = \frac{1}{O_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \frac{C(\mathbf{D}, \mathbf{u}, l)}{V_n(D) + l \cdot b_D(\mathbf{u})}\, du, \tag{4.1}$$

причем кинематическая мера отрезков полностью лежащих в $\mathbf{D}$ вычисляется по следующей формуле:

$$K(L(\omega) \subset \mathbf{D}) = \int_{S^{n-1}} C(\mathbf{D}, \mathbf{u}, l)\, du$$

Для любой плоской ограниченной выпуклой области имеем:

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \mathbf{D}) = \frac{1}{\pi S(D) + l|\partial D|} \int_0^\pi C(D, u, l)\, du. \tag{4.2}$$

Ковариограмма правильного треугольника Δ_a со стороной a имеет вид (см. [8]):

$$C(\Delta_a, u, l) =$$

$$(4.3) = \begin{cases} \frac{(a\sin\beta - t\sin(u+\beta))^2 \sin\alpha}{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}, & u \in [0, \alpha],\ t \in [0, \frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ \frac{(a\sin\alpha\sin\beta - t\sin u\, \sin(\alpha+\beta))^2}{2\sin\alpha\sin\beta\, \sin(\alpha+\beta)}, & u \in [\alpha, \pi-\beta],\ t \in [0, \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ \frac{(a\sin\alpha - t\sin(u-\alpha))^2 \sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}, & u \in [\pi-\beta, \pi],\ t \in [0, \frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}] \\ \frac{(a\sin\beta + t\sin(u+\beta))^2 \sin\alpha}{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}, & u \in [\pi, \pi+\alpha],\ t \in [0, -\frac{a\sin\beta}{\sin(u+\beta)}] \\ \frac{(a\sin\alpha\sin\beta + t\sin u\, \sin(\alpha+\beta))^2}{2\sin\alpha\sin\beta\, \sin(\alpha+\beta)}, & u \in [\pi+\alpha, 2\pi-\beta],\ t \in [0, -\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin u}] \\ \frac{(a\sin\alpha + t\sin(u-\alpha))^2 \sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}, & u \in [2\pi-\beta, 2\pi],\ t \in [0, -\frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}]. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $0 \le l \le a\sqrt{3}/2$. Подставляя в (4.3) $\alpha = \beta = \pi/6$, получаем, что для вычисления вероятности $\mathbf{P}(L(\omega) \subset \Delta_a)$ нам надо вычислить следующий интеграл:

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \Delta_a) =$$

$$\frac{1}{\pi\|D\| + l|\partial D|} \int_0^\pi C(\Delta_a, u, l)\, du = \frac{1}{\pi\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3al} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \left(\frac{3}{4}a - \frac{\sqrt{3}}{2} l \cdot \sin u\right)^2 du =$$

$$= \frac{\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{4} - 3al + \frac{\pi l^2\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{4}l^2}{\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{4} + 3al}.$$

Таким образом, для $0 \le l \le a\sqrt{3}/2$ окончательно получаем:

$$\mathbf{P}(L(\omega) \subset \Delta_a) = \frac{3\pi a^2 - 12\sqrt{3}al + (2\pi + 3\sqrt{3})l^2}{3a(\pi a + 4\sqrt{3}l)}. \tag{4.4}$$

Рассмотрим случай $a\sqrt{3}/2 \le l \le a$. В этом случае получаем:

$$\mathrm{P}(L(\omega) \subset \Delta_a) = \frac{1}{\pi\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3al} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\varphi} (a\sqrt{3} - 2l\sin(u + \pi/3))^2\, du,$$

где $\varphi = \arcsin \frac{a\sqrt{3}}{2l} - \frac{\pi}{3}$.

