Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 1, 2018, стр. 23 – 36.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ЯДРА КОТОРЫХ ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ СТЕПЕНИ (-1)

А. Г. БАРСЕГЯН

Институт математики НАН РА [1]
E-mail: *anibarseghyan@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматривается интегральное уравнение, ядро которого является однородной функцией степени (-1). Развивается факторизационный подход к уравнению. Построенная операторная факторизация применяется к уравнению с положительным симметричным ядром. Доказывается, что в консервативном случае положительными решениями могут одновременно обладать как однородное уравнение, так и неоднородное уравнение с положительным свободным членом.

MSC2010 number: 45A05, 45H05, 45D05.

Ключевые слова: нелинейное уравнение факторизации; основное решение; однородная функция степени (-1); консервативное уравнение.

1. Введение

Рассмотрим следующее интегральное уравнение, ядро которого является однородной функцией степени (-1):

$$f(x) = g(x) + \int_0^1 P\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}f(t)\,dt. \tag{1.1}$$

Уравнениям (1.1) посвящен ряд исследований (см. [1]-[4]). Наиболее подробно изучено известное уравнение А. Диксона

$$f(x) = g(x) + \gamma\int_0^1 \frac{f(t)}{x+t}dt. \tag{1.2}$$

В [2] был рассмотрен вопрос решения аналога уравнения (1.1) на полупрямой, с применением преобразования Меллина. Уравнениям (1.1) свойственно нерегулярное поведение ядра в окрестности точки $(0,0)$. Путем перехода к новым аргументам $x = e^{-u}$, $t = e^{-v}$, (1.1) сводится к уравнению Винера-Хопфа (УВХ). Это обстоятельство позволило перенести на (1.1) ряд положений теории УВХ.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта No. 15T-1A246

С привлечением метода Винера-Хопфа в [3] было построено решение уравнения Диксона в виде разложения по гипергеометрическим функциям.

В работе [4] построена факторизация уравнения (1.1) в пространстве $L_2(0,1)$. Представляет теоретический и прикладной интерес прямое изучение уравнения (1.1), установление аналогов факторизационных, редукционных и других методов теории УВХ.

В настоящей работе развивается прямой подход к уравнениям (1.1) с использованием метода нелинейных уравнений факторизации (НУФ) (см. [5]-[7]). Получены аналоги некоторых результатов [5] и [6] по уравнениям Винера-Хопфа. Операторная факторизация применяется к уравнению (1.1) с положительным симметричным ядром в так называемом консервативном случае. Показывается, что тогда положительными решениями одновременно могут обладать как однородное уравнение, так и – неоднородное уравнение с положительным свободным членом. Некоторые факты, имеющие прямые аналоги в теории уравнений свертки, будут приведены без доказательства.

2. Классы функций и операторов

Введем в рассмотрение некоторые банаховы пространства (В. пространства) вещественных функций на $(a,b)\subset(0,\infty)$.

Обозначим через $\tilde{L}(a,b)$ В. пространство функций, интегрируемых с весом $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, с нормой

$$\|f\|_{\tilde{L}}=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{x}}|f(x)|\,dx<+\infty,\quad 0\le a<b\le\infty. \tag{2.1}$$

Через $\tilde{M}(a,b)$ обозначается В. пространство функций f, ограниченных с весом $\sqrt{x}$ (то есть удовлетворяющих условию $\sqrt{x}f(x)\in M(a,b)$) с нормой

$$\|f\|_{\tilde{M}}=\sup_{x\in(a,b)} ess\,\sqrt{x}\,|f(x)|<+\infty. \tag{2.2}$$

Под $\tilde{E}$ будем подразумевать любое из пространств $\tilde{L}(0,1)$, $L_2(0,1)$, $\tilde{M}(0,1)$. По необходимости, в этот список могут быть включены интерполяционные весовые пространства из серии L_p, а также – некоторые подпространства $\tilde{M}$, состоящие из непрерывных функций. Через I обозначается единичный оператор в любом из рассматриваемых функциональных пространств. Обозначим через Ω пространство интегральных операторов $\hat{P}$ на $(0,1)$ с ядром вида

$$K(x,t)=P\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}. \tag{2.3}$$

Имеем

$$P \in \tilde{L}_1(0,\infty) : \mu = \mu(P) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} |P(x)|\, dx < +\infty, \tag{2.4}$$

