

ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОЕКТОРЫ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, ГАРМОНИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

А. И. ПЕТРОСЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: apetrosyan@ysu.am

Аннотация. В статье вводятся банаховы пространства гармонических функций $h_\infty(\varphi)$, $h_0(\varphi)$, и $h^1(\eta)$, заданных в единичном шаре в $\mathbb{R}^n$. Эти пространства зависят от весовой функции φ и весовой меры η . Для заданной функции φ из достаточно широкого класса решается задача двойственности, т.е. строятся меры η такие, что $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$ и $h_0(\varphi)^* \sim h^1(\eta)$.

MSC2010 number: 30H05, 46E15.

Ключевые слова: банахово пространство; гармоническая функция; весовая функция; весовая мера; ограниченный проектор; двойственность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Положительная, непрерывная и убывающая на $[0, 1]$ функция φ называется весовой функцией, если $\lim_{r \rightarrow 1} \varphi(r) = 0$ при $r \rightarrow 1$. Конечная, положительная борелевская мера η на $[0, 1]$ называется весовой мерой, если ее носитель не сосредоточен ни на каком подинтервале $[0, \rho)$, $0 < \rho < 1$.

Пусть $h_\infty(\varphi)$ — банахово пространство комплекснозначных функций u , гармонических в единичном круге, с нормой $\|u\|_\varphi = \sup\{u(z)\varphi(|z|) : |z| < 1\}$ и $h_0(\varphi)$ — замкнутое подпространство функций u , для которых $|u(z)| = o(1/\varphi(|z|))$ при $|z| \rightarrow 1$.

В работе [1] показано, что $h_\infty(\varphi)$ изометрически изоморфно второму сопряженному пространству к $h_0(\varphi)$. В [2] была поставлена и решена задача двойственности: найти весовую меру η на $[0, 1]$ такую, что

$$h^1(\eta) = \{v \in L^1(d\eta(r) d\theta) : v \text{ гармонично в } |z| < 1\}$$

является промежуточным сопряженным, т.е. $h^1(\eta) \sim h_0(\varphi)^*$ и $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$. В указанной работе [2] рассмотрен случай $n = 2$. Как известно, всякая гармоническая в единичном круге $|z| < 1$ функция h разлагается в ряд по степеням z и $\bar{z}$, так как вещественнозначная гармоническая функция является вещественной

частью голоморфной функции. Это позволяет применять методы комплексного анализа.

Настоящая статья посвящена решению задачи двойственности для многомерного случая, а именно, для функций, гармонических в единичном шаре в $\mathbb{R}^n$, $n > 2$. Многомерный случай имеет специфику в том смысле, что не приходится говорить о связи между гармоническими и голоморфными функциями, и вместо степеней z и $\bar{z}$ мы имеем дело со сферическими гармониками.

Ниже применяются следующие обозначения:

$\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство;

$B = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < 1\}$ — открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$;

S — его граница, являющаяся единичной сферой;

σ — борелевская мера на S , инвариантная относительно вращений и нормированная условием $\sigma(S) = 1$;

$h(B)$ — линейное пространство всех комплекснозначных, гармонических в B функций.

Символы C , с всюду будут обозначать положительные постоянные, возможно, различные в разных местах.

2. ПРОСТРАНСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\varphi(r)$ — весовая функция и η — весовая мера. Продолжим φ в B , положив $\varphi(x) = \varphi(|x|)$. Для $u \in h(B)$ положим

$$\|u\|_{\varphi} = \sup \{|u(x)|\varphi(x): x \in B\} = \sup \{M_{\infty}(u, r)\varphi(r): r < 1\},$$

$$\|u\|_{\eta} = \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)| d\eta(r) d\sigma(\zeta) = \int_0^1 M_1(u, r) d\eta(r),$$

где $M_{\infty}(u, r) = \sup\{|u(x)|: |x| = r\}$, $M_1(u, r) = \int_S |u(r\zeta)| d\sigma(\zeta)$

Определим пространства гармонических функций:

$$h_{\infty}(\varphi) = \{u \in h(B): \|u\|_{\varphi} < \infty\},$$

$$h_0(\varphi) = \{u \in h(B): \lim_{r \rightarrow 1} M_{\infty}(u, r)\varphi(r) = 0\},$$

$$h^1(\eta) = \{u \in h(B): \|u\|_{\eta} < \infty\}.$$

Очевидно, $h_0(\varphi) \subset h_{\infty}(\varphi)$, так что можно использовать норму $\|u\|_{\varphi}$ для $h_0(\varphi)$.

Следующие два предложения посвящены основным свойствам этих пространств.