Вычисление интеграла дает

$$\mathrm{P}(L(\omega) \subset \Delta_a) = \frac{\left(l^2\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}\right)\arcsin\frac{\sqrt{3}a}{2l} - \frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2} - 3al + \frac{9a}{4}\sqrt{4l^2 - 3a^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}l^2\pi + \frac{3}{4}l^2}{\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{4} + 3al}$$

Таким образом, для $a\sqrt{3}/2 \le l \le a$ окончательно получаем:

$$\mathrm{P}(L(\omega) \subset \Delta_a) =$$

(4.5)

$$\frac{(12l^2\sqrt{3} + 18\sqrt{3}a^2)\arcsin\frac{\sqrt{3}a}{2l} - 6\sqrt{3}\pi a^2 - 36al + 27a\sqrt{4l^2 - 3a^2} - 4\sqrt{3}\pi l^2 + 9l^2}{3(\pi a\sqrt{3} + 12l)}.$$

Отметим, что при $l = a\sqrt{3}/2$ получаем

$$\mathrm{P}(L(\omega) \subset \Delta_a) = \frac{6\pi - 24 + 3\sqrt{3}}{4(\pi + 6)} \approx 0.0458.$$

Можно получить результат (4.4)- (4.5) используя формулу (2.3), если подставить в (2.3) $n = 2$ и функцию распределения длины хорды для правильного треугольника (см. [7]).

Abstract. In the paper, a formula to calculate the probability that a random segment $L(\omega, \mathrm{u})$ in $\mathbf{R}^n$ with a fixed direction u and length l lies entirely in the bounded convex body $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^n$ $(n \ge 2)$ is obtained in terms of covariogram of the body D. For any dimension $n \ge 2$, a relationship between the probability $P(L(\omega, \mathrm{u}) \subset \mathbf{D})$ and the orientation-dependent chord length distribution is also obtained. Using this formula, we obtain the explicit form of the probability $P(L(\omega, \mathrm{u}) \subset \mathbf{D})$ in the cases where D is an n-dimensional ball $(n \ge 2)$, or a triangle on the plane.

Список литературы

[1] L. A. Santalo, Integral Geometry and Geometric Probability Addision-Wesley, MA (2004).
[2] R. De-Lin, Topics in Integral Geometry, Utopia press, Singapore (1994).
[3] Ж. Матерон, Случайные Множества и Интегральная Геометрия, Мир, Москва (1978).
[4] G. Bianchi and G. Averkov, "Confirmation of Matheron's Conjecture on the covariogram of a planar convex body" Journal of the European Mathematical Society, 11, 1187 – 1202 (2009).
[5] R. Schneider and W. Weil, Stochastic and Integral Geometry, Springer (2008).
[6] V. K. Ohanyan and N. G. Aharonyan, "Tomography of bounded convex domains", SUTRA: International Journal of Mathematical Sciences, 2, no. 1, 1 – 12 (2009).

[7] Н. Г. Агаронян, В. К. Оганян, "Функция распределения длины хорды для многоугольников", **40**, но. 4, 43 – 56 (2005).

[8] А. Гаспарян и В. К. Оганян, "Восстановление треугольников по ковариограмме", Известия НАН Армении, серия Математика, **47**, но. 3, 25 – 42 (2013).

[9] Г. С. Арутюнян и В. К. Оганян, "Зависящие от направления распределения сечений выпуклых тел", Известия НАН Армении, серия Математика, **49**, но. 3, 3 – 24 (2014).

[10] А. Гаспарян и В. К. Оганян, "Ковариограмма параллелограмма", Известия НАН Армении, серия Математика, **49**, но. 4, 17 – 34 (2014).

[11] Н. Г. Агаронян, Г. С. Арутюнян и В. К. Оганян, "Случайная копия отрезка внутри выпуклой области", Известия НАН Армении, серия Математика, **45**, но. 5, 5 – 16 (2010).

[12] А. Гаспарян и В. К. Оганян, "Зависящее от ориентации распределение длины случайного отрезка и ковариограмма", Известия НАН Армении, серия Математика, **50**, но. 2, 3 – 12 (2015).

[13] Н. Г. Агаронян, В. К. Оганян, "Кинематическая мера отрезков, содержащихся в области" Известия НАН Армении, серия Математика, **46**, но. 5, 3 – 14 (2011).

[14] S. Li, "Coincise formulas for the area and volume of a hyperspherical cap", Asian J. of Mathematics and Statistics, **4**, no. 1, 66 – 70 (2011).

Поступила 3 апреля 2017