Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 1, 2018, стр. 53-67.

О ВЫДЕЛЕНИИ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - армянский (Славянский) университет[1]
Ереванский государственный университет
E-mails: *vachagan.margaryan@yahoo.com* *haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Линейный дифференциальный оператор $P(x, D) = P(x_1, ...x_n, D_1, ..., D_n) = \sum_\alpha \gamma_\alpha(x)D^\alpha$ с коэффициентами $\{\gamma_\alpha(x)\}$, определенными в $\mathbb{E}^n$, называется формально почти гипоэллиптическим в $\mathbb{E}^n$, если все производные $D_\xi^\nu P(x, \xi)$ оцениваются через $P(x, \xi)$ и оператор $P(x, D)$ имеет равномерно постоянную мощность в $\mathbb{E}^n$. В работе доказывается, что если оператор $P(x, D)$ формально почти гипоэллиптичен, то все решения уравнения $P(x, D)u = 0$, которые, вместе с некоторыми их производными, интегрируемы с квадратом с определенным экспоненциальным весом, являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

MSC2010 number: 12E10, 26C05.

Ключевые слова: формально гипоэллиптический оператор; оператор постоянной мощности (силы); многогранник Ньютона; мультианизотропные пространства Соболева.

1. Постановка задачи и вспомогательные предложения

После знаменательного примера Г. Леви уравнения $P(x, D)u = (-iD_1 + D_2 - 2(x_1 + x_2)D_3)u = f$, которое для некоторых $f \in C^\infty(\mathbb{E}^3)$ не имеет гладких решений ни в какой области из $\mathbb{E}^3$ (см. [13] или [14]), естественным образом возник вопрос о существовании и выделении гладких решений того или иного класса дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Для изучения вопросов существования, единственности и гладкости решений линейных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами существуют классические методы Лере - Шаудера, параметрикса Леви или аппроксимация Корна.

---

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта N SCS 15T - 1A 197 и тематического фонда Российско - Армянского университета министерства образования и науки Российской Федерации.

Точные результаты о гладкости решений гипоэллиптических или частично - гипоэллиптических уравнений с переменными коэффициентами постоянной силы получены Питре (см. [1] или [2]) и улучшены в работах Мальгранжа, Хёрмандера, Тейлора, Гудмундсдоттира и других (см. [2] - [9]). В отмеченных работах либо показано, что все непрерывные решения соответствующих уравнений являются бесконечно дифференцируемыми функциями (для формально гипоэллиптических операторов), либо, при определённых априорных предположениях на решения соответствующих уравнений, выделены бесконечно дифференцируемые решения (для формально частично - гипоэллиптических операторов).

Что касается более общих уравнений (не являющихся гипоэллиптическими или частично - гипоэллиптическими), таковыми как гипоэллиптические по Горину, по Егорову или по Буренкову уравнения, почти гипоэллиптические и другие уравнения, то для некоторых классов таких уравнений с постоянными коэффициентами аналогичные вопросы изучены в работах [10]- [12] и [15] - [17]. Здесь этот вопрос рассматривается для одного класса формально почти гипоэллиптических уравнений с переменными коэффициентами, имеющих постоянную мощность.

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $\mathbf{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\mathbf{N}_0^n = \mathbf{N}_0 \times ... \times \mathbf{N}_0$– множество n– мерных мультииндексов, $\mathbf{E}^n$ и $\mathbf{R}^n$ n–мерные эвклидовы пространства точек (векторов) соответственно $x = (x_1, ..., x_n)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$. Для $\xi \in \mathbf{R}^n, x \in \mathbf{E}^n$ и $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ положим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ или $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ $(j = 1, ..., n)$.

Для линейного дифференциального оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами через $\tilde{P}(\xi)$ будем обозначать функцию Л. Хёрмандера, определенную формулой

$$\tilde{P}^2(\xi) = \sum_{\nu \in N_0^n} |D^\nu P(\xi)|^2.$$

Определение 1.1. *Пусть $R_1(D)$ и $R_2(D)$ линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Будем говорить, что оператор $R_1(D)$ (многочлен $R_1(\xi)$) мощнее оператора $R_2(D)$ (многочлена $R_2(\xi)$) и записывать $R_2 < R_1$, если существует число $C > 0$ такое, что*

$$|R_2(\xi)| \leq C[1 + |R_1(\xi)|] \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Если с некоторой постоянной $C > 0$ $\tilde{R}_2(\xi) \leq C\tilde{R}_1(\xi)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, то будем говорить, что оператор $R_1(D)$ сильнее (по Л. Хёрмандеру) оператора $R_2(D)$ (запись $R_2 \prec R_1$.)

Определение 1.2. *Оператор $P(x, D)$ назовём оператором постоянной мощности в Ω, если для каждой пары точек x_1 и x_2 из Ω операторы $P(x_1, D)$ и $P(x_2, D)$ имеют одинаковую мощность. Оператор $P(x, D)$ назовём оператором равномерно постоянной мощности в Ω, если существует число $c > 0$ такое, что для любой пары точек x и y из Ω*

$$c^{-1}\left[1 + |P(x,\xi)|\right] \leq 1 + |P(y,\xi)| \leq c\left[1 + |P(x,\xi)|\right] \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 1.3. *Оператор $R(D)$ (многочлен $R(\xi)$) с постоянными коэффициентами назовём гипоэллиптическим, если для всех $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ $D^\nu P(\xi)/P(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$ и назовём почти гипоэллиптическим, если $D^\nu R < R$ для всех $\nu \in \mathbb{N}_0^n$. Оператор $P(x, D)$ (многочлен $P(x,\xi)$) назовём (формально) почти гипоэллиптическим в Ω, если оператор $P(x^0, D)$ почти гипоэллиптичен для любой точки $x^0 \in \Omega$.*

В работах [18] - [19] найдены алгебраические условия при которых оператор $P(x, D)$ имеет равномерно постоянную мощность в Ω и условия при которых такой оператор (формально) почти гипоэллиптичен в Ω. Настоящая заметка является продолжением этих работ. Здесь в основном мы будем пользоваться определениями и обозначениями указанных работ, повторяя лишь ряд необходимых понятий.

Наша цель в настоящей работе - для одного класса формально почти гипоэллиптических операторов $\{P(x, D)\}$ равномерно постоянной мощности из множества всех обобщённых решений уравнения $P(x, D)u = 0$ выделить бесконечно дифференцируемые решения.

