Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 1, 2018, стр. 13 – 22.

ОБ ОДНОРОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ДВУМЯ ЯДРАМИ

Л. Г. АРАБАДЖЯН, С. А. ХАЧАТРЯН

Институт математики НАН РА
Армянский Государственный Педагогический Университет
E-mails: *arabajyan@mail.ru*, *kanushavan@mail.ru*

Аннотация. Работа посвящена условиям нетривиальной (ненулевой) разрешимости некоторых классов однородных интегральных уравнений вида

$$S(x)=\int_0^\infty T_1(x-t)S(t)dt+\int_{-\infty}^0 T_2(x-t)S(t)dt, x\in R,$$

относительно искомой функции S. Изучено асимптотическое поведение решения S.

MSC2010 number: 45A05, 45B05.

Ключевые слова: интегральное уравнение; ядро уравнения; асимптотика решения.

1. Введение, вспомогательные факты

1.1 Вопросы нетривиальной разрешимости однородных уравнений вида

$$S(x)=\int_0^\infty T_1(x-t)S(t)dt+\int_{-\infty}^0 T_2(x-t)S(t)dt,\quad x\in R, \tag{1.1}$$

где ядра T_1 и T_2 - данные на R функции, удовлетворяющие условиям (консервативности):

$$0\le T_j\in L_1(R),\quad \mu_j\equiv\int_{-\infty}^\infty T_j(x)dx=1, j=1,2, \tag{1.2}$$

были изучены в работах [1]-[2]. В указанных работах, на основе развитого в [3] – [4] общего подхода, а именно, вольтерровской факторизации интегрального оператора и применения нелинейных функциональных уравнений Н. Б. Енгибаряна, были получены достаточные условия разрешимости однородных (и неоднородных) уравнений вида (1.1), (1.2) и изучено асимптотическое поведение их решений в $\pm\infty$. В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если в уравнении (1.1) ядра $T_j (j = 1, 2)$ удовлетворяют условиям (1.2) и одному из следующих условий (a) или (b):*

$$(a) \quad T_j(-x) = T_j(x), x \in R, j = 1, 2;$$

$$(b) \quad \omega_1 \geq 0 \quad \omega_2 \leq 0,$$

где $\omega_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} tT_j(t)dt$, *в случае*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|T_j(t)dt < \infty, j = 1, 2,$$

то это уравнение обладает нетривиальным, неотрицательным, локально-интегрируемым на R решением $S : S \in L_1^{loc}(R)$. Если в условии (b) имеют место строгие неравенства, то указанное решение S суммируемо и ограничено на R : $S \in L_1(R) \cap M(R)$.

В настоящей статье результаты работы [1] по разрешимости уравнения (1.1) для случая (1.2) обобщаются на более широкие классы уравнений (1.1).

1.2 Введем в рассмотрение, определяемые на $R^+ \equiv (0, +\infty)$ функции $S_\pm(x) \stackrel{def}{=} S(\pm x), x > 0$. Тогда уравнение (1.1) можно представить в виде системы:

$$(1.3) \qquad \begin{cases} S_+(x) = \int\limits_0^\infty K_1(x-t)S_+(t)dt + \int\limits_0^\infty \overset{o}{K}_1(x+t)S_-(t)dt, \\ S_-(x) = \int\limits_0^\infty \overset{o}{K}_2(x+t)S_+(t)dt + \int\limits_0^\infty K_2(x-t)S_-(t)dt, \quad x \in R^+, \end{cases}$$

где

$$K_1(x) = T_1(x), K_2(x) = T_2(-x), x \in R;$$
$$\overset{o}{K}_1(x) = T_2(x), \overset{o}{K}_2(x) = T_1(-x), x \in R^+.$$

В работах [4] – [6] исследовалась задача вольтерровской факторизации интегральных операторов, определяемых правой частью системы (1.3), для различных классов систем типа (1.3). Использование результатов этих работ позволило в [1] свести решение системы (1.3) к последовательному решению двух систем вольтерровского типа:

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \varphi_+(x) = \int\limits_0^\infty V_1^-(t)\varphi_+(t+x)dx + \int\limits_0^\infty V_2^-(t+x)\varphi_-(t)dt, \\ \varphi_-(x) = \int\limits_0^\infty V_1^-(t+x)\varphi_+(t)dt + \int\limits_0^\infty V_2^-(t)\varphi_-(t+x)dt, \quad x \in R^+. \end{cases}$$

