Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 1, 2018, стр. 37 – 44.

ГРУППЫ ОБРАТИМЫХ БИНАРНЫХ ОПЕРАЦИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

П. С. ГЕВОРКЯН

Московский педагогический государственный университет
E-mail: *pgev@yandex.ru*

Аннотация. Исследуются непрерывные бинарные операции топологического пространства и доказывается критерий их обратимости. Решается проблема классификации групп обратимых непрерывных бинарных операций локально компактных и локально связных пространств. Доказывается теорема о бинарном дистрибутивном представлении топологической группы.

MSC2010 number: 54H15, 22A25.

Ключевые слова: бинарная операция; топологическая группа; группы гомеоморфизмов; представления топологических групп.

1. Вспомогательные результаты и обозначения

В данной статье под пространством мы подразумеваем топологическое пространство. Все пространства предполагаются хаусдорфовыми.

Через $C(X,Y)$ обозначается пространство всех непрерывных отображений пространства X в пространство Y, снабженное компактно-открытой топологией, то есть топологией, предбазой которой является семейство множеств вида $W(K,U) = \{f : X \to Y;\ f(K) \subset U\}$, где K компактное подмножество пространства X, а U открытое подмножество пространства Y. Все пространства отображений рассматриваются в компактно-открытой топологии.

Если G топологическая группа, то на пространстве $C(X,G)$ рассматривается естественная групповая операция: для произвольных непрерывных отображений $f,g \in C(X,G)$ их произведение $fg \in C(X,G)$ определяется формулой $(fg)(x) = f(x)g(x)$ для всех $x \in X$.

Теорема 1.1 ([1]). *Если G топологическая группа, то $C(X,G)$ также является топологической группой.*

Группа всех гомеоморфизмов пространства X обозначается через $H(X)$. Эта группа, вообще говоря, не является топологической группой. Однако, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2 ([2]). *Пусть пространство X локально компактно и локально связно. Тогда $H(X)$ является топологической группой.*

Симметрическая группа множества X обозначается через $S(X)$. В случае конечного множества X эта группа обозначается $S_n(X)$ или S_n, где n — число элементов множества X. Порядок группы $S_n(X)$ равен $n!$: $|S_n(X)| = n!$ Подробное изложение этих и других, используемых в статье без ссылок, определений, понятий и результатов можно найти в работах [3]–[7].

2. Непрерывные бинарные операции топологических пространств. Критерий обратимости

Пусть X – произвольное топологическое пространство. Непрерывное отображение $f : X^2 \to X$ назовем *непрерывной бинарной операцией* пространства X. Множество всех непрерывных бинарных операций пространства X обозначим через $C_2(X)$. Определим композицию двух бинарных операций $f, \varphi \in C_2(X)$ формулой

$$(f \circ \varphi)(t, x) = f(t, \varphi(t, x)), \tag{2.1}$$

где $t, x \in X$.

Если $f : X^2 \to X$ непрерывная бинарная операция, то для произвольного $t \in X$ определим непрерывное отображение $f_t : X \to X$ формулой

$$f_t(x) = f(t, x). \tag{2.2}$$

Заметим, что непрерывную бинарную операцию $f : X^2 \to X$ можно представить как семейство непрерывных отображений $\{f_t\}$: $f = \{f_t\}$, которое непрерывно зависит от индекса $t \in X$. В этих обозначениях закон композиции (2.1) двух бинарных операций $f = \{f_t\}$ и $\varphi = \{\varphi_t\}$ примет вид

$$f \circ \varphi = \{f_t \circ \varphi_t\},$$

что показывает естественность формулы (2.1).

Предложение 2.1. *Пространство $C_2(X)$ является полугруппой с единицей $e(t, x) = x$, т. е. моноидом, относительно композиции бинарных операций.*

Доказательство этого предложения проводится непосредственной проверкой аксиом полугруппы.