Ниже будем часто пользоваться следующим простым предложением, являющимся аналогом Леммы 13.1.2 монографии [2]

Предложение 1.1. *Пусть оператор $P(x, D)$ имеет постоянную мощность в Ω. Фиксируем x^0 и положим $P_0(D) = P(x^0, D)$. Пусть $P_0, P_1, ..., P_r$ — базис в конечномерном векторном пространстве операторов с постоянными коэффициентами менее мощных P_0. Тогда*

$$P(x, D) = P_0(D) + \sum_{j=0}^{r} a_j(x)\, P_j(D), \tag{1.1}$$

где коэффициенты a_j определяются однозначно, обращаются в нуль в точке x^0 и имеют те же свойства гладкости, что и коэффициенты оператора $P(x,D)$.

Класс $H(\Omega)$ исследуемых операторов состоит из формально почти гипоэллиптических линейных дифференциальных операторов $P(x,D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha(x)\, D^\alpha$ с бесконечно дифференцируемыми в $\mathbb{E}^n$ коэффициентами, имеющих равномерно постоянную мощность в $\mathbb{E}^n$ и такими, что $\gamma_\alpha(x) \equiv \gamma_\alpha \equiv const$ для всех $x \in \mathbb{E}^n \setminus \Omega$, где Ω некоторая ограниченная область. При этом будем считать (см. (1.1)), что $a_0(x) \equiv 0$ и с некоторой постоянной $\sigma > 0$

$$\sigma\,|\xi| \le 1 + |P_0(\xi)| \quad \text{для любых} \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Замечание 1.1. *1) Если обозначить через $\mathbb{I}_n$ множество многочленов n переменных таких, что $|R(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, то, очевидно, что многочлен P_0, удовлетворяющий условию (1.2), принадлежит этому множеству. 2) Из определения равномерно постоянной мощности многочлена $P(x,\xi)$ следует существование числа $\sigma_1 > 0$ такого, что для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{E}^n$ имеем*

$$\sigma_1\,[1 + |P_0(\xi)|\,] \le 1 + |P(x,\xi)| \le \sigma_1^{-1}[1 + |P_0(\xi)|], \tag{1.3}$$

3) из определения многочленов $\{P_j\}$ следует существование числа $\sigma_2 > 0$ такого, что для всех $\xi \in R^n$ имеем

$$\sum_{j=0}^{r} |P_j(\xi)| \le \sigma_2\,[\,|P_0(\xi)| + 1]. \tag{1.4}$$

Опишем теперь класс весовых функциональных пространств, типа С. Л. Соболева, где будем исследовать нашу задачу. В качестве веса рассмотрим произвольную фиксированную положительную функцию $g \in C^\infty(E^n)$ такую, что 1) с некоторой постоянной $\kappa > 0$ ($g_\delta(x) \equiv g(\delta\, x)$ для любого $\delta > 0$)

$$\kappa^{-1}\, e^{-\delta\,|x|} \le g(x) \le \kappa\, e^{-\delta\,|x|}, \quad \text{для любого } x \in \mathbb{E}^n, \tag{1.5}$$

2) для любого $\alpha \in N_0^n$ существует число $\kappa_\alpha > 0$ такое, что

$$|D^\alpha g_\delta(x)| \le \kappa_\alpha\, \delta^{|\alpha|} g_\delta(x), \quad \text{для любого } x \in \mathbb{E}^n. \tag{1.6}$$

3) С некоторой постоянной $C > 0$

$$|g_\delta(x+y) - g_\delta(x)| \le C\,|y|\, g_\delta(x) \quad \text{для любого } x \in \mathbb{E}^n. \tag{1.6'}$$

Для любого $\delta > 0$ обозначим через $L_{2,\,\delta} = L_{2,\,\delta}(E^n)$ множество функций с конечной нормой

$$||u||_{L_{2,\,\delta}} = \sqrt{\int |u(x)\, g_\delta(x)|^2 dx}. \tag{1.7}$$

Для каждого $k = 0, 1, \ldots$ через $W_\delta^k = W_{2,\delta}^k$ множество функций с конечной нормой

$$(1.8) \qquad ||u||_{W_\delta^k} = \sum_{|\alpha| \le k} ||D^\alpha u||_{L_{2,\delta}} = \sum_{|\alpha| \le k} ||\,[D^\alpha u]\, g_\delta||_{L_2},$$

а для дифференциального оператора $P_0(D)$ через $W_\delta^k(P_0) = W_{2,\delta}^k(P_0)$ множество функций с конечной нормой

$$(1.9) \qquad ||u||_{W_\delta^k(P_0)} = \sum_{|\alpha| \le k} ||[D^\alpha P_0(D)]u||_{L_{2,\delta}} + ||u||_{L_{2,\delta}},$$

при этом положим $W_\delta(P_0) = W_\delta^0(P_0)$.

Аналогично тому, как это делается в [16] (см. Лемма 2.2 и Следствие 2.2) доказывается следующее предложение.

Предложение 1.2. *Для любого почти гипоэллиптического многочлена $P_0 \in \mathbb{I}_n$ Существует число $\delta_0 = \delta_0(P_0) > 0$ такое, что для любых $\delta \in (0, \delta_0)$ и $k = 0, 1, \ldots$ множество C_0^∞ плотно в $W_\delta^k(P_0)$.*

Ниже, не оговоривая это каждый раз, будем считать, что число $\delta_0 = \delta_0(P_0) > 0$ выбрано по этому предложению.

Пользуясь плотностью C_0^∞–функций в $W_\delta^k(P_0)$, и преобразованием Фурье, легко доказать следующие предложения.

Лемма 1.1. *Пусть P_0 почти гипоэллиптический оператор, $Q < P_0$ и $\delta \in (0, \delta_0)$. Тогда существует постоянная $c = c(\delta_0, k) > 0$ такая (см. (1.7) - (1.9))*

$$\sum_{|\alpha| \le k} ||Q(D)[D^\alpha u]||_{L_{2,\delta}} \le C\, ||u||_{W_\delta^k(P_0)} \quad \forall u \in W_\delta^k(P_0), \ k = 0, 1, \ldots$$

Лемма 1.2. *Для любого дифференциального оператора $Q(D)$ с постоянными коэффициентами и любого числа $\delta_1 > 0$ существует число $C = C(Q, \delta_1) > 0$ такое, что для всех $\delta \in (0, \delta_1)$ и $u \in C_0^\infty$*

$$||Q(D)u||_{L_{2,\delta}} = ||\,[Q(D)u]\, g_\delta||_{L_2} \le C \sum_\beta ||Q^{(\beta)}(D)\,(u\, g_\delta)||_{L_2}.$$

Лемма 1.3. *Пусть $P_0 \in I_n$ почти гипоэллиптический оператор вида (1.1), $P_j(\xi)/P_0(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$, $j = 1, \ldots, r$, $\{a_j\}_{j=1}^r$ измеримые, ограниченные в $\mathbb{E}^n$ функции. Тогда с некоторой постоянной $c > 0$ и для всех $\delta \in (0, \delta_0)$ и $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем*

$$c^{-1}\, ||u||_{W_\delta(P_0)} \le ||P(x, D)u||_{L_{2,\delta}} + ||u||_{L_{2,\delta}}] \le c\, ||u||_{W_\delta(P_0)}.$$

2. Основные леммы

Пусть S_1 единичная сфера в $\mathbb{E}^n$, $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(S_1)$, $\int \varphi(x)\,dx = 1$, $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, $u \in L_{2,\delta}$ и $u_\varepsilon(x) = (u*\varphi_\varepsilon)(x)$. Функцию u_ε принято называть усреднением функции u с радиусом усреднения ε.