и

$$(1.5) \qquad \begin{cases} S_+(x) = \varphi_+(x) + \int\limits_0^x V_1^+(x-t)S_+(t)dt, \\ S_-(x) = \varphi_-(x) + \int\limits_0^x V_2^+(x-t)S_-(t)dt, \quad x \in R^+, \end{cases}$$

где ядра $V_1^{\pm}$ и $V_2^{\pm}$ соответствующих операторов определяются из следующих нелинейных систем факторизации (см. [3]-[6]):

$$V_1^{\pm}(x) = T_1(\pm x) + \int_0^{\infty} V_1^{\mp}(t) V_1^{\pm}(x+t)dt, \quad x \in R^+ \tag{1.6}$$

и

$$V_2^{\pm}(x) = T_2(\mp x) + \int_0^{\infty} V_2^{\mp}(t) V_2^{\pm}(x+t)dt, \quad x \in R^+. \tag{1.7}$$

1.3. Вопросы разрешимости нелинейной системы факторизации (уравнений Енгибаряна):

$$\begin{cases} V^+(x) = T(x) + \int\limits_0^{\infty} V^-(t) V^+(x+t)dt, \\ V^-(x) = T(-x) + \int\limits_0^{\infty} V^+(t) V^-(x+t)dt, \quad x \in R^+. \end{cases} \tag{1.8}$$

подробно изучены в работах [3] – [4]. В [3] доказано, в частности, что при

$$0 \leq T \in L_1(R), \quad \mu \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} T(x)dx \leq 1,$$

система (1.8) обладает неотрицательным суммируемым на $R^{\pm}$ решением $(V^+, V^-) \in L_1(R^+) \times L_1(R^+)$, $V^{\pm} \geq 0$, причем

$$\gamma^{\pm} \overset{def}{=} \int_0^{\infty} V^{\pm}(x)dx \leq 1 \quad (1-\gamma^-)\cdot(1-\gamma^+) = 1-\mu. \tag{1.9}$$

В случае $\mu = 1$ хотя бы одна из величин $\gamma^{\pm}$ равна 1. В этом случае справедливо следующее утверждение (см. [4]).

Теорема 1.2. *В консервативном случае $T \geq 0$ и $\mu = 1$ при $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|T(x)dx < \infty$ для решения (V_+, V_-) системы (1.8) имеют место*

a) $\omega = 0 \Leftrightarrow \gamma^{\pm} = 1$; b) $\omega > 0 \Leftrightarrow \gamma^+ = 1, \gamma^- < 1$; c) $\omega < 0 \Leftrightarrow \gamma^+ < 1, \gamma^- = 1$,

где $\omega \overset{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} xT(x)dx$, $\quad \gamma^{\pm} = \int\limits_0^{\infty} V^{\pm}(x)dx$.

В симметрическом случае $T(-x) = T(x)$, $\forall x \in R$ решением системы (1.8) является пара $V_+ = V$, $V_- = V$, где V-решение уравнения

$$V(x) = T(x) + \int_0^{\infty} V(t)V(x+t)dt, \quad x \in R^+, \tag{1.10}$$

и, поэтому, $\gamma^{\pm} = \gamma = 1$, где $\gamma = \int\limits_0^\infty V(x)dx$.

В указанной работе [4] доказано также, что для консервативной системы (1.8) имеют место следующие утверждения:

если $\gamma_- < 1$, то из $\omega^+ \stackrel{def}{\equiv} \int\limits_0^\infty xT(x)dx < \infty$ следует $\int\limits_0^\infty xV^+(x)dx < \infty$, что равносильно включению $F^+ \in L_1(R^+)$, где $F^+(x) \equiv \int\limits_x^\infty V^+(t)dt, \quad x \in R^+$.

Аналогично имеют место:

если $\gamma_+ < 1$, то из $\omega^- \stackrel{def}{\equiv} \int\limits_0^\infty xT(-x)dx < \infty$ следует $F^- \in L_1(R^+)$, где $F^-(x) = \int\limits_x^\infty V^-(t)dt$.

Если же $\gamma_- = 1$, то из $\nu^+ \stackrel{def}{\equiv} \int\limits_0^\infty x^2T(x)dx < \infty$ следует $\int\limits_0^\infty xV^+(x)dx < \infty$, и, следовательно, $F^+ \in L_1(R^+)$ и аналогично, при $\gamma_+ = 1$ из $\nu^- \stackrel{def}{\equiv} \int\limits_0^\infty x^2T(-x)dx < \infty$ следует $\int\limits_0^\infty xV^-(x)dx < +\infty$ и $F^- \in L_1(R^+)$.