Определение 2.1. *Непрерывная бинарная операция $f \in C_2(X)$ называется обратимой, если существует непрерывная бинарная операция $f^{-1} \in C_2(X)$ такая,* *что*

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e.$$

В этом случае f и f^{-1} называются взаимно-обратными бинарными операциями.

Подмножество всех обратимых элементов множества $C_2(X)$ обозначим через $H_2(X)$. Итак, $H_2(X)$ *является группой.*

Пример 2.1. Пусть $X = \{a, b\}$ двухточечное дискретное пространство. Симметрическая группа подстановок этого множества $S_2(X)$ является циклической группой $\mathbb{Z}_2$, а группа всех обратимых бинарных операций множества $X = \{a, b\}$ — это группа 4-го порядка с двумя образующими φ_1 и φ_2, которые задаются следующим образом:

	b	a	a
φ_1:	a	b	b
		a	b

	b	b	a
φ_2:	a	a	b
		a	b

Это, как известно, четверная группа Клейна. В случае трехточечного множества X порядок группы $H_2(X)$ равен $(3!)^3 = 216$ (см. далее, следствие 3.2).

Справедлива следующая не сложно доказываемая теорема.

Теорема 2.1. *Если непрерывная бинарная операция $f = \{f_t\} \in C_2(X)$ обратима, то непрерывное отображение $f_t : X \to X$, заданное формулой (2.2) является гомеоморфизмом для произвольного $t \in X$ и $f^{-1} = \{f_t^{-1}\}$.*

Обратное утверждение теоремы 2.1 верно для локально компактных и локально связных пространств.

Теорема 2.2. *Пусть пространство X локально компактно и локально связно, а $f = \{f_t\} : X^2 \to X$ непрерывная бинарная операция. Если отображение $f_t : X \to X$ для произвольного $t \in X$ является гомеоморфизмом, то бинарная операция $f = \{f_t\}$ обратима и $f^{-1} = \{f_t^{-1}\}$.*

Доказательство. Рассмотрим бинарную операцию f^{-1}, заданную формулой $f^{-1}(t, x) = f_t^{-1}(x)$, и докажем, что она является обратной непрерывной бинарной операцией для $f : X^2 \to X$.

Сначала установим непрерывность отображения $f^{-1} : X^2 \to X$. Пусть $(t_0, x_0) \in X^2$ — произвольная точка и $f^{-1}(t_0, x_0) = f_{t_0}^{-1}(x_0) = y_0$. Рассмотрим произвольную открытую окрестность $W \subset X$ точки y_0 такую, что замыкание $\overline{W}$ компактно. Тогда существует такая компактная и связная окрестность K точки x_0, что

$$f_{t_0}^{-1}(K) \subset W. \tag{2.3}$$

Внутренность множества K обозначим через K°. Имеем:

$$f_{t_0}(y_0) = x_0 \in K^\circ. \tag{2.4}$$

Из включения (2.3) следует, что

$$f_{t_0}(W^C \cap \overline{W}) \subset K^C, \tag{2.5}$$

где W^C и K^C дополнения множеств W и K, соответственно.

Поскольку $f : X^2 \to X$ непрерывная бинарная операция, y_0 и $W^C \cap \overline{W}$ компактные, а K° и K^C открытые подмножества пространства X, то из (2.4) и (2.5) следует, что существует такая открытая окрестность U точки t_0, что

$$f_t(y_0) \in K^\circ \tag{2.6}$$

и $f_t(W^C \cap \overline{W}) \subset K^C$ для произвольного $t \in U$. Следовательно, имеем $K \subset f_t(W \cup \overline{W}^C)$ для произвольного $t \in U$. Поэтому, $f_t^{-1}(K) \subset W \cup \overline{W}^C$.

Так как $f_t^{-1}(K)$ связное множество, а W и $\overline{W}^C$ дизъюнктные открытые множества, то из последнего включения следует, что $f_t^{-1}(K)$ лежит в одном из множеств W и $\overline{W}^C$. Однако, в силу (2.6), становится очевидным, что $f_t^{-1}(K) \subset W$. А значит,

$$f_t^{-1}(K^\circ) \subset W \tag{2.7}$$

для всех $t \in U$.