Лемма 2.1. *Если $u \in L_{2,\delta}$, то $u_\varepsilon \in W_\delta^k \cap W_\delta^k(P_0)$ для любого $k = 0, 1, \ldots$.*

Доказательство. Докажем больше, что $D^\alpha u_\varepsilon \in L_{2,\delta}$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Сначала отметим, что из леммы 1.1 работы [16] и из свойств (1.6) функции g_δ следует (см. также [19], неравенства (3.2)) существование числа $C_1 = C_1(\varepsilon) > 0$ такого, что $g_\delta(x) \leq C_1\, g_\delta(x-y)$ при $|y| < \varepsilon$.

Пусть число $\varepsilon > 0$, мультииндекс α и функция $u \in L_{2,\delta}$ фиксированы. Применяя обобщенное неравенство Минковского, отсюда имеем с некоторой постоянной $C_2 = C_2(\alpha) > 0$

$$\|(D^\alpha u_\varepsilon)g_\delta\|_{L_2} = \|D^\alpha(u*\varphi_\varepsilon)g_\delta\|_{L_2} = \{\int |[\int u(x-y)D^\alpha\varphi_\varepsilon(y)\,dy]g_\delta(x)|^2\,dx\}^{1/2}$$

$$\leq \int [\int |u(x-y)g_\delta(x)|^2 dx]^{1/2}\,|D^\alpha\varphi_\varepsilon(y)|\,dy$$

$$\leq C_1 \int [\int |u(x-y)g_\delta(x-y)|^2 dx]^{1/2}\,|D^\alpha\varphi_\varepsilon(y)|\,dy$$

$$\leq C_1\,\|u\,g_\delta\|_{L_2}\,\varepsilon^{-|\alpha|} \int |(D^\alpha\varphi)_\varepsilon(y)|\,dy \leq C_1\,C_2\,\varepsilon^{-|\alpha|}\,\|u\,g_\delta\|_{L_2},$$

что доказывает лемму 2.1.

Следующее предложение дополняет доказанную лемму.

Лемма 2.2. *Пусть P оператор вида (1.1), $k = 0, 1, \ldots$, $\delta \in (0, \delta_0)$ и $u \in W_\delta^k(P_0)$. Тогда для любого $\alpha \in N_0^n : |\alpha| \leq k$ имеем*

$$\|\,P(x,D)[D^\alpha u_\varepsilon]\,\|_{L_{2,\delta}} \to \|\,P(x,D)[D^\alpha u]\,\|_{L_{2,\delta}} \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. Пусть числа k и δ фиксированы и $u \in W_\delta^k(P_0)$, т.е. $[D^\alpha P_0(D)]u \in L_{2,\delta}$ для всех $\alpha \in N_0^n : |\alpha| \leq k$. Сначала покажем существование числа $C_1 > 0$ такого, что для любых $\delta \in (0, \delta_0)$, $k = 0, 1, \ldots$ и для всех $u \in W_\delta^k(P_0)$ имеет место неравенство

$$\sum_{|\alpha|\leq k}\sum_{j=0}^{r} \|D^\alpha P_j(D)u\|_{L_{2,\delta}} \leq C_1 \left[\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha[P_0(D)u]\|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_{2,\delta}}\right]$$

$$= C_1 \left[\sum_{|\alpha|\leq k} \|[D^\alpha P_0(D)]u\|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_{2,\delta}}\right] = C_1\,\|u\|_{W_\delta^k(P_0)}. \tag{2.1}$$

Из Предложения 1.2 следует, что неравенства (2.1) достаточно доказать для функций $u \in C_0^\infty$.

Так как $\|[D^\alpha P_j(D)u\|_{L_{2,\delta}} = \|P_j(D)[D^\alpha u]\, g_\delta\|_{L_2}$ для каждого $j = 0, 1, ..., k$, каждого $\alpha \in N_0^n : |\alpha| \le j$ и для всех $u \in C_0^\infty$, то в силу леммы 1.2 имеем с некоторой постоянной $C_2 = C_2(P_j, \delta_0) > 0$

$$\|[D^\alpha P_j(D)u\|_{L_{2,\delta}} \le C_2 \sum_\beta \|P_j^{(\beta)}(D)[D^\alpha u\, g_\delta]\|_{L_2}.$$

Для каждой тройки $j, \alpha, \beta : 0 \le j \le r$, $\alpha \in N_0^n : |\alpha| \le k$, $\beta \in N_0^n : |\beta| \le ord P_j$ обозначим $A_{j,\alpha,\beta} = \|P_j^{(\beta)}(D)[D^\alpha u\, g_\delta]\|_{L_2}$. Из равенства Парсеваля следует, что выражение $A_{j,\alpha,\beta}$ эквивалентно выражению $\|P_j^{(\beta)}(\xi)F[D^\alpha u\, g_\delta]\|_{L_2}$, где $F(v)$ преобразование Фурье функции $v \in C_0^\infty$.

Так как для любого $\beta \in N_0^n$ $P_j^{(\beta)} \prec P_j \prec P_0$, то (см. (1.4)) с некоторой постоянной $C_3 > 0$ имеем для всех $u \in C_0^\infty$ $A_{j,\alpha,\beta} \le C_3 \|[|P_0(\xi)| + 1]F[D^\alpha u\, g_\delta]\|_{L_2} \le C_3 \{\|P_0(D)[D^\alpha u\, g_\delta]\|_{L_2} + \|D^\alpha u\, g_\delta\|_{L_2}\}$. Из почти гипоэллиптичности $P_0(D)$ отсюда для всех $u \in C_0^\infty$ с некоторой постоянной $C_4 > 0$ имеем

$$A_{j,\alpha,\beta} \le C_4 \{\|[P_0(D)D^\alpha u]\, g_\delta\|_{L_2} + \|D^\alpha u\, g_\delta\|_{L_2}\} \le C_4\, [\|u\|_{W_\delta^k(P_0)} + \|D^\alpha u\, g_\delta\|_{L_2}].$$

Отсюда в силу леммы 1.1 при $Q(\xi) \equiv 1$ получим требуемое неравенство (2.1), откуда следует, что $D^\alpha P_j(D)u \in L_{2,\delta}$ $(j = 0, 1, ..., r)$ для любого мультииндекса $\alpha : |\alpha| \le k$ и для всех $u \in W_\delta^k(P_0)$.

