Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 6, 2017, стр. 77-90

СХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ И АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А. А. ПАХЛЕВАНЯН

Институт математики НАН Армении[1]
E-mail: *apahlevanyan@instmath.sci.am*

Аннотация. Доказывается равномерная сходимость разложения абсолютно непрерывной функции по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля $-y''+q(x)y=\mu y$, $y(0)=0$, $y(\pi)\cos\beta+y'(\pi)\sin\beta=0$, $\beta\in(0,\pi)$ с суммируемым потенциалом $q\in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$. Этот результат используется для получения новых, более точных асимптотических формул для собственных значений и нормировочных постоянных этой задачи.

MSC2010 number: 34B24, 34L05, 34L10, 34L20

Ключевые слова: задача Штурма-Лиувилля; разложение по собственным функциям; асимптотика собственных значений и нормировочных постоянных.

1. Введение и формулировка результатов

Обозначим через $L(q,\alpha,\beta)$ следующую краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$-y''+q(x)y=\mu y\equiv\lambda^2 y,\ x\in(0,\pi),\ \mu\in\mathbb{C}, \tag{1.1}$$

$$y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0,\ \alpha\in(0,\pi], \tag{1.2}$$

$$y(\pi)\cos\beta+y'(\pi)\sin\beta=0,\ \beta\in[0,\pi), \tag{1.3}$$

где q вещественная, суммируемая на $[0,\pi]$ функция (мы пишем $q\in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$). Через $L(q,\alpha,\beta)$ будем обозначать также самосопряженный оператор, порожденный задачей (1.1)–(1.3) в гильбертовом пространстве $L^2[0,\pi]$ (см. [1, 2]). Хорошо известно, что спектр оператора $L(q,\alpha,\beta)$ чисто дискретен и состоит из простых, действительных собственных значений (см. [1] [3]), которые мы обозначаем через $\mu_n(q,\alpha,\beta)$, $n=0,1,2,\dots$, подчеркивая зависимость от q, α и β. Предполагается, что собственные значения μ_n пронумерованы в порядке возрастания:

$$\mu_0(q,\alpha,\beta)<\mu_1(q,\alpha,\beta)<\dots<\mu_n(q,\alpha,\beta)<\dots.$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта No. 16YR–1A017.

Обозначим через $\varphi(x,\mu,\alpha)$ и $\psi(x,\mu,\beta)$ решения уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi(0,\mu,\alpha)=\sin\alpha,\quad \varphi'(0,\mu,\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\psi(\pi,\mu,\beta)=\sin\beta,\quad \psi'(\pi,\mu,\beta)=-\cos\beta.$$

Хорошо известно ([1, 2, 4]), что для фиксированного x, φ, φ', ψ, ψ' являются целыми функциями от μ. Обозначим через $W_{\alpha,\beta}(x,\mu)$ вронскиан решений $\varphi(x,\mu,\alpha)$ и $\psi(x,\mu,\beta)$:

$$W_{\alpha,\beta}(x,\mu):=\varphi(x,\mu,\alpha)\psi'(x,\mu,\beta)-\varphi'(x,\mu,\alpha)\psi(x,\mu,\beta). \tag{1.4}$$

Из формулы Лиувилля для вронскиана следует (см. например, [5]) что $W_{\alpha,\beta}(x,\mu)$ не зависит от x. Легко видеть что функции $\varphi_n(x):=\varphi(x,\mu_n,\alpha)$ и $\psi_n(x):=\psi(x,\mu_n,\beta)$, $n=0,1,2,\ldots$, являются собственными функциями, соответствующими собственному значению μ_n. Так как собственные значения простые, то существуют числа $\beta_n=\beta_n(q,\alpha,\beta)$, $n=0,1,2,\ldots$, такие что

$$\psi_n(x)=\beta_n\varphi_n(x),\ \beta_n\neq 0. \tag{1.5}$$

Квадраты L^2-норм этих собственных функций:

$$a_n=a_n(q,\alpha,\beta)=\int_0^\pi\varphi_n^2(x)\,dx,\quad b_n=b_n(q,\alpha,\beta)=\int_0^\pi\psi_n^2(x)\,dx, \tag{1.6}$$

называются нормировочными постоянными.

Одна из основных теорем спектральной теории дифференциальных операторов (см. [1]) гласит:

Теорема 1.1. ([1, стр. 90]) *Всякая функция из области определения самосопряженного дифференциального оператора разлагается в равномерно сходящийся обобщенный ряд Фурье по собственным функциям этого оператора.*

Этот результат не может быть применен для функций, не принадлежащих области определения самосопряженного дифференциального оператора. В случае оператора Штурма-Лиувилля доказано (см. например, [6]), что при условии $\sin\alpha\neq 0$, $\sin\beta\neq 0$ (т.е. $\alpha,\beta\in(0,\pi)$) равномерная сходимость разложения имеет место для любой абсолютно непрерывной функции, а именно имеет место (см. также [5, 2, 7])

Теорема 1.2. ([6]) *Пусть $q\in L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$, $\alpha,\beta\in(0,\pi)$ и f абсолютно непрерывная функция на $[0,\pi]$. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty}\max_{x\in[0,\pi]}\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}c_n\varphi_n(x)\right|=0,\ c_n=\frac{1}{a_n}\int_0^\pi f(t)\varphi_n(t)dt,$$

где $\varphi_n(x) \equiv \varphi(x, \mu_n(q, \alpha, \beta), \alpha)$.