Итак, для произвольной открытой окрестности W точки $y_0 = f_{t_0}^{-1}(x_0)$ мы нашли такие открытые окрестности U точки t_0 и K° точки x_0, что выполняется (2.7). Тем самым непрерывность бинарной операции $f^{-1} = \{f_t^{-1}\}$ доказана.

Осталось заметить, что непрерывная бинарная операция $f^{-1} : X^2 \to X$ является обратной для $f : X^2 \to X$, что проверяется элементарно. □

Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает следующий критерий обратимости непрерывных бинарных операций локально компактных и локально связных пространств.

Теорема 2.3. *Пусть пространство X локально компактно и локально связно. Непрерывная бинарная операция $f = \{f_t\} : X^2 \to X$ обратима тогда и только тогда, когда непрерывное отображение $f_t : X \to X$ является гомеоморфизмом для произвольного $t \in X$.*

3. Классификация групп обратимых непрерывных бинарных операций

Как показывает следующее предложение группы обратимых непрерывных бинарных операций являются естественными расширениями групп гомеоморфизмов.

Предложение 3.1. *Группа всех гомеоморфизмов $H(X)$ топологического пространства X изоморфна (алгебраически и топологически) некоторой подгруппе группы обратимых бинарных операций $H_2(X)$.*

Доказательство. Каждому $f \in H(X)$ поставим в соответствие непрерывное отображение $\bar{f} : X^2 \to X$, определяемое формулой $\bar{f}(t,x) = f(x)$, $t, x \in X$. Очевидно, что $\widetilde{f^{-1}} = \bar{f}^{-1}$. Итак, $\bar{f}$ — непрерывная обратимая бинарная операция, то есть $\bar{f} \in H_2(X)$. Соответствие $f \to \bar{f}$ является искомым изоморфизмом группы $H(X)$ на некоторую подгрупу группы $H_2(X)$. □

Следующая теорема решает проблему классификации групп обратимых непрерывных бинарных операций локально компактных и локально связных пространств с помощью групп гомеоморфизмов.

Теорема 3.1. *Пусть пространство X локально компактно и локально связно. Тогда группа $H_2(X)$ изоморфна (алгебраически и топологически) группе $C(X, H(X))$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $p : C(X, H(X)) \to H_2(X)$, заданное формулой:

$$p(f)(t,x) = f(t)(x),$$

$f \in C(X, H(X))$, $t, x \in X$. Так как для произвольного $t \in X$ отображение $f(t) : X \to X$ является гомеоморфизмом, то, в силу теоремы 2.3, бинарная операция $p(f) : X \times X \to X$ обратима, то есть она действительно принадлежит группе $H_2(X)$.

Докажем, что p является мономорфизмом. Пусть $f, g \in C(X, H(X))$ и $f \neq g$. Тогда существует такая точка $t_0 \in X$, что $f(t_0) \neq g(t_0)$. Так как $f(t_0), g(t_0) \in H(X)$, то $f(t_0)(x_0) \neq g(t_0)(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in X$. Итак, $p(f)(t_0, x_0) \neq p(g)(t_0, x_0)$, а значит $p(f) \neq p(g)$.

Отображение p является также эпиморфизмом. Действительно, пусть $\varphi \in H_2(X)$ произвольная непрерывная бинарная операция. В силу теоремы 2.3 отображение $\varphi_t : X \to X$, заданное формулой $\varphi_t(x) = \varphi(t,x)$, $t, x \in X$, является гомеоморфизмом. Несложно заметить, что элемент $f \in C(X, H(X))$, определяемый равенством $f(t) = \varphi_t$, является прообразом бинарной операции φ: $p(f)(t,x) =$

$f(t)(x) = \varphi_t(x) = \varphi(t,x)$. Итак, отображение $p^{-1} : H_2(X) \to C(X, H(X))$, заданное формулой

$$p^{-1}(\varphi)(t)(x) = \varphi(t,x),$$

$\varphi \in H_2(X), t, x \in X$, является обратным для отображения $p : C(X, H(X)) \to H_2(X)$.