где

$$\left(\hat{P}f\right)(x) = \int_0^1 P\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} f(t)\, dt.$$

Функцию P назовем ядерной функцией оператора $\hat{P}$. Симметричность ядра $K(x,t)$ означает выполнение равенства

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = xP(x), \quad 0 < x < \infty. \tag{2.5}$$

Заметим, что ядро уравнения Диксона (1.2) симметричное, положительное при $\gamma > 0$, а для величины μ (см. (2.4)) получается выражение

$$\mu = \gamma \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \gamma\pi.$$

Из (2.3) и (2.4) следуют неравенства:

$$\int_0^\infty |K(x,t)| \frac{1}{\sqrt{x}} dx \le \mu \frac{1}{\sqrt{t}}, \qquad \int_0^\infty |K(x,t)| \frac{1}{\sqrt{t}} dt \le \mu \frac{1}{\sqrt{x}}. \tag{2.6}$$

Первое из неравенств (2.6) означает, что оператор $\hat{P}$ ограниченно действует в $\tilde{L}(0,1)$ и имеет место следующая оценка нормы:

$$\left\|\hat{P}\right\| \le \mu(P). \tag{2.7}$$

Второе из неравенств (2.6) обеспечивает выполнение оценки (2.7) в $\tilde{M}(0,1)$. С использованием неравенства Коши-Буняковского проверяется выполнение (2.7) в $L_2(0,1)$. Справедлив следующий результат.

Лемма 2.1. *Оператор $\hat{P} \in \Omega$ ограниченно действует в $\tilde{E}$. В любом из пространств $\tilde{E}$ имеет место неравенство* (2.7), *где μ определяется согласно* (2.4). *Пространство Ω является В. пространством с нормой*

$$\left\|\hat{P}\right\|_\Omega = \mu(P). \tag{2.8}$$

Покажем, что нетривиалный оператор $\hat{P}$ не является вполне непрерывным в пространствах $\tilde{E}$.

Рассмотрим следующую функцию:

$$W(x) = \int_x^{+\infty} P(t) \frac{1}{\sqrt{t}} dt, \quad x > 0.$$

Сделанное предположение о нетривиальности оператора $\hat{P}$ означает, что функция $W(x)$ ненулевая. Пусть $W(a) \neq 0$. Будем считать, что $W(a) > 0$, в противном случае будет рассмотрена эквивалентная задача некомпактности оператора $(-\hat{P})$. Из непрерывности функции $W(x)$, равенства $W(+\infty) = 0$, и из неравенства $W(a) > 0$ следует, что существует точка ae^h, $h > 0$ такая, что

$$0 < W\left(ae^h\right) < W(a) \quad \text{и} \quad W(x) > 0, \quad x \in \left[a, ae^h\right]. \tag{2.9}$$

Из непрерывности функции $W(x)$ следует, что существует число $\delta \in (0, h)$ такое, что при $x \in \left[ae^{h-\delta}, ae^h\right]$ имеет место неравенство

$$W\left(xe^{\delta-h}\right) - W\left(xe^{\delta}\right) \geq \varepsilon \equiv \frac{1}{2}\left[W(a) - W\left(ae^h\right)\right] > 0. \tag{2.10}$$

Рассмотрим теперь следующую последовательность функций $f_n(x)$ $n = 1, 2, \ldots$

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{если} \ x \in \left[e^{-n-h}, e^{-n}\right], \\ 0, & \text{если} \ x \in (0,1) \setminus \left[e^{-n-h}, e^{-n}\right], \end{cases}$$

где число h определяется в соответствии с (2.9). Функции $f_n(x)$ образуют ограниченную последовательность в любом из пространств $\tilde{E}$. Так, например, $\|f_n\|_{\tilde{L}} = \int\limits_{e^{-n-h}}^{e^{-n}} \frac{1}{x} dx = h$. Пусть $\varphi_n(x) = \left(\hat{P} f_n\right)(x)$. Имеем

(2.11)

$$\varphi_n(x) = \int\limits_0^1 P\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} f_n(t)\, dt = \int\limits_{e^{-n-h}}^{e^{-n}} P\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int\limits_{xe^n}^{xe^{n+h}} P(z) \frac{1}{\sqrt{z}} dz,$$