Первой целью данной работы является доказательство того, что аналогичные результаты имеют место также для задач $L(q, \pi, \beta)$, $\beta \in (0, \pi)$ и $L(q, \alpha, 0)$, $\alpha \in (0, \pi)$, причем при более общем условии $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$:

Теорема 1.3. *Пусть* $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, $\alpha = \pi$, $\beta \in (0, \pi)$ *и* f *абсолютно непрерывная функция на* $[0, \pi]$. *Тогда для любого* $a \in (0, \pi)$

$$\lim_{N\to\infty} \max_{x\in[a,\pi]} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n(x) \right| = 0, \quad c_n = \frac{1}{a_n}\int_0^\pi f(t)\varphi_n(t)dt, \tag{1.7}$$

где $\varphi_n(x) \equiv \varphi(x, \mu_n(q, \pi, \beta), \pi) \equiv \varphi(x, \mu_n, \pi)$.

Теорема 1.4. *Пусть* $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, $\alpha \in (0, \pi)$, $\beta = 0$ *и* f *абсолютно непрерывная функция на* $[0, \pi]$. *Тогда для любого* $b \in (0, \pi)$

$$\lim_{N\to\infty} \max_{x\in[0,b]} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n(x) \right| = 0, \quad c_n = \frac{1}{a_n}\int_0^\pi f(t)\varphi_n(t)dt, \tag{1.8}$$

где $\varphi_n(x) \equiv \varphi(x, \mu_n(q, \alpha, 0), \alpha)$.

Замечание 1.1. *Легко видеть, что улучшить результаты Теорем 1.3 и 1.4 (получить равномерную сходимость рядов в* (1.7) *и* (1.8) *на всем отрезке* $[0, \pi]$ *без дополнительных условий) невозможно. Действительно, для абсолютно непрерывной функции* $f \equiv \frac{\pi}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$, *имеет место тождество (см. например,* [8, формула 37 на стр. 578]*)*

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{n + \frac{1}{2}}, \quad 0 < x < 2\pi,$$

т.е. Теорема 1.3 для нее верна, но если заменить $\max\limits_{x\in[a,\pi]} |\ldots|$ *на* $\max\limits_{x\in[0,\pi]} |\ldots|$, *то теорема перестает быть верной. С другой стороны, если в Теореме 1.3 взять* $f(0) = 0$, *тогда ряд в* (1.7) *сходится равномерно на всем отрезке* $[0, \pi]$. *Аналогичное утверждение верно для Теоремы 1.4, если взять* $f(\pi) = 0$.

Второй целью нашей работы является получение асимптотической формулы для собственных значений задачи $L(q, \pi, \beta)$ при $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ и $\beta \in (0, \pi)$ (т.е. $\sin\beta \neq 0$). Прежде чем сформулировать результат, заметим, что в работе [9] Т. Н. Арутюнян ввел понятие функции $\delta_n(\alpha, \beta)$, которая определяется формулой

$$\delta_n(\alpha, \beta) := \sqrt{\mu_n(0, \alpha, \beta)} - n = \lambda_n(0, \alpha, \beta) - \lambda_n\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \ n \geq 2,$$

и доказал что $-1 \le \delta_n(\alpha,\beta) \le 1$ и $\delta_n(\alpha,\beta)$ является решением следующего трансцендентного уравнения:

$$(1.9)\quad \delta_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{\cos\alpha}{\sqrt{(n+\delta_n(\alpha,\beta))^2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}} - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{\cos\beta}{\sqrt{(n+\delta_n(\alpha,\beta))^2\sin^2\beta+\cos^2\beta}}.$$

Теорема 1.5. *Пусть $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ и пусть $\lambda_n^2(q,\alpha,\beta) = \mu_n(q,\alpha,\beta)$. Тогда*

(a) *имеет место асимптотическое соотношение ($n\to\infty$)*

$$(1.10)\quad \lambda_n(q,\alpha,\beta) = n+\delta_n(\alpha,\beta)+\frac{[q]}{2(n+\delta_n(\alpha,\beta))}+l_n(q,\alpha,\beta)+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где $[q] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt$,

$$l_n(q,\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi(n+\delta_n(\alpha,\beta))}\int_0^\pi q(x)\cos 2(n+\delta_n(\alpha,\beta))x dx,\ \alpha\in(0,\pi),$$

$$(1.11)\quad l_n = l_n(q,\pi,\beta) = -\frac{1}{2\pi(n+\delta_n(\pi,\beta))}\int_0^\pi q(x)\cos 2(n+\delta_n(\pi,\beta))x dx.$$

Оценка остатка $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ в (1.10) равномерна по всем $\alpha,\beta\in[0,\pi]$ и q из ограниченных подмножеств $L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ (мы будем писать $q\in BL^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$).

(b) *Функция l, определенная формулой*

$$(1.12)\quad l(x) = \sum_{n=2}^{\infty} l_n(q,\alpha,\beta)\sin(n+\delta_n(\alpha,\beta))x,$$

абсолютно непрерывна на произвольном отрезке $[a,b]\subset(0,2\pi)$, т.е. $l\in AC(0,2\pi)$.

В работе [10] утверждение (b) теоремы 1.5 было доказано при условии $\alpha,\beta\in(0,\pi)$ и в случае $\alpha=\pi$, $\beta=0$. Мы докажем, что это утверждение верно также при $\alpha=\pi$, $\beta\in(0,\pi)$. Этому посвящен раздел 3. Третьей целью нашей работы является получение асимптотических формул для нормировочных постоянных a_n и b_n (см. (1.6)).