Отображение p является гомоморфизмом, то есть $p(f \circ g) = p(f) \circ p(g)$. Действительно, для произвольных $t, x \in X$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$p(f \circ g)(t,x) = (f \circ g)(t)(x) = (f(t) \circ g(t))(x) = f(t)(g(t)(x)) =$$
$$= f(t)(p(g)(t,x)) = p(f)(t, p(g)(t,x)) = (p(f) \circ p(g))(t,x).$$

Докажем непрерывность отображения p. Пусть $W(K \times K', U)$ — произвольный элемент предбазы компактно-открытой топологии пространства $H_2(X)$, где $U \subset X$ открытое, а $K, K' \subset X$ компактные подмножества пространства X. Покажем, что прообразом множества $W(K \times K', U)$ является множество $W(K, W(K', U))$, которое является элементом предбазы компактно-открытой топологии пространства $C(X, H(X))$. Действительно, для $\forall \varphi \in W(K \times K', U)$ и $f = p^{-1}(\varphi) \in C(X, H(X))$ имеет место:

$$\varphi \in W(K \times K', U) \iff \varphi(t,x) \in U \iff p(f)(t,x) \in U \iff$$
$$\iff f(t)(x) \in U \iff f \in W(K, W(K', U)),$$

где $t \in K$ и $x \in K'$ — произвольные элементы. Точно также можно доказать непрерывность обратного отображения $p^{-1} : H_2(X) \to C(X, H(X))$. □

Группа обратимых непрерывных бинарных операций $H_2(X)$ вообще говоря не является топологической группой. Однако справедлива следующая теорема.

Следствие 3.1. *Пусть X локально компактное и локально связное пространство. Тогда $H_2(X)$ топологическая группа.*

Доказательство. Из теоремы 1.2 следует, что $H(X)$ является топологической группой. Следовательно, $C(X, H(X))$ также является топологической группой (теорема 1.1). Значит, в силу теоремы 3.1, $H_2(X)$ топологическая группа. □

Следствие 3.2. *Пусть $|X| = n < \infty$. Тогда $|H_2(X)| = (n!)^n$.*

Доказательство. Для конечного множества X справедливо $H(X) = S_n(X)$, где $S_n(X)$ симметрическая группа подстановок множества X. Так как $|S_n(X)| = n!$, то утверждение следствия непосредственно вытекает из теоремы 3.1. □

4. Бинарные дистрибутивные представления топологических групп

Определение 4.1. *Подгруппа $D \subset H_2(X)$ называется дистрибутивной, если для любых $x, x', x'' \in X$ и любых $g, h \in D$ выполняется условие*

$$g(h(x,x'), h(x,x'')) = h(x, g(x',x'')). \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Подгруппа $D \subset H_2(X)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда для произвольных $g = \{g_t\}, h = \{h_{t'}\} \in D$, $t, t' \in X$, выполняется равенство*

$$g_t \circ h_{t'} = h_{g_t(t')} \circ g_t. \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть $D \subset H_2(X)$ дистрибутивная подгруппа. Тогда, учитывая условие дистрибутивности (4.1), получим:

$$(g_t \circ h_{t'})(x) = g_t(h_{t'}(x)) = g_t(h(t',x)) = g(t, h(t',x)) = h(g(t,t'), g(t,x)) =$$
$$= h_{g(t,t')}(g(t,x)) = h_{g_t(t')}(g_t(x)) = (h_{g_t(t')} \circ g_t)(x)$$

для произвольного $x \in X$, то есть выполняется равенство (4.2).