Перейдем к непосредственному доказательству леммы. Так как по уже доказанной части $P_j(D)[D^\alpha u] \in L_{2,\delta}$, $j = 0, 1, ..., r$ и коффициенты $\{a_j(x)\}$ в представлении (1.1) гладкие, ограниченые в $\mathbb{E}^n$ функции, то $P(x, D)u = \sum_{j=0}^r a_j(x)\, P_j(D)$ $[D^\alpha u] \in L_{2,\delta}$, при этом $\|P(x, D)[D^\alpha u]\|_{L_{2,\delta}} = \|[P(x, D)\, D^\alpha]u\|_{L_{2,\delta}}$ для всех $u \in W_\delta^k(P_0)$. По известным свойствам усредненных функций (см. [20], Лемма 5.2) имеем

$$\|P(x, D)[D^\alpha u_\varepsilon] - P(x, D)[D^\alpha u]\|_{L_{2,\delta}} = \|P(x, D)[(D^\alpha u)_\varepsilon] - P(x, D)[D^\alpha u]\|_{L_{2,\delta}}$$

$$= \|P(x, D)[(D^\alpha u)_\varepsilon] - [P(x, D)(D^\alpha u)]_\varepsilon + [P(x, D)(D^\alpha u)]_\varepsilon - P(x, D)[D^\alpha u]\|_{L_{2,\delta}}$$

$$\le \|P(x, D)[(D^\alpha u)_\varepsilon] - [P(x, D)(D^\alpha u)]_\varepsilon\|_{L_{2,\delta}} + \|[P(x, D)(D^\alpha u)]_\varepsilon -$$

$$- P(x, D)[D^\alpha u]\|_{L_{2,\delta}} \equiv B_{1,\varepsilon} + B_{2,\varepsilon}.$$

Что $B_{2,\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ доказано в работе [16]. Докажем, что $B_{1,\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Имеем

$$B_{1,\varepsilon} = \|[P_0(D) + \sum_{j=0}^r a_j(x)\, P_j(D)][(D^\alpha u)_\varepsilon] - \{[P_0(D) + \sum_{j=0}^r a_j(x)\, P_j(D) D^\alpha u]\}_\varepsilon\|_{L_{2,\delta}}$$

$$\leq \|P_0(D)[(D^\alpha u)_\varepsilon] - [P_0(D)D^\alpha u]_\varepsilon\|_{L_{2,\delta}} + \sum_{j=0}^{r} \|a_j(x)\, P_j(D)[(D^\alpha u)_\varepsilon]$$

$$-[a_j(x)\, P_j(D)D^\alpha u]_\varepsilon\|_{L_{2,\delta}} \equiv C_0(\varepsilon) + \sum_{j=0}^{r} C_j(\varepsilon).$$

Так как (см. [20], Лемма 5.2) $P_0(D)[(D^\alpha u)_\varepsilon] = [P_0(D)D^\alpha u]_\varepsilon$, то $C_0(\varepsilon) = 0$. Остается показать, что $C_j(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$. Еще раз пользуясь леммой 5.2 работы [20], получаем

$$C_j(\varepsilon) = \|a_j(x)\, [P_j(D)D^\alpha u]_\varepsilon - [a_j(x)\, P_j(D)D^\alpha u]_\varepsilon\|_{L_{2,\delta}}$$

$$= \|a_j(x) \int [P_j(D)D^\alpha u](y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)dy - \int a_j(y)\, P_j(D)[D^\alpha u(y)]\, \varphi_\varepsilon(x-y)dy\|_{L_{2,\delta}}$$

$$= \|a_j(x)\, g_\delta(x) \int [P_j(D)D^\alpha u](y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)dy$$

$$-g_\delta(x) \int a_j(y)\, P_j(D)[D^\alpha u(y)]\, \varphi_\varepsilon(x-y)dy\|_{L_2}$$

$$= \| \int [a_j(x) - a_j(y)]\, g_\delta(x)\, P_j(D)[D^\alpha u(y)]\, \varphi_\varepsilon(x-y)dy\|_{L_2} \quad (j = 0, 1, \ldots, r).$$

Так как $a_j \in C^\infty$, при этом $a_j(x) = const$ при $x \in E^n \setminus \Omega$, и $|x-y| \leq \varepsilon$, то по формуле Лагранжа $|a_j(x) - a_j(y)| \leq max|grad\, a_j(x)|\, |x-y| \leq c_0\, \varepsilon$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$, где $c_0 = max|grad\, a_j(x)|$. С другой стороны, так как при $|x-y| \leq 1$ существует число $\kappa > 0$ такое, что $\kappa^{-1}\, g_\delta(y) \leq g_\delta(x) \leq \kappa\, g_\delta(y)$, то при $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем

$$C_j(\varepsilon) \leq c_0\, \kappa\, \varepsilon \,\| \int |[P_j(D)[D^\alpha u](y)\, g_\delta(y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)dy\|_{L_2}.$$

Применяя неравенство Юнга, отсюда имеем с некоторой постоянной $c_1 > 0$ получаем

$$C_j(\varepsilon) \leq c_1\, \kappa\, \varepsilon \,\|\|[P_j(D)\, D^\alpha u]\, g_\delta\|_{L_2}\|\; \|\varphi_\varepsilon\|_{L_1}.$$

Так как $\|\varphi_\varepsilon\|_{L_1} = 1$, и по неравенству (2.1) и равенству Парсеваля получаем

$\|P_j(D)[D^\alpha u\|_{L_{2,\delta}} \leq c_1[\sum_{\beta \leq \alpha} \|[D^\beta P_0(D)u]\|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_{2,\delta}}]$ для любой функции $u \in W^k_\delta(P_0$

то отсюда получим с некоторой постоянной $c_2 > 0$ при $\varepsilon \to 0$

$$C_j(\varepsilon) \leq c_2\, \kappa\, \varepsilon \,\|P_j(D)[D^\alpha u\|_{L_{2,\delta}} \leq c_2 \cdot \varepsilon \,\|u\|_{W^k_\delta(P_0)} \to 0$$

для всех $u \in W^k_\delta(P_0)$ и $j = 0, 1, \ldots, r$, что доказывает лемму 2.2.