то есть $\varphi_n(x) = \left(\hat{P} f_n\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[W\left(xe^n\right) - W\left(xe^{n+h}\right)\right]$. Из (2.10) следует неравенство

$$\varphi_n(x) \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{x}}, \quad \text{при} \quad x \in \left[ae^{-n}, ae^{\delta-n}\right]. \tag{2.12}$$

Эти функции образуют ограниченную последовательность также в любом из пространств $\tilde{E}$. Из (2.4) имеем

$$\|\varphi_n\|_{\tilde{L}} \leq h \cdot \int\limits_0^{e^{n+h}} |P(z)| \frac{1}{\sqrt{z}} dz \leq h \cdot \mu.$$

Из неравенства (2.12) следует, что как сама последовательность φ_n, так и ее произвольная подпоследовательность не может сходиться к нулевому элементу ни в одном из пространств $\tilde{E}$. С другой стороны, из (2.11) следует, что $\varphi_n(x) \to 0$ в произвольной фиксированной точке $x \geq 0$. Следовательно, из последовательности φ_n нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность ни в одном из пространств $\tilde{E}$, что и доказывает некомпактность оператора $\hat{P}$ в $\tilde{E}$.

3. Классы треугольных операторов

Введем следующие подпространства $\Omega^{\pm} \subset \Omega$ треугольных (формально вольтерровых) операторов: если $\hat{V}^{\pm} \in \Omega^{\pm}$, то

$$
\begin{gathered}
\left(\hat{V}^{+} f\right)(x)=\int_{x}^{1} V^{+}\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} f(t)\, dt, \\
\left(\hat{V}^{-} f\right)(x)=\frac{1}{x} \int_{0}^{x} V^{-}\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt, \quad V^{\pm} \in \tilde{L}_{1}(0,1).
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

Поскольку в выражении для ядра оператора $\hat{V}$ аргументы поставлены в обратном порядке, то обе функции $V^{\pm}$ сосредоточены на $(0,1)$. Считается, что

$$
V^{\pm}(x)=0 \quad \text{при} \quad x>1. \tag{3.2}
$$

Имеем $\Omega=\Omega^{+} \oplus \Omega^{-}$. Если $\hat{P} \in \Omega$, то $\hat{P}=\hat{P}^{+}+\hat{P}^{-}, \quad \hat{P}^{\pm} \in \Omega^{\pm}$, где

$$
\left(\hat{P}^{+} f\right)(x)=\int_{x}^{1} P^{+}\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} f(t)\, dt, \ \left(\hat{P}^{-} f\right)(x)=\frac{1}{x} \int_{0}^{x} P^{-}\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt. \tag{3.3}
$$

Здесь $P^{+}(x)=P(x)$ и $P^{-}(x)=P\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x}$; $0<x<1$.

Покажем, что подпространства $\Omega^{\pm}$, в отличие от Ω, замкнуты относительно операторного умножения. Пусть $\hat{U}^{+}, \hat{V}^{+} \in \Omega^{+}$ и $\hat{U}^{-}, \hat{V}^{-} \in \Omega^{-}$. Обозначим $\hat{W}^{\pm}=\hat{U}^{\pm} \hat{V}^{\pm}$. Для ядер $W^{\pm}$ интегральных операторов $\hat{W}^{\pm}$ получаем выражения

$$
\begin{gathered}
W^{+}(x, t)=\frac{1}{t} \int_{x / t}^{1} U^{+}\left(\frac{x / t}{z}\right) \frac{1}{z} V^{+}(z)\, dz, \\
W^{-}(x, t)=\frac{1}{x} \int_{t / x}^{1} U^{-}\left(\frac{t / x}{z}\right) \frac{1}{z} V^{-}(z)\, dz.
\end{gathered} \tag{3.4}
$$

Откуда видно, что, $\hat{W}^{\pm} \in \Omega^{\pm}$.

Можно показать, что $\Omega^{\pm}$ являются коммутативными банаховыми алгебрами с нормой (2.8).