1.4. Пусть $E(R^+)$ - одно из пространств $L_p(R^+)$, $p \geq 1$, $M(R^+)$ или $C(R^+)$. Рассмотрим уравнение

$$S^*(x) = g(x) + \int\limits_0^x V(x-t)S^*(t)dt, \quad x \in \mathfrak{R}^+, \tag{1.11}$$

где данные функции g и V удовлетворяют условиям

$$g \in E(R^+), \quad 0 \leq V \in L_1(R^+). \tag{1.12}$$

Это уравнение имеет локально-интегрируемое на R^+ решение S^*, причем $S^* \geq 0$ при $g \geq 0$ (см. [8]). Если $\gamma < 1$ и $g \in E(R^+)$, то, очевидно, $S^* \in E(R^+)$. В случае $\gamma = 1$ и $g \in E(R^+)$ уравнение (1.11) изучалось в [8], [9] (см. также [4]). Доказано, что при $g \in M(R^+)$ имеет место

$$S^*(x) = O(x), \quad \text{при} \quad x \to \infty \tag{1.13}$$

Заметим, что к рассматриваемому типу уравнений относятся уравнения (1.5) относительно искомых функций $S^{\pm}$.

1.5 Вопросы разрешимости уравнения (1.10) в закритическом случае

$$0 \leq T \in L_1(R), \quad \mu > 1, \tag{1.14}$$

рассмотрены в [7]. В указанной работе получены достаточные условия существования комплексного решения (1.10) в случае (1.14). Имеет место следующий результат.

Теорема 1.3. *Пусть T - определенная на R четная функция, удовлетворяющая условию (1.14), а на R^+ также условиям:*

$$T \in C^{(2)}(R^+), \quad T' \le 0, \quad 0 \le T'' \downarrow \text{ на } R^+. \tag{1.15}$$

Тогда уравнение (1.10) обладает комплексным решением вида

$$V(x) = W(x) + i\sigma \int_x^\infty W(t)dt, \quad x \in R^+, \tag{1.16}$$

где действительное число σ определяется из уравнения

$$\int_0^\infty T(t)\cos\sigma t dt = \frac{1}{2}, \tag{1.17}$$

а вещественная функция W - из нелинейного уравнения факторизации

$$W(x) = K(x) + \int_0^\infty W(t)W(x+t)dt, \quad x \in R^+, \tag{1.18}$$

при консервативной функции $K(x)$:

$$K(x) \stackrel{def}{=} T(x) - \sigma \cdot \int_0^\infty T(x+t)\sin\sigma t dt, \quad x \in R^+.$$

(Отметим, что при $\mu > 1$ уравнение (1.17) всегда имеет вещественный корень $\sigma \in R, \sigma \ne 0$).

2. Классификация и разрешимость уравнения (1.1)

2.1. Как было отмечено выше, для решения системы (1.3) (а, следовательно, и уравнения (1.1)) достаточно последовательно решить системы (1.4) и (1.5).

Рассмотрим пару функций

$$\varphi_+(x) = 1 - \int_0^x V_2^-(t)dt, \quad \varphi_-(x) = 1 - \int_0^x V_1^-(t)dt, \quad x \in R^+. \tag{2.1}$$

Непосредственно проверяется справедливость следующей леммы.

Лемма 2.1. *Для пары функций (φ_+, φ_-) из (2.1) имеют место соотношения*

$$\int_0^\infty V_1^-(t)\varphi_+(t+x)dt + \int_0^\infty V_2^-(t+x)\varphi_-(t)dt = \varphi_+(x) - (1-\gamma_1^-)(1-\gamma_2^-), \tag{2.2}$$

$$\int_0^\infty V_1^-(t+x)\varphi_+(t)dt + \int_0^\infty V_2^-(t)\varphi_-(t+x)dt = \varphi_-(x) - (1-\gamma_1^-)(1-\gamma_2^-),$$

где $\gamma_j^- = \int\limits_0^\infty V_j^-(t)dt$, $j = 1, 2$.