Теорема 1.6. *Для нормировочных постоянных a_n и b_n*

(a) *имеют место следующие асимптотические соотношения ($n\to\infty$):*

$$a_n(q,\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}\left[1+\frac{2s_n(q,\alpha,\beta)}{\pi[n+\delta(\alpha,\beta)]}+r_n\right]\sin^2\alpha+$$

$$+\frac{\pi}{2\left[n+\delta_n(\alpha,\beta)\right]^2}\left[1+\frac{2\,s_n\left(q,\alpha,\beta\right)}{\pi\left[n+\delta\left(\alpha,\beta\right)\right]}+\tilde{r}_n\right]\cos^2\alpha,$$

$$b_n\left(q,\alpha,\beta\right)=\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{2\,s_n\left(q,\alpha,\beta\right)}{\pi\left[n+\delta\left(\alpha,\beta\right)\right]}+p_n\right]\sin^2\beta+$$
$$+\frac{\pi}{2\left[n+\delta_n(\alpha,\beta)\right]^2}\left[1+\frac{2\,s_n\left(q,\alpha,\beta\right)}{\pi\left[n+\delta\left(\alpha,\beta\right)\right]}+\tilde{p}_n\right]\cos^2\beta,$$

где

$$s_n=s_n\left(q,\alpha,\beta\right)=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\pi-t\right)q\left(t\right)\sin 2\left[n+\delta_n\left(\alpha,\beta\right)\right]tdt,$$

$r_n=r_n\left(q,\alpha,\beta\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *и* $\tilde{r}_n=\tilde{r}_n\left(q,\alpha,\beta\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *(та же оценка верна для* p_n *и* $\tilde{p}_n$*), когда* $n\to\infty$*, равномерна по всем* $\alpha,\beta\in[0,\pi]$ *и* $q\in BL^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$.

(b) *Функция* s*, определенная формулой*

$$s\left(x\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{s_n}{n+\delta_n\left(\alpha,\beta\right)}\cos\left[n+\delta_n\left(\alpha,\beta\right)\right]x$$

абсолютно непрерывна на произвольном отрезке $[a,b]\subset(0,2\pi)$*, т.е.* $s\in AC\left(0,2\pi\right)$.

В работе [11] утверждение (b) теоремы 1.6 было доказано при условии $\alpha,\beta\in(0,\pi)$ и в случае $\alpha=\pi$, $\beta=0$. Методами, примененными при доказательстве теоремы 1.5 можно доказать, что утверждение верно также при $\alpha=\pi$, $\beta\in(0,\pi)$.

2. Доказательства теорем 1.3 и 1.4

Мы приведем доказательство для Теоремы 1.3. Теорема 1.4 может быть доказана аналогично.

Доказательство. Для $|\lambda|\to\infty$, имеют место следующие асимптотические формулы ([1, 4, 10])

$$\varphi\left(x,\mu,\pi\right):=\varphi_\pi\left(x,\mu\right)\equiv\varphi_\pi\left(x,\lambda^2\right)=\frac{\sin\lambda x}{\lambda}+O\left(\frac{e^{|Im\lambda|x}}{|\lambda|^2}\right),\tag{2.1}$$

$$\varphi'\left(x,\mu,\pi\right):=\varphi'_\pi\left(x,\mu\right)\equiv\varphi'_\pi\left(x,\lambda^2\right)=\cos\lambda x+O\left(\frac{e^{|Im\lambda|x}}{|\lambda|}\right),\tag{2.2}$$

$$\psi\left(x,\mu,\beta\right):=\psi_\beta\left(x,\mu\right)\equiv\psi_\beta\left(x,\lambda^2\right)=\cos\lambda\left(\pi-x\right)\sin\beta+\frac{\sin\lambda\left(\pi-x\right)}{\lambda}\cos\beta+$$
$$+O\left(\frac{e^{|Im\lambda|(\pi-x)}}{|\lambda|}\right)\sin\beta+O\left(\frac{e^{|Im\lambda|(\pi-x)}}{|\lambda|^2}\right)\cos\beta,\tag{2.3}$$

$$\psi'(x,\mu,\beta) := \psi'_\beta(x,\mu) \equiv \psi'_\beta(x,\lambda^2) = \left(\lambda\sin\lambda(\pi-x) + O\left(e^{|Im\lambda|(\pi-x)}\right)\right)\sin\beta -$$

$$-\left(\cos\lambda(\pi-x) + O\left(\frac{e^{|Im\lambda|(\pi-x)}}{|\lambda|}\right)\right)\cos\beta. \tag{2.4}$$

Из (1.4) и (2.3) следует, что для вронскиана $W_{\pi,\beta}(\mu)$ мы имеем следующую оценку

$$W_{\pi,\beta}(\mu) \equiv W_{\pi,\beta}(\lambda^2) = -\psi_\beta(0,\mu) = -\cos\lambda\pi\sin\beta - \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}\cos\beta + \tag{2.5}$$

$$+O\left(\frac{e^{|Im\lambda|\pi}}{|\lambda|}\right)\sin\beta + O\left(\frac{e^{|Im\lambda|\pi}}{|\lambda|^2}\right)\cos\beta.$$

Обозначим через $\mathbb{Z}_{1/6}$ следующую область комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{Z}_{1/6} = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{n}{2}\right| \geq \frac{1}{6},\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Следующая лемма доказана в [12], методами которые использовались в [13].