4. Уравнения типа Вольтерра

Рассмотрим следующие, верхний и нижний, формально вольтерровые уравнения:

$$
f(x)=g(x)+\int_{x}^{1} V^{+}\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} f(t)\, dt, \tag{4.1}
$$

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{x}\int_0^x V^-\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt, \tag{4.2}$$

где $V^\pm \in \tilde{L}(0,1)$, $g \in \tilde{E}(0,1)$.

Уравнение (4.1) может быть рассмотрено на любом интервале $(r, 1)$, где $0 \le r < 1$. Используя абсолютную непрерывность первообразной от функции $\frac{1}{\sqrt{x}}|V^+(x)|$ на $(\delta, 1)$, $\delta \in (0,1)$ можно показать, что уравнение (4.1) обладает единственным решением f на $(0,1)$ таким, что $f \in \tilde{E}(r,1)$, $\forall r \in (0,1)$. Если функции V^+ и g неотрицательны, то решение f также неотрицательно.

Несколько иначе обстоит дело в случае уравнения (4.2), в котором точка 0 фигурирует в качестве предела интегрирования. Операторы $I - \hat{V}^\pm$ назовем нормально обратимыми в $\tilde{E}$, если

$$\left(I - \hat{V}^\pm\right)^{-1} = I + \hat{\Phi}^\pm, \tag{4.3}$$

где $\hat{\Phi}^\pm \in \Omega^\pm$ и

$$\begin{aligned} \left(\hat{\Phi}^+ f\right)(x) &= \int_x^1 \Phi^+\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t} f(t)\,dt, \\ \left(\hat{\Phi}^- f\right)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \Phi^-\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Нормальная обратимость операторов $I - \hat{V}^\pm$ в $\tilde{E}$ эквивалентна принадлежности к $\tilde{L}(0,1)$ решений следующих уравнений типа Вольтерра вида (4.1) относительно резольвентных функций:

$$\Phi^+(x) = V^+(x) + \int_x^1 V^+\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}\Phi^+(t)\,dt, \tag{4.5}$$

$$\Phi^-(x) = V^-(x) + \int_x^1 V^-\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}\Phi^-(t)\,dt. \tag{4.6}$$

Обозначим $\gamma^\pm = \mu(V^\pm)$. Если $\gamma^\pm < 1$, то (4.1) и (4.2) являются уравнениями со сжимающими в $\tilde{E}$ интегральными операторами и операторы $I - \hat{V}^\pm$ нормально обратимы.

Лемма 4.1. *Выполнены следующие утверждения:*

i. *Пусть $V^+ \ge 0$ и $\gamma^+ \ge 1$. Тогда оператор $I - \hat{V}^+$ не является нормально обратимым в $\tilde{E}$.*

ii. *Пусть $V^- \geq 0$ и $\gamma^- \geq 1$. Тогда оператор $I - \hat{V}^-$ не является нормально обратимым в $\tilde{E}$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение (4.5). В условиях леммы функция V^+ ненулевая и неотрицательна на $(0,1)$. Умножая обе части (4.5) на $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ и интегрируя от 0 до 1 получаем равенство $\mu(\Phi^+) = \gamma^+ + \mu(\Phi^+)\,\gamma^+$, или

$$(1-\gamma^+)\,\mu(\Phi^+) = \gamma^+.$$

Это равенство противоречивое, поскольку его правая часть положительна, а левая часть не является таковой. Аналогичное рассмотрение уравнения (4.6) приводит к доказательству второго утверждения леммы. □

5. Задача треугольной факторизации

Классы $\Omega^\pm$ обладают следующим совместным мультипликативым свойством: если $\hat{V}^\pm \in \Omega^\pm$, то $\hat{V}^-\hat{V}^+ \in \Omega$. Прямыми выкладками проверяется, что ядро K оператора $\hat{V}^-\hat{V}^+$ имеет вид (2.3), где P определяется по формуле

$$P(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^{\min(x,1)} V^-\left(\frac{s}{x}\right) V^+(s)\,ds\,. \tag{5.1}$$

Этот факт будет играть принципиальную роль в дальнейших рассмотрениях.