Теперь предположим, что верно равенство (4.2). Тогда для произвольных $g, h \in G$ и $t, t', x \in X$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$h(g(t,t'), g(t,x)) = h_{g(t,t')}(g(t,x)) = h_{g_t(t')}(g_t(x)) = (h_{g_t(t')} \circ g_t)(x) =$$
$$= (g_t \circ h_{t'})(x) = g_t(h_{t'}(x)) = g_t(h(t',x)) = g(t, h(t',x)),$$

то есть D дистрибутивная подгруппа. □

Группы обратимых непрерывных бинарных операций весьма богаты дистрибутивными подгруппами. Более того, любую топологическую группу можно рассматривать как дистрибутивную подгруппу подходящим образом выбранной группы обратимых непрерывных бинарных операций.

Теорема 4.2 (о бинарном дистрибутивном представлении топологической группы). *Любая топологическая группа является дистрибутивной подгруппой некоторой группы обратимых бинарных операций.*

Доказательство. Пусть G — топологическая группа. Рассмотрим группу обратимых бинарных операций $H_2(G)$ пространства G. Определим отображение $\mathbf{i} : G \to H_2(G)$, которое каждому элементу $g \in G$ сопоставляет бинарную операцию $\mathbf{i}_g \in H_2(G)$, определенную формулой:

$$\mathbf{i}_g(h_1, h_2) = h_1 g h_1^{-1} h_2,$$

где $g, h_1, h_2 \in G$.

Так как для любого $g \in G$ $i_g(e, e) = g$, где e — единица группы G, то отображение i является мономорфизмом. Отображение i является также гомоморфизмом. Действительно,

$$i_{gk}(h_1, h_2) = h_1 g k h_1^{-1} h_2 = h_1 g h_1^{-1} h_1 k h_1^{-1} h_2 = i_g(h_1, h_1 k h_1^{-1} h_2) = \\ = i_g(h_1, i_k(h_1, h_2)) = [i_g \circ i_k](h_1, h_2),$$

где $g, k, h_1, h_2 \in G$.

Непрерывность отображения i следует из непрерывности операций $(g, h) \to gh$ и $g \to g^{-1}$ для всех $g, h \in G$. Итак, i — изоморфизм группы G на свой образ. Теперь заметим, что $i(G)$ является дистрибутивной подгруппой группы $H_2(G)$. Действительно, для произвольных $g, h, k, k_1, k_2 \in G$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$i_g(i_h(k, k_1), i_h(k, k_2)) = i_g(khk^{-1}k_1, khk^{-1}k_2) = khk^{-1}k_1 g k_1^{-1} k h^{-1} k^{-1} khk^{-1} k_2 = \\ = khk^{-1}k_1 g k_1^{-1} k_2 = i_h(k, k_1 g k_1^{-1} k_2) = i_h(k, i_g(k_1, k_2)). \qquad \square$$

Эта теорема является бинарным топологическим аналогом классической теоремы Кэли о представлении произвольной конечной группы унарными операциями (подстановками).

Abstract. In this paper, continuous binary operations of a topological space are studied and a criterion of their invertibility is proved. The classification problem of groups of invertible continuous binary operations of locally compact and locally connected spaces is solved. A theorem on the binary distributive representation of a topological group is also proved.

Список литературы

[1] R. A. McCoy, I. Ntantu, Topological Properties of Spaces of Continuous Functions, Berlin, Springer-Verlag (1988).
[2] R. Arens, "Topologies for homeomorphism groups", Amer. J. Math, 68, 593 – 610 (1946).
[3] G. E. Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups, New York (1972).
[4] Р. Энгелькинг, Общая Топология, М., Мир (1986).
[5] П. С. Геворкян, "О бинарных G-пространствах", Матем. заметки, 96, no. 4, 623 – 626 (2014).
[6] P. S. Gevorgyan, "Equivariant movability of topological groups", Topology and its Applications, 159, no. 7, 1761 – 1766 (2012).
[7] P. S. Gevorgyan, "Groups of binary operations and binary G-spaces", Topology and its Applications, 201, 18 – 28 (2016).

Поступила 17 февраля 2016