Лемма 2.1. *([12]) Если $\lambda \in \mathbb{Z}_{1/6}$, тогда*

$$|\sin\pi\lambda| \geq \frac{1}{7}e^{|Im\lambda|\pi},\ |\cos\pi\lambda| \geq \frac{1}{7}e^{|Im\lambda|\pi}. \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) следует что для достаточно большого $\lambda^* > 0$, существует константа $C_1 > 0$ такая что

$$\left|W_{\pi,\beta}(\lambda^2)\right| \geq C_1 e^{|Im\lambda|\pi}\sin\beta,\ \text{при}\ \lambda \in \mathbb{Z}_{1/6},\ |\lambda| > \lambda^*. \tag{2.7}$$

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$-y'' + q(x)y = \mu y - f(x),\ \ x \in (0,\pi),\ \mu \in \mathbb{C},\ f \in L^1[0,\pi], \tag{2.8}$$

$$y(0) = 0,\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0,\ \ \beta \in (0,\pi). \tag{2.9}$$

Хорошо известно, что решение $y(x,\mu,f)$ краевой задачи (2.8)–(2.9) можно записать в следующей форме (см. например, [1, 7])

$$y(x,\mu,f) = \frac{1}{W_{\pi,\beta}(\mu)}\psi_\beta(x,\mu)\int_0^x f(t)\varphi_\pi(t,\mu)\,dt + \tag{2.10}$$

$$+\frac{1}{W_{\pi,\beta}(\mu)}\varphi_\pi(x,\mu)\int_x^\pi f(t)\psi_\beta(t,\mu)\,dt.$$

Так как φ, ψ и $W_{\pi,\beta}$ являются целыми функциями от μ, то $y(x,\mu,f)$ является мероморфной функцией от μ, с полюсами в нулях функции $W_{\pi,\beta}$ или, что то же самое, в собственных значениях $\mu_n, n = 0,1,2,\ldots$. Поскольку $\dot{W}_{\pi,\beta}(\mu_n) \equiv \frac{d}{d\mu}W_{\pi,\beta}(\mu_n) = \beta_n a_n$ (см. [6, Лемма 1.1.1]), то используя (1.5), мы получаем вычет

$$\operatorname*{Res}_{\mu=\mu_n} y(x,\mu,f) = \frac{1}{a_n}\varphi_\pi(x,\mu_n)\int_0^\pi f(t)\varphi_\pi(t,\mu_n)\,dt. \tag{2.11}$$

Из (2.1), (2.3), (2.7) и (2.10) следует, что существуют положительные числа C, C_2, C_3, C_4 такие что при $\lambda \in \mathbb{Z}_{1/6}$, $|\lambda| > \lambda^*$ имеет место следующая оценка

$$(2.12)\quad \left|y\left(x,\lambda^2,f\right)\right| \leq \frac{\left|\psi_\beta\left(x,\lambda^2\right)\right| \max\limits_{t\in[0,x]}\left|\varphi_\pi\left(t,\lambda^2\right)\right| \int_0^x |f(t)|\,dt}{C_1 e^{|Im\lambda|\pi}\sin\beta} +$$

$$+\frac{\left|\varphi_\pi\left(x,\lambda^2\right)\right| \max\limits_{t\in[x,\pi]}\left|\psi_\beta\left(t,\lambda^2\right)\right| \int_x^\pi |f(t)|\,dt}{C_1 e^{|Im\lambda|\pi}\sin\beta} \leq$$

$$\leq \frac{e^{|Im\lambda|(\pi-x)}\left(\sin\beta+\frac{|\cos\beta|}{|\lambda|}+C_3\frac{\sin\beta}{|\lambda|}+C_4\frac{|\cos\beta|}{|\lambda|^2}\right)}{C_1 e^{|Im\lambda|\pi}\sin\beta}\times$$

$$\times e^{|Im\lambda|x}\left(\frac{1}{|\lambda|}+C_2\frac{1}{|\lambda|^2}\right)\int_0^\pi |f(t)|\,dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{C_1}\int_0^\pi |f(t)|\,dt\left(\frac{1}{|\lambda|}+O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right)\right) \leq \frac{C}{|\lambda|}.$$

Рассмотрим теперь функцию $f \in AC[0,\pi]$. Используя тот факт, что $\varphi_\pi(x,\mu)$ и $\psi_\beta(x,\mu)$ являются решениями (1.1), мы можем переписать представление (2.10) для $y(x,\mu,f)$ в следующем виде (сравните с [6]):

$$(2.13)\quad y(x,\mu,f) = \frac{f(x)}{\mu} + f(0)\frac{\psi_\beta(x,\mu)}{\mu W_{\pi,\beta}(\mu)} + \frac{Z_1(x,\mu,\pi,\beta,f')}{\mu} + \frac{Z_2(x,\mu,\pi,\beta)}{\mu},$$

где

(2.14)

$$Z_1(x,\mu,\pi,\beta,f') = \frac{\psi_\beta(x,\mu)\int_0^x f'(t)\,\varphi_\pi'(t,\mu)\,dt + \varphi_\pi(x,\mu)\int_x^\pi f'(t)\,\psi_\beta'(t,\mu)\,dt}{W_{\pi,\beta}(\mu)},$$

$$(2.15)\quad Z_2(x,\mu,\pi,\beta) = -f(\pi)\,\psi_\beta'(\pi,\mu)\frac{\varphi_\pi(x,\mu)}{W_{\pi,\beta}(\mu)} + y(x,\mu,qf) =$$

$$= f(\pi)\cos\beta\frac{\varphi_\pi(x,\mu)}{W_{\pi,\beta}(\mu)} + y(x,\mu,qf).$$

Покажем, что

$$(2.16)\quad \lim_{\substack{|\lambda|\to\infty\\ \lambda\in\mathbb{Z}_{1/6}}} \max_{x\in[0,\pi]} \left|Z_1(x,\mu,\pi,\beta,f')\right| = 0.$$