Можно проверить, что если $\hat{P}_1, \hat{P}_2 \in \Omega$ и произведение $\hat{P}_1\hat{P}_2 \in \Omega$, то

$$\left\|\hat{P}_1\hat{P}_2\right\|_\Omega \leq \left\|\hat{P}_1\right\|_\Omega \left\|\hat{P}_2\right\|_\Omega, \tag{5.2}$$

где $\left\|\hat{P}\right\|_\Omega$ определяется согласно (2.8).

Пусть $\hat{P} \in \Omega$. Рассмотрим задачу факторизации:

$$\left(I-\hat{P}\right) = \left(I-\hat{V}^-\right)\left(I-\hat{V}^+\right), \tag{5.3}$$

где $\hat{V}^\pm \in \Omega^\pm$- искомые операторы. Факторизация (5.3) рассматривается как равенство операторов, действующих в пространствах $\tilde{E}$. В специальных условиях она может быть рассмотрена также в некоторых расширениях пространтв $\tilde{E}$. Подчеркнем, что в постановке задачи (5.3) обратимость оператора $I - \hat{P}$ не предполагается. Факторизацию (5.3) назовем канонической, если факторы $I-\hat{V}^\pm$ нормально обратимы.

В случае канонической факторизации (5.3), используя (4.3) получаем формулы

$$
V^{+}(x)=P^{+}(x)+\int_{0}^{1}\Phi^{-}(t)\,P^{+}(xt)\,dt\,,
$$
$$
V^{-}(x)=P^{-}(x)+\int_{0}^{1}P^{-}(xt)\,\Phi^{+}(t)\,dt\,, \tag{5.4}
$$

где $\Phi^{\pm}$ определяются из (4.5), (4.6).

Нелинейное уравнение факторизации. Задача (5.3) будет изучена методом нелинейных уравнений факторизации (НУФ) Н. Б. Енгибаряна (см. [5]-[7]). Используя (5.1) (аналогично случаю уравнения Винера-Хопфа) приходим к следующей лемме.

Лемма 5.1. *Факторизация (5.3) эквивалентна следующей нелинейной системе интегральных уравнений относительно ядерных функций $V^{\pm}$операторов $\hat{V}^{\pm}\in\Omega^{\pm}$:*

$$
V^{+}(x)=P^{+}(x)+\int_{0}^{1}V^{-}(t)\,V^{+}(xt)\,dt\,,
$$
$$
V^{-}(x)=P^{-}(x)+\int_{0}^{1}V^{-}(xt)\,V^{+}(t)\,dt\,. \tag{5.5}
$$

В случае симметричного ядра, нелинейное уравнение факторизации (5.5) допускает следующее упрощение. Пусть $P^{-}(x)=P^{+}(x)$. Тогда система (5.5) сводится к одному уравнению:

$$
V(x)=P(x)+\int_{0}^{1}V(t)\,V(xt)\,dt\,, \tag{5.6}
$$

в следующем смысле: если $V(x)\in\tilde{L}_1(0,1)$ удовлетворяет уравнению (5.6), то функции $V^{\pm}(x)=V(x)$ удовлетворяют системе (5.5). При этом возможна потеря "несимметричных" решений (5.5) (что может оказаться несущественной в вопросе применения факторизации).

Используя нелинейные уравнения факторизации (5.5) проверяется, что в случае канонической факторизации (5.3) функции $\Phi^{\pm}$ удовлетворяют линейным уравнениям

$$
\begin{aligned}
\Phi^{+}(x) &= P^{+}(x) + \int_0^1 P^{+}\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}\Phi^{+}(t)\,dt, \\
\Phi^{-}(x) &= P^{-}(x) + \int_0^1 \Phi^{-}(t)\,P^{-}\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}dt.
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

6. Существование основного решения нелинейных уравнений факторизации (5.5) и (5.6)

Рассмотрим уравнения (5.5) в случае выполнения условий

$$P^{\pm}(x) \ge 0, \mu(P) \le 1, \tag{6.1}$$

гдеμ определяется согласно (2.4).

