Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 1, 2018, стр. 74 – 83.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ

А. Х. ХАЧАТРЯН, Х. А. ХАЧАТРЯН, А. А. ХАЧАТРЯН

Институт Математики НАН РА[1]
Национальный Аграрный Университет Армении
E-mails: *aghavard59@mail.ru*, *khach82@rambler.ru*, *hmayakk@bk.ru*

Аннотация. Работа посвящена вопросу разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения типа Урысона. Указанное уравнение имеет применение в кинетической теории газов и выводится из модельного уравнения Больцмана. Доказана теорема существования однопараметрического семейства положительных решений в пространстве функций, имеющих линейный рост в бесконечности. Более того для каждого представителя из этого семейства найдена точная асимптотическая формула в бесконечности. Получены двусторонние оценки решения, а также предложен итерационный способ построения решения.В конце работы приведены примеры функций, описывающих нелинейность и удовлетворяющих условиям теоремы.

MSC2010 number: 35Q20, 82B40.

Ключевые слова: уравнение Урысона; однопараметрическое семейство решений; итерации; нелинейность; монотонность; поточечная сходимость.

1. Введение

В работе рассматривается следующее нелинейное интегральное уравнение Урысона

$$\varphi(x) = \int_0^\infty U(x,t,\varphi(t))dt, \quad x \in R^+ = [0,+\infty) \tag{1.1}$$

относительно искомой измеримой и вещественной функции $\varphi(x)$. Здесь

$$U(x,t,z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{|x-t|}{p}} + \varepsilon e^{-\frac{(x+t)}{p}}\right) \frac{e^{-p^2}}{p} z(1+Q(z))e^{-p^2(2Q(z)+Q^2(z))}dp, \tag{1.2}$$

$(x,t,z) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, где $Q(z)$– определенная на $[0,+\infty)$ непрерывная вещественнозначная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта No. SCS 15T-1A033

а) существует число $A > 0$ такое, что $Q(z) \geq 0, \quad z \in [A, +\infty)$, $Q \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad m_2(Q) \equiv \int\limits_0^\infty z^2 Q(z)dz < +\infty$.

б) функция $zQ(z)$ убывает по z на $[A, +\infty)$, а функция $z + zQ(z)$ возрастает по z на $[A, +\infty)$.

Уравнением (1.1)-(1.2) описывается задача течения газа в полупространстве $x > 0$, ограниченном твердой плоской стенкой $x = 0$. Уравнение (1.1)-(1.2) можно вывести из стационарного модельного нелинейного уравнения Больцмана в рамках модифицированной модели Бхатнагара-Гросса-Крука [1]-[3].

Искомая функция $\varphi(x)$ играет роль скорости газа, $0 \leq \varepsilon < 1$-коэффициент аккомодации. Случай $\varepsilon = 0$ соответствует чисто диффузному отражению, $\varepsilon \neq 0$ соответствует случаю совместного учета диффузного и зеркального отражения. Заметим, что при $Q(z) = 0$ уравнение (1.1)-(1.2) становится линейным интегральным уравнением с суммарно-разностным ядром. Настоящая работа посвящена изучению и решению уравнения Урысона (1.1)-(1.2). Доказывается,что при условиях а)-б) уравнение (1.1)-(1.2) обладает однопараметрическим семейством положительных решений, имеющих линейный рост в бесконечности. Более того для каждого решения из этого семейства найдена точная асимптотическая формула в бесконечности. Получены двусторонние оценки решения, также описан конструктивный способ построения решения. В конце работы приведены примеры функций, описывающих нелинейность и удовлетворяющих условиям теоремы.

2. Основной результат

Ниже докажем, что при условиях а)-б) уравнение (1.1)-(1.2) обладает однопараметрическим семейством положительных решений с асимптотикой $O(x)$. Для получения основного результата нам понадобятся некоторые новые вспомогательные факты. По пунктам приведем доказательство этих фактов.

Пункт 1. Сперва убедимся, что при каждом фиксированном $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ функция $U(x, t, z)$ монотонно возрастает по z на множестве $[A, +\infty)$.