Соотношения (2.2) позволяют делать следующее утверждение: если хотя бы одна из величин γ_1^- и γ_2^- равна 1, то пара функций (2.1) будет удовлетворять системе (1.4). Таким образом, в указанном случае решение (S^+, S^-) системы (1.3) можно определить из уравнений

$$(2.3) \qquad S_+(x) = 1 - \int\limits_0^x V_2^-(t)dt + \int\limits_0^x V_1^+(x-t)S_+(t)dt, \quad x \in R^+$$

$$(2.4) \qquad S_-(x) = 1 - \int\limits_0^x V_1^-(t)dt + \int\limits_0^x V_2^+(x-t)S_-(t)dt, \quad x \in R^+.$$

2.2. Мы будем различать следующие классы уравнения (1.1): (α)-класс "дважды консервативных"уравнений, который определяется следующими, альтернативными, условиями на ядра T_j $(j = 1, 2)$:

$$(2.5) \qquad 0 \le T_j \in L_1(R), \quad \mu_j \stackrel{def}{\equiv} \int\limits_{-\infty}^{\infty} T_j(x)dx = 1, \quad (-1)^j\omega_j \ge 0,$$

где $\omega_j \stackrel{def}{\equiv} \int\limits_{-\infty}^{\infty} xT_j(x)dx$ в случае $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|T_j(x)dx < \infty$ $j = 1, 2$; либо условиями

$$(2.6) \qquad T_j(-x) = T_j(x), \quad \forall x \in R, \quad j = 1, 2.$$

(β) - класс "консервативно-диссипативных"уравнений, когда одно из ядер T_j ($j = 1$, либо $j = 2$) удовлетворяет одному из условий (2.5) или (2.6), а второе ядро - T_i (здесь $i + j = 3$) - одному из двух альтернативных условий:

$$(2.7) \qquad 0 \le T_i \in L_1(R), \quad \mu_i < 1,$$

либо

$$(2.8) \qquad \mu_i = 1, \quad (-1)^i\omega_i < 0,$$

где $\omega_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xT_i(x)dx$ при условии $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|T_i(x)dx < \infty$, ($i = 1$, если $j = 2$ и $i = 2$, если $j = 1$).

(γ) - класс "консервативно-закритических"уравнений, когда одно из ядер T_j ($j =$ 1 либо $j = 2$) удовлетворяет одному из условий (2.5) или (2.6), а второе ядро- T_i (здесь $i + j = 3$) - условию

$$(2.9) \quad \mu_i > 1, \quad T_i(-x) = T_i(x), \forall x \in R; \quad T_i \in C^{(2)}(R^+), \quad T_i' \le 0, \quad 0 \le T_i'' \downarrow \text{ на } R^+.$$

Теперь, используя результаты работ [3]-[9] по разрешимости и асимптотическому поведению решений консервативных, диссипативных и закритических уравнений типа Вольтерра, можно получить следующие достаточные условия существования ненулевого решения системы (1.3) и, следовательно, уравнения (1.1).

Теорема 2.1. *Классы* (α), (β), (γ) *уравнений (1.1) обладают ненулевым, вещественным решением* S, *причем поведение функций* $S_{\pm}(x) \equiv S(\pm x)$, $x \in R^+$, *в зависимости от класса и условий, будет следующим:*

Для класса (α): *если каждое из ядер* T_j $(j = 1, 2)$ *удовлетворяет условию (2.5) и* $\omega_j = 0$ *или же условию (2.6), то* $S^{\pm}(x) = O(x)$, *при* $x \to \infty$.

Если же эти функции удовлетворяют условию (2.5), причем $(-1)^i\omega_i > 0$, *то* $S^+ \in M(R^+)$, *при* $j = 1$ *и* $S^- \in M(R^+)$, *при* $j = 2$. *Если при этом* $\int\limits_0^\infty x^2 T_j(x)dx < \infty$, *то* $S^+ \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ *(при* $j = 1$*) и* $S^- \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ *(при* $j = 2$*).*

Для класса (β): *если* T_j $(j = 1$ *или* $j = 2)$ *удовлетворяет условию (2.5) и* $\omega_j = 0$ *или условию (2.6), а* T_i *(здесь* $i + j = 3$*) - одному из условий (2.7) или (2.8), то для функций* $S^{\pm}$ *получаем*

$$S^+(x) = O(x), \quad x \to \infty \quad \text{и} \quad S^-(x) \in M(R^+), \quad \text{при } j = 1,$$
$$S^+(x) \in M(R^+) \quad \text{и} \quad S^-(x) = O(x), \, x \to \infty, \quad \text{при} \quad j = 2.$$

Если существует $\int\limits_0^\infty x^2 T_j(-x)dx < \infty$, *то получаем* $S^- \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ *при* $j = 1$ *и* $S^+ \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ *при* $j = 2$.