Случай $\mu < 1$ назовем диссипативным, а случай $\mu = 1$ – консервативным. Диссипативному случаю соответствует уравнение (1.1) со сжимающим в $\hat{E}$ интегральным оператором. Консервативный случай является особым случаем уравнения (1.1), о чем речь пойдет позже. Рассмотрим простые итерации для системы (5.5):

$$
\begin{aligned}
V_{n+1}^{+}(x) &= P^{+}(x) + \int_0^1 V_n^{-}(t)\,V_n^{+}(xt)\,dt, \\
V_{n+1}^{-}(x) &= P^{-}(x) + \int_0^1 V_n^{-}(xt)\,V_n^{+}(t)\,dt, \\
V_0^{\pm}(x) &= 0, \quad n = 0, 1, \cdots
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Из алгебраических свойств классов $\Omega^{\pm}$, отмеченных в пп. 3 и 5 следует, что итерации (6.2) определяют последовательности $V_n^{\pm}$ в $\bar{L}$. Из неотрицательности $P^{\pm}$ следует, что

$$V_n^{\pm}(x) \ge 0, \quad V_n^{\pm}(x) \quad \text{возрастают по} \quad n. \tag{6.3}$$

В симметрическом случае (2.5) имеем $V_n^{\pm} = V_n$, где V_n определяются посредством итерационного процесса для (5.6):

$$V_{n+1}(x) = P(x) + \int_0^1 V_n(t)\,V_n(xt)\,dt, \quad V_0(x) = 0, \ n = 0, 1, \cdots \tag{6.4}$$

Перейдем к рассмотрению итераций (6.2). Введем обозначения

$$\mu^{\pm} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}P^{\pm}(x)\,dx, \quad \mu = \mu^{+} + \mu^{-}, \quad \gamma_n^{\pm} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}V_n^{\pm}(x)\,dx, \quad \gamma_n = \frac{\gamma_n^{+} + \gamma_n^{-}}{2}.$$

Имеем:

(6.5) $$\gamma_n^{\pm} \geq 0 \quad \text{и } \gamma_n^{\pm} \text{ возрастают по } \quad n.$$

Аналогично случаю уравнения Винера-Хопфа (см. [5], [6]) мы приходим к следующему алгебраическому соотношению:

$$\gamma_{n+1}^{+} + \gamma_{n+1}^{-} = \mu^{+} + \mu^{-} + \gamma_n^{-}\gamma_n^{+} = \mu + \gamma_n^{-}\gamma_n^{+}.$$

Это соотношение, в сочетании со свойством монотонности (6.5), позволяет оценить обе последовательности $\gamma_n^{\pm}$:

(6.6) $$\gamma_n^{\pm} \leq \mu (\leq 1), \quad \gamma_n \leq 1 - \sqrt{1-\mu}.$$

Обозначим

$$\gamma^{\pm} = \lim_{n\to\infty} \gamma_n^{\pm} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\gamma^{+} + \gamma^{-}}{2}.$$

Имеем:

(6.7) $$\gamma^{\pm} \leq \mu, \quad \gamma \leq 1 - \sqrt{1-\mu},$$

(6.8) $$\left(1-\gamma^{+}\right)\left(1-\gamma^{-}\right) = 1-\mu.$$

Из теоремы Б. Леви о монотонной сходимости следует, что существуют пределы последовательностей $V_n^{\pm}$ в $\tilde{L}$. С использованием (5.2) показывается, что в соотношениях (6.2) можно совершить предельный переход. Имеет место следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия* (6.1) *диссипативности или консервативности. Тогда существует основное решение* (V^{+}, V^{+}) *системы* (5.5), *которое является пределом в* $\tilde{L}(0,1) \times \tilde{L}(0,1)$ *последовательности* (V_n^{+}, V_n^{-}), *определяемой согласно* (6.2). *Имеют место равенства*

(6.9) $$\gamma^{+} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} V^{+}(x)\, dx, \quad \gamma^{-} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} V^{-}(x)\, dx$$

и свойства (6.7), (6.8).

В диссипативном случае решение нелинейного уравнения факторизации порождает каноническую факторизацию (5.3). В консервативном случае хотя бы один из факторов в (5.3) необратим в $\tilde{E}$. В симметрическом случае (2.5) имеем:

(6.10) $$V^{\pm}(x) = V(x), \gamma = 1 - \sqrt{1-\mu}.$$

Из (6.8) видно, что в консервативном случае имеет место хотя бы одно из равенств $\gamma^{+} = 1$, $\gamma^{-} = 1$, что означает простое или двойное вырождение оператора

$I - \hat{P}$. Согласно лемме 2.1, тогда факторизация (5.3) не является канонической. В симметрическом консервативном случае имеет место двойное вырождение.