Сначала предположим, что f' абсолютно непрерывная функция на $[0,\pi]$. Тогда существует $f''\in L^1[0,\pi]$ и (2.14) можно записать в следующем виде

$$Z_1(x,\mu,\pi,\beta,f')=\frac{\varphi_\pi(x,\mu)}{W_{\pi,\beta}(\mu)}f'(\pi)\sin\beta-$$
$$-\frac{\psi_\beta(x,\mu)\int_0^x f''(t)\varphi_\pi(t,\mu)\,dt+\varphi_\pi(x,\mu)\int_x^\pi f''(t)\psi_\beta(t,\mu)\,dt}{W_{\pi,\beta}(\mu)}.$$

В силу (2.1)–(2.4) и (2.7) мы получаем, что существует число $C>0$, такое что

$$\max_{x\in[0,\pi]}|Z_1(x,\mu,\pi,\beta,f')|\le\frac{C}{|\lambda|},\ \text{при}\ \lambda\in\mathbb{Z}_{1/6},\ |\lambda|>\lambda^*.$$

Отсюда следует (2.16) в случае $f'\in AC[0,\pi]$.

Теперь обратимся к общему случаю $g:=f'\in L^1[0,\pi]$. Зафиксируем $\epsilon>0$ и выберем абсолютно непрерывную функцию g_ϵ, так что

$$\int_0^\pi|g(t)-g_\epsilon(t)|\,dt<\frac{C_1\sin\beta}{16}\epsilon.$$

Тогда, согласно (2.1)–(2.4), (2.7) и (2.14) для $\lambda\in\mathbb{Z}_{1/6}$, $|\lambda|>\lambda^*$, мы имеем

$$\max_{x\in[0,\pi]}|Z_1(x,\mu,\pi,\beta,g)|\le\max_{x\in[0,\pi]}|Z_1(x,\mu,\pi,\beta,g_\epsilon)|+\max_{x\in[0,\pi]}|Z_1(x,\mu,\pi,\beta,g-g_\epsilon)|\le$$
$$\le\frac{C(\epsilon)}{|\lambda|}+\frac{C_1\sin\beta}{16}\epsilon\max_{x\in[0,\pi]}\left(\frac{|\psi_\beta(x,\mu)|\max_{t\in[0,x]}|\varphi'_\pi(t,\mu)|+|\varphi_\pi(x,\mu)|\max_{t\in[0,x]}\left|\psi'_\beta(t,\mu)\right|}{C_1e^{|Im\lambda|\pi}\sin\beta}\right)\le$$
$$\le\frac{C(\epsilon)}{|\lambda|}+\frac{C_1\sin\beta}{16}\epsilon\max_{x\in[0,\pi]}\left(\frac{8e^{|Im\lambda|\pi}}{C_1e^{|Im\lambda|\pi}\sin\beta}\right)\le\frac{C(\epsilon)}{|\lambda|}+\frac{\epsilon}{2}.$$

Легко видеть, что если мы выберем $\lambda^*_\epsilon=\dfrac{2C(\epsilon)}{\epsilon}$, тогда для $\lambda\in\mathbb{Z}_{1/6}$ и $|\lambda|>\lambda^*_\epsilon$ мы имеем $\max\limits_{x\in[0,\pi]}|Z_1(x,\mu,\pi,\beta)|\le\epsilon$. В силу произвольности $\epsilon>0$, мы приходим к (2.16). Теперь оценим $Z_2(x,\mu,\pi,\beta)$ (см. (2.15)). Поскольку $qf\in L^1[0,\pi]$, то оценки в (2.12) верны также для $y(x,\mu,qf)$. Используя (2.1), (2.7), (2.12) и тот факт, что $\sin\beta\ne0$ мы получаем следующие оценки (при $\lambda\in\mathbb{Z}_{1/6}$, $|\lambda|>\lambda^*$):

$$\max_{x\in[0,\pi]}|Z_2(x,\mu,\pi,\beta)|\le\max_{x\in[0,\pi]}\left|f(\pi)\cos\beta\frac{\varphi_\pi(x,\mu)}{W_{\pi,\beta}(\mu)}\right|+\max_{x\in[0,\pi]}|y(x,\mu,qf)|\le\tag{2.17}$$
$$\le\left|f(\pi)\cos\beta\frac{C_5e^{|Im\lambda|\pi}}{|\lambda|\,C_1e^{|Im\lambda|\pi}\sin\beta}\right|+\frac{C_6}{|\lambda|}\le\frac{C_5}{C_1}\frac{|f(\pi)\cot\beta|}{|\lambda|}+\frac{C_6}{|\lambda|}\le\frac{C_7}{|\lambda|},$$

где C_5-C_7 положительные числа. Рассмотрим следующий контурный интеграл

$$I_N(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N}y(x,\mu,f)\,d\mu,$$

где $\Gamma_N = \left\{\mu : |\mu| = \left(N + \frac{3}{4}\right)^2\right\}$ (с обходом против часовой стрелки). С одной стороны, используя теорему Коши о вычетах (см. [14]), из (2.11) мы получаем

$$I_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{a_n} \int_0^\pi f(t)\,\varphi_\pi(t,\mu_n)dt\varphi_\pi(x,\mu_n). \tag{2.18}$$

С другой стороны, из (2.13), (2.16) и (2.17) имеем, что

$$I_N(x) = f(x) + f(0)\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N} \frac{\psi_\beta(x,\mu)}{\mu W_{\pi,\beta}(\mu)}d\mu + \epsilon_N(x), \tag{2.19}$$