Действительно, если обозначить через $\chi(p, z)$ следующую функцию

$$\chi(p, z) = z(1 + Q(z))e^{-p^2(2Q(z)+Q^2(z))},$$

определенную на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, то в силу условий а)-б) нетрудно убедиться,что $\chi(p, z)$ по z возрастает на $[A, +\infty)$. На самом деле, пусть $z_1, z_2 \in [A, +\infty)$ и $z_1 > z_2$. Сперва проверим,что $Q(z_1) \leq Q(z_2)$. Поскольку $zQ(z)$ по z убывает на $[A, +\infty)$, то из соотношения $0 \geq z_1 Q(z_1) - z_2 Q(z_2) = z_1(Q(z_1) - Q(z_2)) + (z_1 - z_2)Q(z_2)$

и в силу неотрицательности функции $Q(z)$ на $[A,+\infty)$ получим $Q(z_1)\leq Q(z_2)$. Следовательно,

$$\chi(p,z_1)-\chi(p,z_2)\geq z_1(1+Q(z_1))e^{-p^2(2Q(z_2)+Q^2(z_2))}-z_2(1+Q(z_2))e^{-p^2(2Q(z_2)+Q^2(z_2))}=$$

$$=e^{-p^2(2Q(z_2)+Q^2(z_2))}(z_1-z_2+z_1Q(z_1)-z_2Q(z_2))\geq 0,$$

ибо $z+zQ(z)$ по z возрастает на $[A,+\infty)$.

Из представления (1.2) с учетом монотонности функции $\chi(p,z)$ по z на $[A,+\infty)$, следует, что

$$U(x,t,z)\ \uparrow \text{по } z \text{ на } [A,+\infty).$$

Пункт 2. Наряду с уравнением (1.1) (с ядром (1.2)) рассмотрим следующее вспомогательное однородное уравнение Винера-Хопфа:

$$S(x)=\int_0^\infty u_0(x-t)S(t)dt,\quad x\geq 0, \tag{2.1}$$

с начальным условием

$$S(0)=1, \tag{2.2}$$

относительно искомой функции $S(x)$, где

$$u_0(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{|\tau|}{p}}\frac{e^{-p^2}}{p}dp,\quad \tau\in\mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Из представления (2.3) легко следует, что

$$u_0(\tau)\geq 0,\quad \tau\in\mathbb{R},\quad \int_{-\infty}^\infty u_0(\tau)d\tau=1,\quad u_0(-\tau)=u_0(\tau),\quad \tau>0,\quad \lim_{\tau\to 0}u_0(\tau)=+\infty$$

и существует

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^j u_0(\tau)d\tau<+\infty,\quad j=0,1,2,\ldots. \tag{2.4}$$

Из результатов работы [4] следует, что решение $S(x)$ задачи (2.1)-(2.2) обладает следующими свойствами:

$$S(x)\ \text{ возрастает по } x \text{ на } \mathbb{R}^+,\quad S(x)\geq\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu_2}},\quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{2.5}$$

где $\nu_2\equiv\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tau^2u_0(\tau)d\tau$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\left(\sqrt{\frac{1}{2}\nu_2}\right)^{-1},$$

существуют положительные числа a и b такие, что

$$S(x)\leq ax+b,\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{2.6}$$

В нашем случае из (2.3) легко проверить,что $\nu_2 = 1$. Из (2.5) следует, что

(2.7) $$S(x) \geq \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Пункт 3. Введем в рассмотрение также следующие вспомогательные неоднородные интегральные уравнения с суммарно-разностными ядрами:

(2.8) $$\psi(x) = g(x) + \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))\psi(t)dt, \quad x \geq 0,$$

(2.9) $$\tilde{\psi}(x) = \tilde{g}(x) + \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))\tilde{\psi}(t)dt, \quad x \geq 0$$

относительно искомых функций ψ и $\tilde{\psi}$, где функции g и $\tilde{g}$ допускают следующие представления:

(2.10) $$g(x) = \int_0^\infty (u_1(x-t) + \varepsilon u_1(x+t))G(\sqrt{2}At + A)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

(2.11) $$\tilde{g}(x) = \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))(\sqrt{2}At + A)Q(\sqrt{2}At + A)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

(2.12) $$G(z) \equiv z(2Q(z) + Q^2(z)), \quad z \geq 0,$$

(2.13) $$u_1(\tau) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{|\tau|}{p}} p e^{-p^2} dp, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Из условий а)-б), накладываемых на функции Q, сразу следует, что