7. О работе Л. Сахновича [4]

В работе [4] рассмотрено (комплексное) уравнение (1.1) в следующей записи:

$$Sf = f(x) - \int_0^1 P\left(\frac{t}{x}\right)\frac{1}{x}f(t)\,dt = g(x), \tag{7.1}$$

где $f(x) \in L^2(0,1)$ и

$$P\left(\frac{t}{x}\right)\frac{1}{x} = \overline{P\left(\frac{x}{t}\right)}\frac{1}{t}. \tag{7.2}$$

Здесь черточкой сверху отмечается переход к комплексному сопряженному. Предполагается выполнение условия:

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\left|P\left(\frac{1}{x}\right)\right|dx < +\infty. \tag{7.3}$$

В [4] доказана следующая факторизационная теорема.

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия (7.2) и (7.3), и соответствующий оператор S является положительным и обратимым. Тогда оператор S допускает левую треугольную факторизацию.*

Теоремы 6.1 и 7.1 в определенном смысле дополняют друг друга.

О примиенениях факторизации (5.3) к решению уравнения (1.1) Каноническая факторизация (5.3) сводит уравнение (1.1) к последовательному решению следующих двух вольтерровых уравнений вида (4.1) и (4.2):

$$F(x) = g(x) + \frac{1}{x}\int_0^x V^-\left(\frac{t}{x}\right)F(t)\,dt, \tag{7.4}$$

$$f(x) = F(x) + \int_x^1 V^+\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}f(t)\,dt. \tag{7.5}$$

Уравнения (7.4) и (7.5) могут быть использованы также в консервативном случае, когда факторизация (5.3) не является канонической. Обращаем внимание на следующее обстоятельство. Факторизация (5.3) понимается как равенство операторов, действующих в $\tilde{E}$, а последовательное решение уравнений (7.4) и (7.5) в консервативном случае может привести к функции f, не принадлежащей пространствам $\tilde{E}$. Аналогично случаю консервативных уравнений Винера-Хопфа (см. [5], [6]) можно показать, что построенное решение уравнения факторизации удовлетворяет исходному уравнению.

8. Консервантное уравнение с симметрическим ядром

Ниже нами будет вкратце рассмотрен вопрос решения однородного и неоднородного консервативного уравнения (1.1) с симметричным ядром. В рассматриваемом случае ядерная функция обладает следующими свойствами:

$$P \geq 0; \mu(P) = 1; P\left(\frac{1}{x}\right) = xP(x)\,, \quad 0 < x < \infty, \tag{8.1}$$

а основное решение нелинейного уравнения факторизации (5.6) обладает свойствами:

$$V^{\pm} = V \geq 0\,;\, \gamma = \mu(V) = 1.$$

Факторизация (5.3) сводит рассматриваемое уравнение к консервативным уравнениям (7.4) и (7.5).

Рассмотрим сначала однородное консервативное уравнение (1.1):

$$f(x) = \int_0^1 P\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}f(t)\,dt. \tag{8.2}$$

Легко проверить, что соответствующее однородное уравнение (7.4) обладает решениями $F(x) = \dfrac{c}{\sqrt{x}}$, $c = const$. Решения уравнения (7.5) имеют вид:

$$f(x) = c\bar{f}(x)\,; c = const, \bar{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \int_x^1 \Phi(t)\frac{1}{\sqrt{t}}dt\right), \tag{8.3}$$

где Φ определяется из (4.5), при $V^+ = V$. Имеет место:

Теорема 8.1. *Однородное консервативное уравнение* (8.2) *с симметричным ядром обладает решениями вида* (8.3). *Функция $\bar{f}$ абсолютно непрерывна и ограничена на $[\delta, 1]$, $\forall \delta \in (0,1)$.*

Вопрос поведения функции $\bar{f}$ в окрестности точки 0 мы здесь рассматривать не будем.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (1.1) при выполнении условий консервативности (8.1). Будем считать, что $0 \leq g(x) \in \tilde{L}(0,1)$. Можно показать, что тогда уравнение (1.1) имеет минимальное положительное решение, интегрируемое на $(\delta, 1)$, $\delta > 0$. Существование такого решения очевидно, например, в случае, когда функция g обращается в 0 в окрестности точки 0. Из уравнения (7.5) опеделяется минимальное положительное решение рассматриваемого неоднородного уравнения. Здесь возникает такая ситуация, когда положительными решениями одновременно обладают как неоднородное, так и – однородное консервативное уравнение (1.1).