Если T_j $(j = 1$ *или* $j = 2)$ *удовлетворяет условию (2.5) причем* $(-1)^j\omega_j > 0$, *а* T_i *(при* $i + j = 3$*) - одному из условий (2.7) или (2.8), то* $S^{\pm} \in M(R^+)$. *Более того, если к тому же* $\int\limits_0^\infty x^2 T_j(-x)dx < \infty$, *то* $S^- \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ *при* $j = 1$ *и* $S^+ \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$, *при* $j = 2$.

Для класса (γ): *если* T_j $(j = 1$ *или* $j = 2)$ *удовлетворяет условию (2.5) и* $\omega_j = 0$ *или условию (2.6), а* T_i *(при* $i + j = 3$*) - условию (2.9), то* $S^{\pm}(x) = O(x)$, *при* $x \to \infty$.

Если T_j $(j = 1$ *или* $j = 2)$ *удовлетворяет условию (2.5) и* $(-1)^j\omega_j > 0$, *а* T_i *(при* $i + j = 3$*) - условию (2.9), то* $S^+ \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ *и* $S^-(x) = O(x)$, $x \to \infty$ *в случае* $j = 1$; $S^+(x) = O(x)$, $x \to \infty$ *и* $S^- \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$, *в случае* $j = 2$.

Доказательство. Из определения классов (α), (β) и (γ) следуют (в силу теоремы 2.1), что хотя бы одна из величин γ_1^- и γ_2^- равна 1. Тогда, согласно вышеизложенному, пара функций (2.1) будет решением системы (1.4). Поэтому решение системы (1.3) и уравнения (1.1) могут быть построены посредством решений (2.3) и (2.4). (Заметим, что эти уравнения относятся к типу уравнений (1.11) и при $V_j^+ \in L(R^+)$, $j = 1, 2$ они обладают решениями $S^{\pm} \in L_1^{loc}(R^+)$).

Для класса (α) в случае, когда T_j $(j = 1,2)$ удовлетворяют условию (2.5) и $\omega_j = 0$ или условию (2.6), имеет место $\gamma_j^{\pm} = 1$. В этом случае в уравнениях (2.3) и (2.4) будем иметь

$$g_j(x) \equiv 1 - \int_0^x V_j^-(t)dt = \int_x^\infty V_j^-(t)dt \in M(R^+), \quad j = 1,2$$

и согласно с (1.13) будем иметь $S^{\pm}(x) = O(x)$, при $x \to \infty$. Если же T_j $(j = 1$ или $j = 2)$ удовлетворяет условию (2.5) и $(-1)^j\omega_j > 0$, то в силу теоремы 1.2 имеем $\gamma_j^- = 1$ и $\gamma_j^+ < 1$. Тогда будем иметь $\int_0^\infty xV_j^-(x)dx < \infty$ и, следовательно, $g \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$. Поэтому в этом случае $S^+ \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ при $j = 1$ и $S^- \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$ при $j = 2$.

Для класса (β) в случае, когда T_j $(j = 1$ или $j = 2)$ удовлетворяет условию (2.5) и $\omega_j = 0$ или условию (2.6), а T_i (при $i + j = 3$) удовлетворяет одному из условий (2.7) или (2.8), имеем $\gamma_j^{\pm} = 1$ и $\gamma_i^{\pm} < 1$. Поэтому для решений уравнений (2.3) и (2.4) будем иметь $S^+(x) = O(x), \quad x \to \infty$ и $S^- \in M(R^+)$, при $j = 1$ и $S^+ \in M(R^+)$ и $S^-(x) = O(x), \quad x \to \infty$, при $j = 2$.

Если T_j $(j = 1$ или $j = 2)$ удовлетворяет условию (2.5) и $(-1)^j\omega_j > 0$, а T_i (при $i + j = 3$) -одному из условий (2.7) и (2.8), то $\gamma_j^- = 1$, $\gamma_j^+ < 1$ и $\gamma_i^{\pm} < 1$. В этом случае будем иметь $S^+ \in M(R^+)$; $S^- \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$, если $j = 1$ и $S^+ \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$; $S^- \in M(R^+)$, если $j = 2$.