Лемма 2.3. *Пусть почти гипоэллиптический оператор $P_0(D)$, область $\Omega \subset \mathbf{E}^n$ и число $\delta_0 = \delta_0(P_0) > 0$ определяются оператором $P(x, D)$ как выше, $\delta \in (0, \delta_0)$,*

$\beta \in N_0^n$ произвольный мультииндекс такой, что $m = |\beta| - 1 > 0$ и $a \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда существует число $C = C(a, \beta, P_0)$ такое, что

$$\|D_x^\beta \int [a(x) - a(y)][P_0(D)u](y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)dy\|_{L_{2,\delta}} \le C\, \|u\|_{W_\delta^m(P_0)} \quad \forall u \in W_\delta^m(P_0).$$

Доказательство. Пусть, например, $\beta_1 \ne 0$. Представим вектор β в виде $\beta = \alpha + e$, где $|\alpha| = m$, $e = (1, 0, ..., 0)$ и положим $z = x - y$, тогда по формуле Лейбница имеем (ниже $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_{2,\delta}}$, $A_\beta = \|D_x^\beta \int [a(x) - a(y)][P_0(D)u](y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)dy\|$)

$$A_\beta = \|D_1 \int D^\alpha[(a(x) - a(x-z))\,(P_0(D)u)(x-z)]\, \varphi_\varepsilon(z)\, dz\|$$

$$\le \sum_{0 \ne \gamma \le \alpha} \|D_1 \int C_\alpha^\gamma\, D^\gamma[a(x) - a(x-z)]\, [P_0(D) D^{\alpha-\gamma}u](x-z)\, \varphi_\varepsilon(z)\, dz\|$$

$$+\|D_1 \int [a(x) - a(x-z)]\, [P_0(D) D^\alpha u](x-z)\, \varphi_\varepsilon(z)\, dz\|$$

$$\le \sum_{0 \ne \gamma \le \alpha} C_\alpha^\gamma\, \{\| \int D_1\, D^\gamma[a(x) - a(x-z)]\, [P_0(D) D^{\alpha-\gamma}u](x-z)]\, \varphi_\varepsilon(z)\, dz\|$$

$$+\| \int D^\gamma[a(x) - a(x-z)]\, [P_0(D) D_1 D^{\alpha-\gamma}u](x-z)\, \varphi_\varepsilon(z)\, dz\|\}$$

$$+\|D_1 \int [a(x) - a(x-z)]\, [P_0(D) D^\alpha u](x-z)\, \varphi_\varepsilon(z)\, dz\|.$$

Так как $a \in C_0^\infty(\Omega)$, и $z \in supp\varphi_\varepsilon$, то при $\varepsilon \to 0$

$$B_1(\varepsilon) := \max_{0 \ne \gamma \le \alpha}\ \max_{x, |z| < \varepsilon} C_\alpha^\gamma\, |D_1 D^\gamma[a(x) - a(x-z)]| \to 0,$$

поэтому отсюда, возвращаясь в последнем интеграле к старым переменным, имеем

$$A_\beta \le B_1(\varepsilon) \sum_{0 \ne \gamma \le \alpha} [\|\, |P_0(D) D^{\alpha-\gamma}u| * \varphi_\varepsilon\| + \|\, |P_0(D) D^{\alpha-\gamma+e}u| * \varphi_\varepsilon\|\,]$$

$$+\| \int |D_1 a(x)|\, |P_0(D) D^\alpha u(y)|\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy\|$$

$$+\| \int |a(x) - a(y)|\, |P_0(D) D^\alpha u(y)|\, \varepsilon^{-1}\, |(D_1\varphi)_\varepsilon(x-y)| dy\|.$$

Так как $|\alpha - \gamma + e| \le m$ при $\gamma \ne 0$, $a \in C_0^\infty(\Omega)$ и по формуле Лагранжа $|a(x) - a(y)| \le max|grada(x)|\, |x-y| \le \varepsilon max|grada(x)|$ при $x - y \in supp\varphi_\varepsilon$, то отсюда, в силу неравенства Юнга, с некоторыми положительными постоянными B_2, B_3, B_4 имеем

$$A_\beta \le B_2[\|u\|_{W_\delta^m}(P_0) + \|\, |P_0(D) D^\alpha u| * \varphi_\varepsilon\|\,]$$

$$+B_3\, \varepsilon\, \varepsilon^{-1}\, \|\, |P_0(D) D^\alpha u| * |D_1\varphi|_\varepsilon\| \le B_4\, \|u\|_{W_\delta^m(P_0)}. \square$$

Для $P \in H(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$, $\delta \in (0, \delta_0)$ обозначим $\phi_m(P, \delta) = \{u \in W_\delta^m(P_0) : P(x, D)u = 0\}$.

Лемма 2.4. *Пусть $u \in \phi_m(P, \delta)$, тогда $||u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}||_{W_\delta^{m+1}(P_0)} \to 0$ при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$.*

Доказательство. Из лемм 1.1 и 1.2 и условия (1.2) на функции из множества $H(\Omega)$ следует, что $P_j(D)D^\alpha u \in L_{2,\delta}$ $(j = 0, 1, ..., r)$ и $D_i D^\alpha u \in L_{2,\delta}$ $(i = 1, ..., n)$ при $|\alpha| \leq m$. Тогда для любых $u \in \phi_m(P, \delta)$, $\beta \in \mathbb{N}_0^n, |\beta| = m + 1$ и $\varepsilon > 0$ имеем

$$P(x, D)(D^\beta u)_\varepsilon = P(x, D)(D^\beta u_\varepsilon) = D^\beta[P(x, D)u_\varepsilon)]$$

$$- \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} \sum_{j=0}^{r} C_\beta^\gamma D^\gamma a_j(x) P_j(D) D^{\beta-\gamma} u_\varepsilon = D^\beta[P(x, D)u]_\varepsilon$$

$$+ \sum_{j=0}^{r} D^\beta \int [a_j(x) - a_j(y)] [P_j(D)u](y) \varphi_\varepsilon(x - y)\, dy$$

$$- \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} \sum_{j=0}^{r} C_\beta^\gamma D^\gamma a_j(x) P_j(D) D^{\beta-\gamma} u_\varepsilon$$

Так как $P(x, D)u = 0$, то отсюда получаем

$$P(x, D)(D^\beta u)_\varepsilon = \sum_{j=0}^{r} D^\beta \int [a_j(x) - a_j(y)] [P_j(D)u](y) \varphi_\varepsilon(x - y)\, dy$$

$$- \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} \sum_{j=0}^{r} C_\beta^\gamma D^\gamma a_j(x) P_j(D) D^{\beta-\gamma} u_\varepsilon \quad \forall u \in \phi_m(P, \delta). \tag{2.2}$$