где $\epsilon_N(x)$, согласно (2.16) и (2.17), равномерно сходится к 0 :

$$\lim_{N\to\infty} \max_{x\in[0,\pi]} |\epsilon_N(x)| = 0.$$

Без потери общности, будем считать что $\mu = 0$ не является собственным значением задачи $L(q,\pi,\beta)$. В самом деле, из чистой дискретности спектра следует, что существует число c такое, что числа $\mu_n + c \neq 0$, $n = 0,1,2,\ldots$, являются собственными значениями задачи $L(q+c,\pi,\beta)$ с теми же собственными функциями φ_n и нормировочными постоянными a_n, что и у задачи $L(q,\pi,\beta)$. Тогда функция $\dfrac{\psi_\beta(x,\mu)}{\mu W_{\pi,\beta}(\mu)}$ имеет полюсы только первого порядка и используя теорему Коши о вычетах мы можем легко вычислить, что

$$\phi_N(x) := \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N} \frac{\psi_\beta(x,\mu)}{\mu W_{\pi,\beta}(\mu)}d\mu = \operatorname*{Res}_{\mu=0} \frac{\psi_\beta(x,\mu)}{\mu W_{\pi,\beta}(\mu)} + \sum_{n=0}^{N} \operatorname*{Res}_{\mu=\mu_n} \frac{\psi_\beta(x,\mu)}{\mu W_{\pi,\beta}(\mu)} =$$

$$= \frac{\psi_\beta(x,0)}{W_{\pi,\beta}(0)} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\psi_\beta(x,\mu_n)}{\mu_n \dot{W}_{\pi,\beta}(\mu_n)} = \frac{\psi_\beta(x,0)}{W_{\pi,\beta}(0)} + \sum_{n=0}^{N} \frac{\beta_n\varphi_\pi(x,\mu_n)}{\mu_n\beta_n a_n} =$$

$$= \frac{\psi_\beta(x,0)}{W_{\pi,\beta}(0)} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\mu_n a_n}\varphi_n(x). \tag{2.20}$$

Теперь покажем, что последовательность $\phi_N(x)$ сходится к 0 (при $N \to \infty$) равномерно на сегменте $[a,\pi]$, для произвольного $a \in (0,\pi)$.

Так как $\varphi_n(x) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ равномерно на $[0,\pi]$ (см. (2.1)), $\mu_n = \mu_n(q,\pi,\beta) = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2 + O(1)$ (см. [9, Теорема 1 на стр. 286 и асимптотические оценки для $\delta_n(\pi,\beta)$ на стр. 292]) и $a_n = a_n(q,\pi,\beta) = \dfrac{\pi}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left(1+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ (см. [11, Теорема 1.1], стр. 9-10), тогда $\phi_N(x)$ (см. (2.20)) можно записать в следующем виде:

$$\phi_N(x) = \frac{\psi_\beta(x,0)}{W_{\pi,\beta}(0)} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{N} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{N} q_n(x),$$

где $q_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ равномерно на $[0,\pi]$.

Поскольку $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}$, $0 < x < 2\pi$ (см. например, [8, формула (37) на стр. 578]), тогда последовательность $\phi_N(x)$ сходится к непрерывной функции $\phi(x)$ (при $N \to \infty$) равномерно на сегменте $[a,\pi]$, для произвольного $a \in (0,\pi)$.

Теперь, чтобы доказать, что $\phi(x) \equiv 0$, $x \in (0,\pi]$, достаточно показать, что $\phi = 0$ п.в.

Сделав некоторые вычисления, получим:

$$(2.21) \qquad \int_0^\pi \phi(x)\varphi_m(x)\,dx = \frac{1}{W_{\pi,\beta}(0)}\int_0^\pi \psi_\beta(x,0)\varphi_m(x)\,dx + \frac{1}{\mu_m},\ m = 0,1,2,\ldots$$

$$(2.22) \qquad \mu_m \int_0^\pi \psi_\beta(x,0)\varphi_m(x)\,dx = \int_0^\pi \left(\varphi_m(x)\psi_\beta''(x,0) - \varphi_m''(x)\psi_\beta(x,0)\right)dx =$$
$$= \left(\varphi_m(x)\psi_\beta'(x,0) - \varphi_m'(x)\psi_\beta(x,0)\right)\Big|_0^\pi = \psi_\beta(0,0) = -W_{\pi,\beta}(0).$$

Из (2.21) и (2.22) следует

$$\int_0^\pi \phi(x)\varphi_m(x)\,dx = 0,\ m = 0,1,2,\ldots.$$

Поскольку система собственных функций $\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ краевой задачи $L(q,\pi,\beta)$ является полной и ортогональной в $L^2(0,\pi)$, то $\phi = 0$ п.в. Сравнивая этот результат с (2.18), (2.19) и переходя к пределу при $N \to \infty$ в (2.19), мы приходим к (1.7). Теорема 1.3 доказана. □

Замечание 2.1. *Хорошо известно, что одно из доказательств теоремы 1.2 основывается на так называемой теореме о равномерной равносходимости, которая утверждает, что разложение по собственным функциям задачи $L(q,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta \in (0,\pi)$ эквивалентно разложению по собственным функциям задачи $L\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, т.е., $\{\cos nx\}_{n\geq 0}$ (см.* [5, 2, 7]*). Далее можно применить теорему Дирихле-Жордана (см.* [15, стр. 121–122]*) и Теорема 1.2 будет доказана. Тот же подход не может быть применен в нашем случае, а именно: нетрудно установить что разложение по собственным функциям задачи $L(q,\pi,\beta)$,*

$\beta \in (0,\pi)$ *будет эквивалентно разложению по* $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$, $n = 0,1,2,\ldots$, *т.е., по собственным функциям задачи* $L\left(0,\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ *(см.* [5, замечание на стр. 304] *и* [2, замечание на стр. 71]*). С другой стороны, насколько нам известно, нет аналога теоремы Дирихле-Жордана для разложения по системе функций* $\left\{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right\}_{n\geq 0}$ *(по этому поводу см.* [16, Теорема 2.6]*).*