Для класса (γ) в случае, если T_j $(j = 1$ или $j = 2)$ удовлетворяет условию (2.5) и $\omega_j = 0$ или условию (2.6), а T_i (где $i + j = 3$) - условию (2.9), имеем $\gamma_j^{\pm} = 1$, причем $\gamma_i^+ = \gamma_i^-$ является комплексным числом вида $\gamma = 1 + i\sigma\rho$, где σ-вещественное решение уравнения (1.17) при $T = T_i$, а $\rho = \int_0^\infty xW(x)dx < \infty$, где W-определяется из (1.18) посредством функции

$$K(x) = T_i(x) - \sigma \cdot \int_0^\infty T_i(x+t)\sin\sigma t dt, \quad x \in R^+.$$

В этом случае в уравнениях (2.3) и (2.4) при $j = 1$ будем иметь

$$S^+(x) = \int_x^\infty W(t)dt - i\sigma\Big(\int_0^x tW(t)dt + x\cdot\int_x^\infty W(t)dt\Big) + \int_0^x V_1^+(x-t)S^+(t)dt \tag{2.10}$$

и

$$S^-(x) = \int_x^\infty V_1^-(t)dt + \int_0^x V_2(x-t)S^-(t)dt, \tag{2.11}$$

где ядро V_2- комплекснозначная функция вида

$$V_2(x) = W(x) + i\sigma \int_x^\infty W(t)dt, \quad x \in R^+.$$

Комплексные решения уравнений (2.10) и (2.11) имеют линейный рост в ∞: $S^\pm(x) = O(x)$, при $x \to \infty$ (см. [3]).

Очевидно, что действительные части этих решений: $\hat{S}^\pm(x) = Re(S^\pm(x))$ будут вещественными решениями системы (1.5) с асимптотикой $\hat{S}^\pm(x) = O(x)$, при $x \to \infty$. Если же T_j ($j = 1$ или $j = 2$) удовлетворяет условию (2.5) и $(-1)^j\omega_j > 0$, а T_i (где $i + j = 3$) - условию (2.9), то имеем $\gamma_j^- = 1$, $\gamma_j^+ < 1$, а $\gamma_i^+ = \gamma_i^- = 1 + i\sigma\rho$, где ρ и σ определены выше. Тогда, при $j = 1$ из уравнения (2.10) получаем

$$\hat{S}^+(x) = \int_x^\infty W(t)dt + \int_0^x V_1(x-t)\hat{S}^+(t)dt, \quad x \in R^+,$$

откуда, с учетом $\gamma_1^+ < 1$ получаем $\hat{S}^+ \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$.
Аналогично, при $j = 2$ получаем $\hat{S}^- \in L_1(R^+) \cap M(R^+)$. □

Замечание 2.1. *Здесь уместно сравнить результаты теорем 1 и 4. В теореме 1 рассмотрены вопросы разрешимости только класса (α) уравнения (1.1). Все утверждения этой теоремы содержатся в первой части теоремы 4. Разрешимости классов (β) и (γ) уравнения (1.1), а также поведение их решений в бесконечности изучены во второй и третей частьях теоремы 4.*

Abstract. The present paper is devoted to the finding conditions of nontrivial (nonzero) solvability of some classes of equations of the form

$$S(x) = \int_0^\infty T_1(x-t)S(t)dt + \int_{-\infty}^0 T_2(x-t)S(t)dt, x \in R,$$

with respect to unknown function S. The asymptotic behavior of the solution S is also studied.

Список литературы

[1] Л. Г. Арабаджян, "О консервативном интегральном уравнении с двумя ядрами", Матем. Заметки РАН, **62**, вып. 3, 323 – 331 (1997).

[2] А. Г. Барсегян, "О решении уравнения свертки с двумя ядрами", Дифференциальные уравнения, **48**, но. 3, 756 – 759 (2012).

[3] Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", Мат. сборник, **97(139)**, но. 1(5), 35 – 58 (1975).

[4] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техн. ВИНИТИ, **22**, ред. Матем. Анализ, 175 – 244 (1984).

[5] Н. В. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки", Дифференциальные уравнения, 26, no. 8, 1442 – 1452 (1990).
[6] А. А. Арутюнян, "О факторизации одного интегрального оператора", Дифференц. и интегральные уравнения, Сборник научных трудов, Ереван, 3 – 11 (1979).
[7] Л. Г. Арабаджян, "Об интегральном уравнении Винера-Хопфа в закритическом случае", Матем. заметки РАН, 76, вып. 1, 11 – 19 (2004).
[8] Р. Беллман, К. Кук, Дифференциально-Разностные уравнения, Москва, Мир (1967).
[9] В. Феллер, Введение в Теорию Вероятностей и Ее Приложения, том 2, Москва, Мир (1984).

Поступила 20 сентября 2016