Отсюда имеем для произвольных $u \in \phi_m(P, \delta)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и $\beta \in \mathbb{N}_0^n, |\beta| = m + 1$

$$P(x, D)[(D^\beta u)_{\varepsilon_1} - (D^\beta u)_{\varepsilon_2}] = \sum_{j=0}^{r} D^\beta \int [a_j(x) - a_j(y)] [P_j(D)u](y)$$

$$[\varphi_{\varepsilon_1}(x - y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x - y)]\, dy - \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} \sum_{j=0}^{r} C_\beta^\gamma D^\gamma a_j(x) P_j(D) D^{\beta-\gamma}[u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}]. \tag{2.3}$$

Так как $u \in W_\delta^m(P_0)$, то в силу леммы 1.2 $P_j(D)D^{\beta-\gamma}u \in L_{2,\delta}$ для любого $0 \neq \gamma \leq \beta$ и для всех $j = 0, 1, ..., r$. Поэтому отсюда и из ограниченности коэффициентов $\{D^\gamma(x)\}$ следует, что при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$

$$\sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} \sum_{j=0}^{r} C_\beta^\gamma \,||\, [D^\gamma a_j(x)]\; P_j(D) D^{\beta-\gamma}[u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}]||_{L_{2,\delta}} \to 0. \tag{2.4}$$

Для оценки первого слагаемого правой части (2.3), предположим, например, что $\beta_1 \neq 0$, представим вектор β в виде $\beta = \alpha + e$, где $|\alpha| = m$, $e = (1, 0, ..., 0)$

и положим $z = x - y$. Тогда для первого слагаемого правой части (2.3) имеем (ниже $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_{2,\delta}}$),

$$\sum_{j=0}^{r} \|D^{\beta} \int [a_j(x) - a_j(y)]\, [P_j(D)u](y) [\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x-y)]\, dy\|$$

$$= \sum_{j=0}^{r} \|D_1 D^{\alpha} \int \{[a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_1 z)]\, [P_j(D)u](x - \varepsilon_1 z)$$

$$-[a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z)]\, [P_j(D)u](x - \varepsilon_2 z)\}\varphi(z)\, dz\|$$

$$\le \sum_{j=0}^{r} \sum_{0 \ne \gamma \le \beta} C_{\alpha}^{\gamma} \|D_1 \int \{D^{\gamma}[a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_1 z)]\, [P_j(D) D^{\alpha-\gamma} u](x - \varepsilon_1 z)$$

$$-D^{\gamma}[a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z)]\, [P_j(D) D^{\alpha-\gamma} u](x - \varepsilon_2 z)\}\varphi(z)\, dz\|$$

$$+ \sum_{j=0}^{r} \|D_1 \int \{[a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_1 z)]\, [P_j(D)u](x - \varepsilon_1 z)$$

$$-[a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z)]\, [P_j(D) D^{\alpha} u](x - \varepsilon_2 z)\}\varphi(z)\, dz\| \equiv A_1 + A_2. \tag{2.5}$$

Так как $P_j(D) D^{\alpha-\gamma} u$, $P_j(D) D^{\alpha-\gamma+e} u \in L_{2,\delta}$ при $0 \ne \gamma \le \alpha$, то для слагаемого A_1 с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем

$$A_1 \le \sum_{j=0}^{r} \sum_{0 \ne \gamma \le \beta} C_{\alpha}^{\gamma} \{\| \int [D_1 D^{\gamma}(a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_1 z))\, (P_j(D) D^{\alpha-\gamma} u)(x - \varepsilon_1 z)]$$

$$-D_1 D^{\gamma}(a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z))\, (P_j(D) D^{\alpha-\gamma} u)(x - \varepsilon_2 z)]\varphi(z)\, dz\|$$

$$+\| \int [D^{\gamma}(a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_1 z))\, (P_j(D) D^{\alpha-\gamma+e} u)(x - \varepsilon_1 z) -$$

$$-D^{\gamma}(a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z))\, (P_j(D) D^{\alpha-\gamma+e} u)(x - \varepsilon_2 z)]\varphi(z)\, dz\|\}$$

$$= \sum_{j=0}^{r} \sum_{0 \ne \gamma \le \beta} C_{\alpha}^{\gamma} \{\| \int [D_1 D^{\gamma} a_j(x) - D_1 D^{\gamma} a_j(y)]\, [P_j(D) D^{\alpha-\gamma} u](y)$$

$$[\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x-y)]dy\|$$

$$+\| \int [D^{\gamma} a_j(x) - D^{\gamma} a_j(y)]\, [P_j(D) D^{\alpha-\gamma+e} u](y) [\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x-y)]dy\|\}$$

$$\le C_1 \varepsilon_2 \sum_{j=0}^{r} \sum_{0 \ne \gamma \le \beta} \{\| \int |P_j(D) D^{\alpha-\gamma} u|(y) |\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x-y)|dy\|$$

$$+\| \int |P_j(D) D^{\alpha-\gamma+e} U(y)|\, |\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x-y)|dy\}$$

Так как при $x - y \in supp\, \varphi_{\varepsilon_2}$ с некоторой постоянной $C_2 > 0$ $|D^{\gamma} a_j(x) - D^{\gamma} a_j(y)| \le C_2 \varepsilon_2$, то в итоге получаем $A_1 \le C_3 \varepsilon_2$ с некоторой постоянной $C_3 > 0$, следовательно $A_1 \to 0$ при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \to 0$.

Для слагаемого A_2 имеем

$$A_2 = \sum_{j=0}^{r} ||D_1 \int [a_j(x) - a_j(y)] \, [P_j(D)D^\alpha u](y)[\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x-y)]dy||$$

$$\leq \sum_{j=0}^{r} || \int D_1 a_j(x) \, [P_j(D)D^\alpha u](y)[\varphi_{\varepsilon_1}(x-y) - \varphi_{\varepsilon_2}(x-y)]dy||$$

$$+|| \int [a_j(x) - a_j(y)] \, [P_j(D)D^\alpha u](y) \, [\frac{1}{\varepsilon_1} \, (D_1\varphi)_{\varepsilon_1}(x-y) - \frac{1}{\varepsilon_2} \, (D_1\varphi)_{\varepsilon_2}(x-y)]dy||\}$$

$$\equiv A_{2,1} + A_{2,2}. \tag{2.6}$$

Так как $P_j(D)D^\alpha u \in L_2$, и коэффициенты $\{D_1 a_j\}$ ограничены в E^n, то для слагаемого $A_{2,1}$ с некоторой постоянной $C_3 > 0$ и при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \to 0$ имеем

$$A_{2,1} = \sum_{j=0}^{r} ||[D_1 a_j(x)] \, [(P_j(D)D^\alpha u)_{\varepsilon_1} - (P_j(D)D^\alpha u)_{\varepsilon_2}]||$$

$$\leq C_3 \sum_{j=0}^{r} ||P_j(D)D^\alpha u)_{\varepsilon_1} - (P_j(D)D^\alpha u)_{\varepsilon_2}|| \to 0. \tag{2.7}$$