(2.14) $$G(z) \text{ убывает по } z \text{ на } [A, +\infty), \quad G(z) \geq 0, \quad z \in [A, +\infty),$$

(2.15) $$G \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+) \qquad m_1(G) < +\infty.$$

Таким образом, в силу того, что $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^j u_1(\tau)d\tau < +\infty$, $(j = 1, 2, \ldots)$ из (2.10), (2.11) и (2.14), (2.15) следует, что

(2.16) $$g(x) \geq 0, \quad x \geq 0, \quad g \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad m_1(g) < +\infty,$$

(2.17) $$\tilde{g}(x) \geq 0, \quad x \geq 0, \quad \tilde{g} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \qquad m_1(\tilde{g}) < +\infty.$$

Следовательно, из результатов работ [4], [5] вытекает, что уравнения (2.8) и (2.9) обладают положительными и ограниченными решениями ψ и $\tilde{\psi}$ соответственно. Обозначим через

$$\lambda \equiv \sup_{x\geq 0}\psi(x), \quad \tilde{\lambda} \equiv \sup_{x\geq 0}\tilde{\psi}(x). \tag{2.18}$$

Пункт 4. Наряду с уравнением (1.1) ниже займемся изучением следующего однородного уравнения с суммарно-разностным ядром:

$$\Phi(x) = \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))\Phi(t)dt, \quad x \geq 0, \tag{2.19}$$

относительно искомой функции $\Phi(x)$, где ядерная функция u_0 задается согласно формуле (2.3), а $\varepsilon \in [0,1)$.

Ниже убедимся, что уравнение (2.19) имеет положительное решение с асимптотикой $\Phi(x) = \sqrt{2}x + o(x)$, когда $x \to +\infty$. А именно справедлив следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть $u_0(x)$ допускает представление* (2.3), *а* $\varepsilon \in [0,1]$. *Тогда уравнение* (2.19) *имеет положительное решение с асимптотикой* $\Phi(x) = \sqrt{2}x + o(x)$, *при* $x \to +\infty$. *Более того* $\Phi(x) \geq \dfrac{\sqrt{2}x}{2} + \dfrac{1}{2}$, $x \geq 0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим соответствующее неоднородное уравнение со специальным свободным членом:

$$F_0(x) = g_0(x) + \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))F_0(t)dt, \quad x \geq 0, \tag{2.20}$$

где

$$g_0(x) = \int_0^\infty u_0(x+t)(at+b)dt, \quad x \geq 0, \tag{2.21}$$

(числа $a, b > 0$–выбраны из неравенства (2.6)). Из представления функции g_0 легко следует, что $g_0(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $g_0 \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $m_1(g_0) < +\infty$ и эту функцию можно представить в виде суперпозиции экспонент

$$g_0(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{p}} G_0(p)dp, \quad x \geq 0, \tag{2.22}$$

где

$$G_0(p) = \frac{ap+b}{\sqrt{\pi}} e^{-p^2}, \quad p \geq 0. \tag{2.23}$$

Из результатов работ [6]-[7] непосредственно следует, что уравнение (2.20) обладает положительным ограниченным решением $F_0(x)$, имеющим конечный предел в бесконечности. Для уравнения (2.19) рассмотрим следующие итерации:

$$\begin{aligned} &\Phi_{n+1}(x) = \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))\Phi_n(t)dt, \quad x \geq 0, \\ &\Phi_0(x) = S(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2.24}$$

где $S(x)$–решение задачи (2.1)-(2.2).

Индукцией по n можно убедиться, что последовательность функций $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ монотонно возрастает по n. Ниже докажем, что

$$\Phi_n(x) \leq S(x) + F_0(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \geq 0. \tag{2.25}$$

Неравенство (2.25) очевидным образом выполняется в случае когда $n = 0$, ибо $F_0(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$. Пусть (2.25) имеет место при некотором натуральном n. Тогда, учитывая неотрицательность функции u_0 и числа ε и при этом имея в виду (2.20), из (2.24) получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(x) &\leq \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))(S(t) + F_0(t))dt \leq \\ &\leq \int_0^\infty u_0(x-t)S(t)dt + \varepsilon \int_0^\infty u_0(x+t)(at+b)dt + \\ &+ \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))F_0(t)dt \leq S(x) + g_0(x) + \\ &+ \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))F_0(t)dt = S(x) + F_0(x). \end{aligned}$$