3. Асимптотика собственных значений

Стоит заметить что приведенное в работе [10] доказательство утверждения (b) теоремы 1.5 для случая $\alpha,\beta \in (0,\pi)$ не проходит для случая $\alpha = \pi$, $\beta \in (0,\pi)$. Ниже, используя теоремы 1.3 и 1.4, мы разберем этот случай. Обозначим $\sigma(x) = \int_0^x q(t)\,dt$ и запишем $l_n(q,\pi,\beta)$ (см. (1.11)) в следующей форме:

$$l_n(q,\pi,\beta) = -\frac{\sigma(\pi)\cos 2\pi\delta_n(\pi,\beta)}{2\pi(n+\delta_n(\pi,\beta))} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sigma_1(x)\sin(n+\delta_n(\pi,\beta))\,xdx,$$

где $\sigma_1(x) \equiv \sigma\left(\frac{x}{2}\right)$ абсолютно непрерывная функция на $[0,2\pi]$.

Заметим что единственность решения $\delta_n(\alpha,\beta)$ уравнения (1.9) при $\alpha = \pi$ и $\beta \in [0,\pi)$ можно доказать исходя из того, что arccos является убывающей функцией.

Из (1.9) легко видеть (подробности см. [9]), что для $\beta \in (0,\pi)$ мы имеем

$$\delta_n(\pi,\beta) = \frac{1}{2} + \frac{\cot\beta}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\cot\beta = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.1}$$

и следовательно,

$$\cos 2\pi\delta_n(\pi,\beta) = -1 + d_n,\ \sin 2\pi\delta_n(\pi,\beta) = e_n, \tag{3.2}$$

где $d_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Поэтому, $l(x,\beta)$ (см. (1.12)) можно представить в виде суммы трех функций

$$l(x,\beta) = l_1(x,\beta) + l_2(x,\beta) + l_3(x,\beta),$$

где

$$l_1(x,\beta) = \frac{\sigma(\pi)}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(n+\delta_n(\pi,\beta))\,x}{(n+\delta_n(\pi,\beta))},$$

$$l_2(x,\beta) = -\frac{\sigma(\pi)}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}d_n\frac{\sin(n+\delta_n(\pi,\beta))\,x}{(n+\delta_n(\pi,\beta))}, \tag{3.3}$$

$$l_3(x,\beta) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}f_n\sin(n+\delta_n(\pi,\beta))\,x, \tag{3.4}$$

и $f_n = \int_0^{2\pi} \sigma_1(t) \sin(n + \delta_n(\pi,\beta))\, tdt$.

Поскольку $f_n = \int_0^{\pi} \sigma_1(t) \sin(n + \delta_n(\pi,\beta))\, tdt + \int_{\pi}^{2\pi} \sigma_1(t) \sin(n + \delta_n(\pi,\beta))\, tdt$ и

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sigma_1(t) \sin(n + \delta_n(\pi,\beta))\, tdt = \int_{-2\pi}^{-\pi} -\sigma_1(-t) \sin(n + \delta_n(\pi,\beta))\, tdt =$$

$$= \int_0^{\pi} -\sigma_1(2\pi - t) \sin(n + \delta_n(\pi,\beta))(t - 2\pi)\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \sigma_1(2\pi - t)\left((1 - d_n)\sin(n + \delta_n(\pi,\beta))\, t + e_n \cos(n + \delta_n(\pi,\beta))\, t\right) dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right)\left((1 - d_n)\sin(n + \delta_n(\pi,\beta))\, t + e_n \cos(n + \delta_n(\pi,\beta))\, t\right) dt,$$

то

$$(3.5)\quad f_n = \int_0^{\pi} \left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right)\right) \sin(n + \delta_n(\pi,\beta))\, tdt -$$

$$- d_n \int_0^{\pi} \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \sin(n + \delta_n(\pi,\beta))\, tdt + e_n \int_0^{\pi} \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \cos(n + \delta_n(\pi,\beta))\, t.$$

Следует отметить, что $\delta_n(\alpha,\beta)$ определена только для $n \geq 2$, поэтому мы запишем $\lambda_0(0,\pi,\beta)$, $\lambda_1(0,\pi,\beta)$ и $\lambda_n(0,\pi,\beta) = n + \delta_n(\pi,\beta)$ для всех $n \geq 2$. Учитывая, что система функций

$$\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{\sin \lambda_n(0,\pi,\beta)\, x}{\lambda_n(0,\pi,\beta)}\right\}_{n=0}^{1} \cup \left\{\frac{\sin(n + \delta_n(\pi,\beta))\, x}{n + \delta_n(\pi,\beta)}\right\}_{n=2}^{\infty}$$

является системой собственных функций задачи $L(0,\pi,\beta)$ и применяя Теорему 1.3, получаем

$$(3.6)\quad \sigma\left(\frac{x}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = \sigma_2(x) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\int_0^{\pi} \left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right)\right) \sin(n + \delta_n(\pi,\beta))\, tdt}{\int_0^{\pi} \sin^2(n + \delta_n(\pi,\beta))\, tdt} \sin(n + \delta_n(\pi,\beta))\, x$$

где ряд сходится равномерно на произвольном отрезке $[a,\pi] \subset (0,\pi]$ и

$$\sigma_2(x) := \sum_{n=0}^{1} \frac{\int_0^{\pi} \left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right) + \sigma\left(\pi - \frac{t}{2}\right)\right) \sin \lambda_n(0,\pi,\beta)\, tdt}{\int_0^{\pi} \sin^2 \lambda_n(0,\pi,\beta)\, tdt} \sin \lambda_n(0,\pi,\beta)\, x$$