Положим для каждого $j = 0, 1, ..., r$

$$b_{j,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x,z) = \frac{a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_1 z)}{\varepsilon_1} - \frac{a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z)}{\varepsilon_2}$$

тогда для $A_{2,2}$ можем записать

$$A_{2,2} = \sum_{j=0}^{r} || \int_{S_1} \{ \frac{a(x) - a(x - \varepsilon_1 z)}{\varepsilon_1} [P_j(D)D^\alpha u](x - \varepsilon_1 z))$$

$$- \frac{a(x) - a(x - \varepsilon_2 z)}{\varepsilon_1} [P_j(D)D^\alpha u](x - \varepsilon_2 z)\} \, (D_1\varphi)(z)dz||$$

$$\leq \sum_{j=0}^{r} || \int_{S_1} b_{j,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x,z)[P_j(D)D^\alpha u](x - \varepsilon_1 z) \, (D_1\varphi)(z)dz||$$

$$+ \sum_{j=0}^{r} || \int_{S_1} \frac{a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z)}{\varepsilon_2} [P_j(D)D^\alpha u(x - \varepsilon_1 z)$$

$$-P_j(D)D^\alpha u(x - \varepsilon_2 z)] \, (D_1\varphi)(z)dz|| \equiv A'_{2,2} + A''_{2,2}. \tag{2.8}$$

Так как $\sup\limits_{x \in \Omega} \sup\limits_{z \in S_1} b_{j,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x,z) \to 0$ при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \to 0$, то $A'_{2,2} \to 0$ при $\varepsilon_2 \to 0$.

Для оценки слагаемого $A''_{2,2}$, отметим, что в силу гладкости коэффициентов $\{a_j\}$ и условия $a_j(x) = const_j$ при $x \in \mathbb{E}^n \setminus \Omega$, выражения $[a_j(x) - a_j(x - \varepsilon_2 z)]/\varepsilon_2]$

ограничены числом, не зависящим от j и от ε_2. Поэтому, в силу свойства (1.6$'$) весовой функции g существуют положительные постоянные C_4, C_5, C_6 такие, что

$$A''_{2,2} \le C_4 \sum_{j=0}^{r} \| \int_{S_1} \{|P_j(D)[D^\alpha u(x-\varepsilon_1 z) - D^\alpha u(x-\varepsilon_2 z)]\,(D_1\varphi)(z)|\,dz\} g_\delta(x)\|_{L_2}$$

$$\le C_4 \sum_{j=0}^{r} \| \int_{S_1} |[P_j(D)D^\alpha u\, g_\delta](x-\varepsilon_1 z) - [P_j(D)D^\alpha u\, g_\delta](x-\varepsilon_2 z)$$

$$+[P_j(D)D^\alpha u\, g_\delta](x-\varepsilon_1 z)[g_\delta(x) - g_\delta(x-\varepsilon_1 z)]$$

$$-[P_j(D)D^\alpha u\, g_\delta](x-\varepsilon_1 z)[g_\delta(x) - g_\delta(x-\varepsilon_2 z)]|\,|D_1\varphi(z)|\,dz\|_{L_2}$$

$$\le C_4 \{\sum_{j=0}^{r} \| \int_{S_1} |[P_j(D)D^\alpha u\, g_\delta](x-\varepsilon_1 z) - [P_j(D)D^\alpha u\, g_\delta](x-\varepsilon_2 z)\,|D_1\varphi(z)|\,dz\|_{L_2}$$

$$+C_5\,\varepsilon_1 \| \int_{S_1} [|P_j(D)D^\alpha u|\, g_\delta](x-\varepsilon_1 z)\,|D_1\varphi(z)|\,dz\|_{L_2}$$

$$+C_5\,\varepsilon_2 \| \int_{S_1} [|P_j(D)D^\alpha u|\, g_\delta](x-\varepsilon_2 z)\,|D_1\varphi(z)|\,dz\|_{L_2}\}$$

$$\le C_6 \sum_{j=0}^{r} \{ \sup_{|z|\le 1} \|[P_j(D)D^\alpha u\, g_\delta](\cdot-\varepsilon_1 z) - [P_j(D)D^\alpha u\, g_\delta](\cdot-\varepsilon_2 z)\|_{L_2}$$

$$+\varepsilon_2\,\|P_j(D)D^\alpha u\|_{L_{2,\delta}}\}.$$

В силу непрерывности в среднем функций из класса L_2 последнее выражение и, следовательно, $A''_{2,2}$ стремятся к нулю при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \to 0$. Отсюда и из соотношений (2.2) - (2.8) получаем, что $\|P(x,D)[(D^\beta u)_{\varepsilon_1} - (D^\beta u)_{\varepsilon_2}]\|_{L_{2,\delta}} \to 0$ при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \to 0$.

Так как $[(D^\beta u)_{\varepsilon_1} - (D^\beta u)_{\varepsilon_2}] \in W_\delta(P_0)$, то отсюда с некоторой постоянной $C_7 > 0$ в силу леммы 1.3 получаем

$$\sum_{|\beta|=m+1} \|(D^\beta u)_{\varepsilon_1} - (D^\beta u)_{\varepsilon_2}\|_{W_\delta(P_0)}$$

$$\le C_7 \sum_{|\beta|=m+1} [\|P(x,D)[(D^\beta u)_{\varepsilon_1} - (D^\beta u)_{\varepsilon_2}]\|_{L_{2,\delta}} + \|(D^\beta u)_{\varepsilon_1} - (D^\beta u)_{\varepsilon_2}\|_{L_{2,\delta}}].$$

Так как последнее выражение стремится к нулю при $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \to 0$, то это доказывает лемму 2.4.