Следовательно последовательность функций $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел, когда $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \Phi(x)$, причем предельная функция удовлетворяет уравнению (2.19) согласно теореме Б.Леви (см.[8]). Из монотонности $\Phi_n(x)$ по n и из неравенства (2.25) сразу следует, что для $\Phi(x)$ выполняется двустороннее неравенство:

$$S(x) \leq \Phi(x) \leq S(x) + F_0(x), \quad x \geq 0. \tag{2.26}$$

Так как $S(x)$ удовлетворяет неравенству (2.7) и имеет асимптотику (2), а $F_0 \in L_\infty(\mathbb{R}^+)$, то из (2.26) получим, что

$$\Phi(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}, \quad x \geq 0 \quad \text{и} \quad \Phi(x) = \sqrt{2}x + o(x),$$

когда $x \to +\infty$. □

Пункт 5. Перейдем к построению однопараметрического семейства положительных решений исходного уравнения (1.1). Рассмотрим следующее семейство последовательных приближений для уравнения (1.1):

$$\varphi_{n+1}^{\gamma}(x)=\int_0^\infty U(x,t,\varphi_n^{\gamma}(t))dt,\quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{2.27}$$
$$\varphi_0^{\gamma}(x)=\gamma\Phi(x)-\psi(x),\quad n=0,1,2,\ldots,$$

где $\gamma-$ некоторое число из множества параметров:

$$\Pi\equiv[2A+2\lambda,+\infty). \tag{2.28}$$

Ниже индукцией по n убедимся, что при всяком фиксированном $\gamma\in\Pi$ последовательность функций $\{\varphi_n^{\gamma}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ обладает следующими свойствами:

$$I)\ \ \varphi_n^{\gamma}(x)\ \uparrow\ \text{ по } n,\ \ x\in\mathbb{R}^+,\ \ \gamma\in\Pi,$$
$$II)\ \ \varphi_n^{\gamma}(x)\le\gamma\Phi(x)+\tilde{\psi}(x),\ \ n=0,1,2,\ldots,\ \ x\in\mathbb{R}^+,\ \ \gamma\in\Pi.$$

Сначала заметим, что

$$\varphi_0^{\gamma}(x)\equiv\gamma\Phi(x)-\psi(x)\ge\sqrt{2}(A+\lambda)x+A,\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{2.29}$$

Действительно, из (2.27), (2.18), (2.7) и (2.26) следует, что

$$\varphi_0^{\gamma}(x)\ge\gamma\Phi(x)-\lambda\ge\gamma S(x)-\lambda\ge\frac{\gamma x}{\sqrt{2}}+\frac{\gamma}{2}-\lambda\ge\ \sqrt{2}(A+\lambda)x+A.$$

Сперва убедимся, что $\varphi_1^{\gamma}(x)\ge\varphi_0^{\gamma}(x)$, $x\in\mathbb{R}^+,\gamma\in\Pi$. В силу (2.14), условий а)-б), (2.19), (2.7) и (2.26) имеем

$$\varphi_1^{\gamma}(x)=\int_0^\infty U(x,t,\varphi_0^{\gamma}(t))dt\ge$$
$$\ge\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty\left(e^{-\frac{|x-t|}{p}}+\varepsilon e^{-\frac{(x+t)}{p}}\right)\frac{e^{-p^2}}{p}\varphi_0^{\gamma}(t)e^{-p^2(2Q(\varphi_0^{\gamma}(t))+Q^2(\varphi_0^{\gamma}(t)))}dpdt\ge$$
$$\ge\int_0^\infty(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t))\varphi_0^{\gamma}(t)dt-\int_0^\infty(u_1(x-t)+\varepsilon u_1(x+t))G(\varphi_0^{\gamma}(t))dt=$$
$$=\gamma\Phi(x)-\int_0^\infty(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t))\psi(t)dt-\int_0^\infty(u_1(x-t)+\varepsilon u_1(x+t))G(\gamma S(t)-\psi(t))dt\ge$$
$$\ge\gamma\Phi(x)-\int_0^\infty(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t))\psi(t)dt-\int_0^\infty(u_1(x-t)+\varepsilon u_1(x+t))G\left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}}+\frac{\gamma}{2}-\lambda\right)dt\ge$$
$$\ge\gamma\Phi(x)-\int_0^\infty(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t))\psi(t)dt-\int_0^\infty(u_1(x-t)+\varepsilon u_1(x+t))G(\sqrt{2}At+A)dt=$$

$$= \gamma\Phi(x) - \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))\psi(t)dt - g(x) = \gamma\Phi(x) - \psi(x) = \varphi_0^\gamma(x).$$