Используя (3.1) и (3.2), мы вычисляем

$$(3.7)\quad \int_0^\pi \sin^2\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)tdt =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)}{4\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)} = \frac{\pi}{2} - \frac{e_n}{4\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)}.$$

Из (3.7), легко видеть, что

$$\frac{1}{\int_0^\pi \sin^2\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)tdt} = \frac{2}{\pi}+g_n, \quad \text{где } g_n = \frac{2e_n}{\pi\left(2\pi\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)-e_n\right)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Теперь мы можем записать (3.6) в форме

$$(3.8)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right)+\sigma\left(\pi-\frac{t}{2}\right)\right)\sin\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)tdt\sin\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)x =$$

$$= -\sum_{n=2}^{\infty}g_n\int_0^\pi\left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right)+\sigma\left(\pi-\frac{t}{2}\right)\right)\sin\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)tdt\sin\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)x+$$

$$+\sigma\left(\frac{x}{2}\right)+\sigma\left(\pi-\frac{x}{2}\right)-\sigma_2(x),$$

где ряды сходятся равномерно на произвольном отрезке $[a,\pi]\subset(0,\pi]$.

Из (3.4), (3.5), (3.8) следует что для произвольного $x\in(0,\pi]$

$$(3.9)\quad l_3(x,\beta) = \frac{1}{4}\left(-\sigma\left(\frac{x}{2}\right)-\sigma\left(\pi-\frac{x}{2}\right)+\sigma_2(x)\right)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n}{4}\int_0^\pi\left(\sigma\left(\frac{t}{2}\right)+\sigma\left(\pi-\frac{t}{2}\right)\right)\sin\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)tdt\sin\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)x+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}d_n\int_0^\pi\sigma\left(\pi-\frac{t}{2}\right)\sin\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)tdt\sin\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)x-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}e_n\int_0^\pi\sigma\left(\pi-\frac{t}{2}\right)\cos\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)tdt\sin\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)x.$$

Поскольку $d_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $e_n\int_0^\pi\sigma\left(\pi-\frac{t}{2}\right)\cos\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)tdt = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $g_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, тогда $l_3\in AC(0,\pi]$. С другой стороны, так как (см. (3.4) и (3.2))

$$l_3(2\pi-x,\beta) = l_3(x,\beta)+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}d_nf_n\sin\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)x-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}e_nf_n\cos\left(n+\delta_n(\pi,\beta)\right)x,$$

то $l_3 \in AC[\pi, 2\pi)$ и следовательно $l_3 \in AC(0, 2\pi)$. Поскольку $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n + \delta_n(\pi, \beta))x}{(n + \delta_n(\pi, \beta))}$ абсолютно непрерывная функция на $(0, 2\pi)$ (см. [12, 10]), тогда $l_1 \in AC(0, 2\pi)$. Поскольку $d_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, то ряд в (3.3) и его первая производная сходятся абсолютно и равномерно на $[0, 2\pi]$ и, следовательно $l_2 \in AC[0, 2\pi]$. Утверждение (b) теоремы 1.5 при $\alpha = \pi$, $\beta \in (0, \pi)$ доказано. □

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору Т. Н. Арутюняну за постановку задачи и внимание к работе.

Abstract. Uniform convergence of the expansion of an absolutely continuous function for eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem $-y'' + q(x)y = \mu y$, $y(0) = 0$, $y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0$, $\beta \in (0, \pi)$ with summable potential $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ is proved. This result is used to obtain more precise asymptotic formulae for eigenvalues and norming constants of this problem.

Список литературы

[1] М. А. Наймарк, Линейные Дифференциальные Операторы, Наука, Москва (1969).
[2] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Введение в Спектральную Теорию, Наука, Москва (1970).
[3] В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и Их Приложения, Наукова Думка, Киев (1977).
[4] Т. Н. Арутюнян, М. С. Овсепян, "О решениях уравнения Штурма-Лиувилля", Математика в Высшей Школе, 1, no. 3, 59–71 (2005).
[5] E. Coddington, N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw Hill Book Company, New York (1955).
[6] В. А. Юрко, Введение в Теорию Обратных Спектральных Задач, Физматлит, Москва (2007).
[7] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака, Наука, Москва (1988).
[8] I. N. Bronshtein, K. A. Semendyayev, Handbook of Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York (1998).
[9] T. N. Harutyunyan, "The dependence of the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem on boundary conditions", Matematicki Vesnik, 60, no. 4, 285 – 294 (2008).
[10] Т. Н. Арутюнян, "Асимптотика собственных значений задачи Штурма-Лиувилля", Известия НАН Армении, Математика, 51, no. 4, 3 – 16 (2016).
[11] T. N. Harutyunyan, A. A. Pahlevanyan, "On the norming constants of the Sturm-Liouville problem", Вестник Казанского государственного энергетического университета, no. 3(31), 7 – 26 (2016).
[12] Т. Н. Арутюнян, Функция Собственных Значений Семейства Операторов Штурма-Лиувилля и Дирака, Докторская диссертация, Ереван (2010).
[13] J. Pöschel, E. Trubowitz, Inverse Spectral Theory, Academic Press, Inc., Boston, MA (1987).
[14] Б. В. Шабат, Введение в Комплексный Анализ, Наука, Москва (1985).
[15] Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Физматгиз, Москва (1961).
[16] A. Iserles, S. P. Nørsett, "From high oscillation to rapid approximation I: Modified Fourier expansions", IMA Journal of Numerical analysis, 28, no. 4, 862 – 887 (2008).

Поступила 10 сентября 2017