9. Символ уравнения (1.1) и его факторизация

В конце работы вкратце укажем на связь операторной факторизации (5.3) с факторизацией символа оператора $I - \hat{P}$.

Пусть $\mathcal{M}$ пространство функций на $(-\infty, \infty)$ являющихся преобразованиями Меллина функций из $\bar{L}_1(0,\infty)$: $\check{P} \in \mathcal{M}$ если

$$\check{P}(s) \equiv \mathcal{M}\{P\}(s) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}+is} P(x)\, dx. \tag{9.1}$$

Можно показать, что $\check{P}$ непрерывная функция на вещественной оси. Под символом оператора $I - \hat{P}$ и уравнения (1.1) понимается функция $1 - \check{P}(s)$. Известно, что множество $\mathcal{M}$ замкнуто относительно поточечного умножения и образует алгебру. Введем подалгебры $\mathcal{M}^{\pm}$, состоящие из функций вида

$$\check{V}^{\pm}(s) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}\pm is} V^{\pm}(x)\, dx\,. \tag{9.2}$$

Рассмотрим факторизацию:

$$1 - \check{P}(s) = \left(1 - \check{V}_-(s)\right)\left(1 - \check{V}_+(s)\right), \quad Ims = 0. \tag{9.3}$$

Используя нелинейное уравнение факторизации (5.5) можно показать, что факторизация (9.3) эквивалентна задаче (5.3). Проверим, что из (5.5) следует (9.3). Пусть функции $V^{\pm}$ удовлетворяют системе (5.5). Умножая первое из уравнений (5.5) на $x^{-1/2+is}$ а второе на $x^{-1/2-is}$, затем интегрируя по x от 0 до 1, получаем

$$\check{V}^+(s) = \int_0^1 x^{-1/2+is} P(x)\, dx + \int_0^1 x^{-1/2-is} V^-(x) \left[\int_0^x t^{-1/2+is} V^+(t)\, dt\right] dx\,,$$

$$\check{V}^-(s) = \int_1^\infty x^{-1/2+is} P(x)\, dx + \int_0^1 V^-(x) \left[\int_x^1 t^{-1/2+is} V^+(t)\, dt\right] x^{-1/2-is} dx\,.$$

Складывая полученные равнства приходим к (9.3). Чтобы показать, что из (9.3) следует (5.5), можно воспользоваться изоморфизмом между сверточной алгеброй Ω и алгеброй $\mathcal{M}$.

Автор выражает благодарность проф. Н. Б. Енгибаряну за внимание к работе.

Abstract. The present paper deals with integral equations the kernels of which are homogeneous functions of degree (-1). Factorization approach to such equations is developed. The constructed operator factorization is applied to the equation with a positive symmetric kernel. We prove that in the conservative case, both the homogeneous equation and the corresponding nonhomogeneous equation with a positive free term can possess positive solutions simultaneously.

Список литературы

[1] A. C. Dixon, "On the solving nuclei of certain integral equation etc.", Proc. London Math. Soc., **27**, no. 2, 233 – 272 (1926).

[2] Э. Ч. Титчмарш, Введение в Теорию Интегралов Фурье, М., ОГИЗ, гос. изд-ство технико-теоретической литературы (1948).

[3] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, **13**: 5, 3 – 120 (1958).

[4] Lev A. Sakhnovich, "On Triangular Factorisation of Positive Operators, Operator Theory", Advances and Applications, Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, **179**, 289 – 308 (2007).

[5] Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами", Мат. Сб. (РАН), **97(139)**, no. 1 (5), 35 – 58 (1975).

[6] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., **22**, ВИНИТИ, М., 175 – 244 (1984).

[7] Н. Б. Енгибарян, "Постановка и решение некоторых задач факторизации интегральных операторов", Матем. сб., **191**, no. 12, 61 – 76 (2000).

Поступила 10 сентября 2016