Предполагая, что $\varphi_n^\gamma(x) \geq \varphi_{n-1}^\gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\gamma \in \Pi$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ и, учитывая монотонность функции $U(x,t,z)$ по z на $[A,+\infty)$, из (2.27) получим

$$\varphi_{n+1}^\gamma(x) \geq \int_0^\infty U(x,t,\varphi_{n-1}^\gamma(t))dt = \varphi_n^\gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \gamma \in \Pi.$$

Следовательно, монотонность по n функциональной последовательности $\{\varphi_n^\gamma(x)\}_{n=0}^\infty$ установлена.

Теперь перейдем к доказательству неравенства II). В случае когда $n = 0$ неравенство II) очевидным образом выполняется, ибо $\psi(x), \widetilde{\psi}(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Предположим, что II) имеет место при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда в силу монотонности $U(x,t,z)$ по z на $[A,+\infty)$ с учетом условия б), (2.1) и (2.7), из (2.27) будем иметь

$$\varphi_{n+1}^\gamma(x) \leq \int_0^\infty U(x,t,\gamma\Phi(t) + \widetilde{\psi}(t))dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-\frac{|x-t|}{p}} + \varepsilon e^{-\frac{(x+t)}{p}}) \frac{e^{-p^2}}{p} \left(\gamma\Phi(t) + \widetilde{\psi}(t) + (\gamma\Phi(t) + \widetilde{\psi}(t))Q(\gamma\Phi(t) + \widetilde{\psi}(t))\right) dp dt \leq$$

$$\leq \gamma \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))\Phi(t)dt + \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))\widetilde{\psi}(t)dt +$$

$$+ \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t)) \left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{2} + \widetilde{\psi}(t)\right) Q\left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{2} + \widetilde{\psi}(t)\right) dt \leq$$

$$\leq \gamma\Phi(x) + \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))\widetilde{\psi}(t)dt +$$

$$+ \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))(\sqrt{2}At + A)Q(\sqrt{2}At + A)dt =$$

$$= \gamma\Phi(x) + \int_0^\infty (u_0(x-t) + \varepsilon u_0(x+t))\widetilde{\psi}(t)dt + \widetilde{g}(x) = \gamma\Phi(x) + \widetilde{\psi}(x).$$

Итак, неравенство II) доказано.

Следовательно, последовательность функций $\{\varphi_n^\gamma(x)\}_{n=0}^\infty$ при каждом фиксированном $\gamma \in \Pi$ имеет поточечный предел при $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^\gamma(x) = \varphi^\gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Из представления (1.2), с учетом свойств а)-б), в силу предельной теоремы Б.Леви (см. [8]) следует, что $\varphi^\gamma(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Из *I)* и *II)* следует также двойное неравенство

$$\gamma\Phi(x) - \psi(x) \le \varphi^\gamma(x) \le \gamma\Phi(x) + \widetilde{\psi}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.30}$$

при каждом фиксированном $\gamma \in \Pi$. Так как $\psi, \widetilde{\psi} \in L_\infty(\mathbb{R}^+)$, а $\Phi(x)$ удовлетворяет предельному соотношению $\Phi(x) = \sqrt{2}x + o(x)$, $x \to +\infty$, то из (2.30) следует, что существует

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi^\gamma(x)}{x} = \sqrt{2}\gamma. \tag{2.31}$$

Из предельного соотношения (2.31) следует, что различным значениям $\gamma \in \Pi$ соответствуют различные решения уравнения (1.1).

Итак, справедлив следующий результат.

Теорема 2.1. *При условиях а)-б) уравнение* (1.1) *(с ядром) обладает однопараметрическим семейством положительных решений* $\{\varphi^\gamma(x)\}_{\gamma\in\Pi}$, *имеющих линейный рост в бесконечности. Более того, для* $\forall\gamma \in \Pi$ *справедливо также предельное соотношение* (2.31), *где множество параметров* Π *задается согласно формуле* (2.28).