3. Основной результат

Теорема 3.1. *Пусть $P \in H(\Omega)$, $P_j(\xi)/P_0(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$ $(j = 1, ..., r)$ (см. (1.1)), $m \in \mathbb{N}_0^n$ и $\delta \in (0, \delta_0)$. Тогда $\phi_m(P, \delta) \subset W_\delta^{m+1}(P_0)$, именно, существует число $C > 0$ такое, что*

$$||u||_{W_\delta^{m+1}(P_0)} \leq C\, ||u||_{W_\delta^m(P_0)} \quad \text{для всех } u \in \phi_m(P, \delta).$$

Доказательство. Так как для произвольных $m \in \mathbb{N}_0^n$, $\beta \in \mathbb{N}_0 : |\beta| = m+1$ $\varepsilon > 0$ и $u \in \phi_m(P, \delta)$ (см. доказательство леммы 2.4)

$$P(x, D)(D^\beta u)_\varepsilon = \sum_{j=0}^{r} D^\beta \int [a_j(x) - a_j(y)]\, [P_j(D)u](y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy$$

$$- \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} \sum_{j=0}^{r} C_\beta^\gamma\, D_\gamma a_j(x)\, [P_j(D) D^{\beta-\gamma} u_\varepsilon],$$

то применяя неравенство Юнга, лемму 2.3, тот факт, что $P \in H(\Omega)$ и свойства (1.5)- (1.6) функции g получим с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$||P(x, D)(D^\beta u)_\varepsilon||_{L_{2,\,\delta}} \leq C_1\, ||u||_{W_\delta^m(P_0)}.$$

Так как $(D^\beta u)_\varepsilon \in W_\delta(P_0)$, то в силу леммы 1.3 с некоторыми положительными постоянными C_2, C_3, C_4 имеем

$$||P_0(D)(D^\beta u)_\varepsilon||_{L_{2,\,\delta}} + ||(D^\beta u)_\varepsilon||_{L_{2,\,\delta}} \leq C_2 [\sum_{|\beta|=m+1} ||P(x, D)(D^\beta u)_\varepsilon||_{L_{2,\,\delta}} + ||(D^\beta u)_\varepsilon||_{L_{2,\,\delta}}]$$

$$\leq C_3\, [||u||_{W_\delta^m(P_0)} + \sum_{|\beta|=m+1} ||(D^\beta u)_\varepsilon||_{L_{2,\,\delta}}] \leq C_4\, ||u||_{W_\delta^m(P_0)}, \tag{3.1}$$

т.е. множество u_ε равномерно относительно ε ограничено в $W_\delta^{m+1}(P_0)$.

Так как в силу леммы 2.4 $\{u_\varepsilon\}$ фундаментально в $W_\delta^{m+1}(P_0)$ и $u_\varepsilon \to u$ по норме $L_{2,\,\delta}$, то в силу замкнутости оператора обобщенного дифференцирования на функцию u можно примешить оператор $D^\beta P_0(D)$, при этом $D^\beta P_0(D) u \in L_{2,\,\delta}$ при всех $\beta \in \mathbb{N}_0 : |\beta| = m + 1$. Тогда из оценки (3.1) непосредственно получаем утверждение теоремы. □

Положим $W_\delta^\infty = \bigcap_{m=0}^{\infty} W_\delta^m$. Так как, очевидно, $W_\delta^m \subset W^m(\omega)$ $m = 0, 1, ...$, для любой ограниченной области $\omega \in \mathbb{E}^n$, то по тереме 10.4 работы [20] $W_\delta^\infty \subset C^\infty(\omega)$. Отсюда и из теоремы 3..1 получаем основной результат настоящей заметки.

Теорема 3.2. *Пусть $P \in H(\Omega)$, и $\delta \in (0, \delta_0)$, тогда $N(P, \delta) \equiv \{u \in W_\delta(P_0), P(x, D)u = 0\} \subset \bigcap_k W_\delta^k(P_0) = \bigcap_k W_\delta^k \subset C_0^\infty$.*

Abstract. A linear differential operator $P(x,D) = P(x_1, ...x_n, D_1, ..., D_n) = \sum_\alpha \gamma_\alpha(x)D^\alpha$ with coefficients $\{\gamma_\alpha(x)\}$ defined in $\mathbb{E}^n$ is called formally almost hypoelliptic in $\mathbb{E}^n$ if all the derivatives $D_\xi^\nu P(x,\xi)$ can be estimated by $P(x,\xi)$, and the operator $P(x,D)$ has uniformly constant power in $\mathbb{E}^n$. In the present paper, we prove that if $P(x,D)$ is a formally almost hypoelliptic operator, then all solutions of equation $P(x,D)u = 0$, which together with some of their derivatives are square integrable with a specified exponential weight, are infinitely differentiable functions.

Список литературы

[1] J. Peetre, Theoremes de regularite pour quelques classes d'operateurs differentiels, Thesis - Lund. (1959).
[2] L. Hörmander, The Analysis of linear Partial Differential Operators. 2, Springer - Verlag (1983).
[3] L. Hörmander, On the theory of general partial differential operators. Acta Math. 94 (1955).
[4] L. Ehrenpreis, "Solutions of some problems of division, 4", Amer. J. Math. 82, 522 - 588 (1960).
[5] B. Malgrange, "Sur un class d'operatteurs differentiels hypoelliptiques", Bull. Math. France, 85, 283 - 306 (1957).
[6] L. Gòrding, B. Malgrange, "Operateurs differentiels partillement hypoelliptiques", Math. Scand. 9, 5 - 21 (1961).
[7] L. Hörmander, "On interior regularity of the solutions of partial differential equations", Comm Pure Appl. Math. 11, 197 - 218 (1958).
[8] M. Taylor, "Gelfand theory of pseudodifferential operators and hypoelliptic operators", Trans. Amer. Math. Soc. 153, 495 - 510 (1971).
[9] G. Gudmundsdottir, "Global properties of differential operators of constant strength", Ark. Mat. 15, 169 - 198 (1977).
[10] Е. А. Горин, "Частично гипоэллиптические дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами", Сиб. Мат. Журнал, 3, но.4, 500 - 526 (1962).
[11] Ю. В. Егоров, "О субэллиптических операторах", УМН, 30, но.2, 57 - 114 (1975).
[12] В. И. Буренков, "Аналог теоремы Л.Хёрмандера о гипоэллиптичности для функций стремящихся к нулю на бесконечности", Сб. докладов 7-ого Советско-Чехословацкого семинара, Ереван, 63 - 67 (1982).
[13] H. Lewy, 'An example of a smooth linear partial differential equation without solution. Ann. of Math. 66, 155 - 158 (1957).
[14] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators. 1, Springer - Verlag (1982).
[15] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials", Doklady Ross. Acad. Nauk, Math. 398, no. 6, 701 - 703 (2004).
[16] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Об одном классе почти гипоэллиптических операторов", Известия НАН Армении, Математика, 41, но. 6, стр. 39 - 56 (2006).
[17] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "On infinite differentiability of solutions of nonhomogeneous almost hypoelliptic equations", Eurasian Math. Journal, 1, no. 1, 54 - 72 (2010).
[18] Г. Г. Казарян, "О формально почти гипоэллиптических многочленах постоянной мощности", Известия НАН Армении, Математика, 50, но. 6, 46 - 62 (2015).
[19] V. N. Margaryan, H. G. Ghazaryan, 'Almost hypoelliptic operators with constant powers", Eurasian Math. Journal, ...
[20] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, Москва, Наука, Физматгиз (1996).

Поступила 10 февраля 2016