Замечание 2.1. *Заметим, что в частном случае, когда* $Q \equiv 0$, *уравнение* (1.1) *преобразуется в линейное консервативное уравнение* (2.19) *с ядром* $u_0(x)$. *Решение* $\varphi^\gamma(x)$ *исходного уравнения* (1.1) *оценивается решениями линейных уравнений* (2.19) *и* (2.8),(2.9) *согласно* (2.30). *Причем свободные члены уравнения* (2.8) *и* (2.9) *строятся специальным образом с помощью функции* $Q(z)$ *(см.*(2.10) *и* (2.11)*).*

Приложение. Приведем примеры функций, удовлетворяющих условиям а)-б) теоремы. В качестве функций $Q(z)$ могут служить следующие функции

$$Q(z) = ze^{-z}, \quad z \in [2, +\infty), \qquad Q(z) = e^{-z^2}, \quad z \in [1, +\infty),$$
$$Q(z) = \frac{1}{z^4+1}, \quad z \in [1, +\infty), \qquad Q(z) = sin\frac{1}{z^4+1}, \quad z \in [1, +\infty).$$

Действительно убедимся в достоверности примера $Q(z) = ze^{-z}$. Очевидно, что $(zQ(z))' = ze^{-z}(2-z) \le 0$, при $z \ge 2$, следовательно $zQ(z) \downarrow$ по z на $[2, +\infty)$, $(A = 2)$. С другой стороны

$$(z + zQ(z))' = 1 + ze^{-z}(2 - z)). \tag{2.32}$$

Ниже проверим, что если $z \in [2, +\infty)$, то правая сторона последнего равенства неотрицательна. Обозначим через $\delta(z)$ следующую функцию: $\delta(z) \equiv e^z + 2z - z^2$.

Имеем $\delta(2) = e^2 > 0, \delta'(z) = e^z + 2 - 2z$. Заметим,что $\delta'(z) \geq 0$, при $z \in [2, +\infty)$, ибо $\delta'(2) = e^2 - 2 > 0$, а $\delta''(z) = e^z - 2 \geq z - 1 > 0$, при $z \in [2, +\infty)$. Поскольку $\delta(2) > 0$ и $\delta(z) \uparrow$ по z на $z \in [2, +\infty)$, то из (2.32) сразу следует,что $(z + zQ(z))' = e^{-z}(e^z + 2 - 2z) = e^{-z}\delta(z) \geq 0, z \in [2, +\infty)$. Остальные условия теоремы на функцию $Q(z)$, легко проверяются.

Abstract. The paper is devoted to the question of solvability of a Urysohn type nonlinear integral equation. This equation has an application in the kinetic theory of gases and can be derived from Boltzmann model equation. We prove an existence theorem of one-parameter family of positive solutions in the space of functions possessing linear growth at infinity. Moreover, for each member of this family we find an exact asymptotic formula at infinity. We obtain two-sided estimates for solution, as well as describe an iterative method for construction of solution. We conclude the paper by giving examples of functions that describe nonlinearity and satisfy the conditions of the main theorem.

Список литературы

[1] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross and M.Krook, "A Model for Collision Processes in Gases. I", Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. Phys.Rev., 94, 511 – 525, (1954).

[2] C. Cercignani, The Boltzmann Equation and its Application, Springer-Verlag, New-York (1988).

[3] N. B. Engibaryan, A. Kh. Khachatryan, "Exact linearization of the sliding problem for a dilute gas in the Bhatnagar-Gross-Krook model", Theor. Math. Phys., 125, no. 2, 1589 – 1592 (2000).

[4] L. G. Arabadzyan and N. B. Engibaryan, "Convolution equations and nonlinear functional equations", J. Sovet Math., 36, no. 6, 745 – 791 (1987).

[5] G. G. Gevorkyan and N. B. Engibaryan, "New theorems for the integral renewal equation", J. Contemp. Math. Anal. 32, no. 1, 2 – 16 (1997).

[6] Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "О некоторых интегральных уравнениях типа свертки в кинетической теории", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 38, no. 3, 466 – 482 (1998).

[7] Х. А. Хачатрян, "Применение метода сдвига Альбедо к решению интегрального уравнения", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 42, no. 6, 905 – 912 (2002).

[8] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории функций и Функционального Анализа, М., Наука (1981).

Поступила 7 июля 2016