Предложение 2.1. Пусть h означает любое из трех введенных выше пространств. Тогда:

- (i) если b — ограниченное подмножество h , то функции из b равномерно ограничены на каждом компактном подмножестве B ;
- (ii) сходящаяся в h последовательность сходится равномерно на компактных подмножествах B ;
- (iii) для любой точки $x \in B$ значение в x является ограниченным линейным функционалом на h ;
- (iv) h — базисово пространство;
- (v) $h_0(\varphi)$ является замкнутым подпространством $h_\infty(\varphi)$.

Доказательство. В [3, Предложение 2] для $u \in h^1(\eta)$ получено неравенство, имеющее в наших обозначениях вид

$$|u(x)| \leq \frac{2^n}{(1-|x|)^{n-1}} \left(\int_{(1+|x|)/2}^1 |d\eta(t)| \right)^{-1} \|u\|_\eta, \quad x \in B.$$

Отсюда для $u \in h^1(\eta)$ следуют (i) и (iii). Для $h_\infty(\varphi)$ и $h_0(\varphi)$ эти утверждения очевидны. Легко видеть, что (ii) следует из (i).

Докажем (iv). Очевидно, пространства h являются линейными нормированными, поэтому достаточно доказать их полноту. Докажем полноту $h^1(\eta)$. Пусть последовательность u_j фундаментальна в $h^1(\eta)$ и пусть K — компактное подмножество B . Из (ii) следует, что существует константа $C = C(K)$ такая, что

$$\max_{x \in K} |u(x)| \leq C \|u\|_\eta$$

для всех $u \in h^1(\eta)$. Следовательно,

$$|u_j(x) - u_k(x)| \leq C \|u_j - u_k\|_\eta$$

для любых $x \in K$ и j, k . Поскольку u_j фундаментальна в $h^1(\eta)$, то отсюда следует, что на компактных подмножествах B последовательность u_j равномерно сходится к некоторой функции u , гармонической в B . Из фундаментальности u_j следует, что

$$\int_S \int_0^1 |u_j(r\zeta)| d\eta(r) d\sigma(\zeta) = \|u_j\|_\eta \leq \|u_j - u_k\|_\eta + \|u_k\|_\eta \leq C.$$

Из теоремы Фату следует, что

$$\|u\|_\eta = \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)| d\eta(r) d\sigma(\zeta) \leq C,$$

т. е. $u \in h^1(\eta)$.

Случай $h_\infty(\varphi)$ проще. Пусть $u_j \in h_\infty(\varphi)$. На компактном подмножестве K шара функция $\varphi(x)$ отграничена от нуля, поэтому

$$|u_j(x) - u_k(x)| \leq C\varphi(x)|u_j(x) - u_k(x)| = C\|u_j - u_k\|_\varphi, \quad x \in K.$$

Если u_j фундаментальна в $h_\infty(\varphi)$, то отсюда следует, что на компактных подмножествах B последовательность u_j равномерно сходится к некоторой функции u , гармонической в B . Нетрудно видеть, что u_j сходится к u и в норме $h_\infty(\varphi)$. (v) следует из (iv). $\square$

Предложение 2.2. Пусть $u_\varrho(x) = u(\varrho x)$, $0 \leq \varrho \leq 1$.

- (i) Если $u \in h^1(\eta)$ или $u \in h_0(\varphi)$, то $u_\varrho \rightarrow u$ по норме, при $\varrho \rightarrow 1$;
- (ii) если $u \in h_\infty(\varphi)$, то $\|u_\varrho\|_\varphi \leq \|u\|_\varphi$ и $u_\varrho \rightarrow u$ поточечно в B ;
- (iii) гармонические полиномы плотны в $h^1(\eta)$ и в $h_0(\varphi)$;
- (iv) каждая функция $u \in h_\infty(\varphi)$ является поточечным пределом некоторой ограниченной по норме последовательности гармонических полиномов.

Доказательство. (i) Для $h_0(\varphi)$ это очевидно. Рассмотрим случай $h^1(\eta)$. Для любого числа $\delta \in (0, 1)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|u_\varrho - u\|_\eta &= \int_0^1 \int_S |u(\varrho r\zeta) - u(r\zeta)| d\sigma(\zeta) d\eta(r) \leq \\ &\leq \int_0^\delta \int_S |u(\varrho r\zeta) - u(r\zeta)| d\sigma(\zeta) d\eta(r) + \\ (2.1) \quad &+ \int_\delta^1 \int_S (|u(\varrho r\zeta)| + |u(r\zeta)|) d\sigma(\zeta) d\eta(r). \end{aligned}$$

Ввиду того, что функция $|u|$ субгармонична, ее среднее по единичной сфере

$$m(\varrho) = \int_S |u(\varrho r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)$$

является неубывающей величиной от ϱ : $m(\varrho) \leq m(1)$. Отсюда и из (2.1)

$$\|u_\varrho - u\|_\eta \leq \int_0^\delta \int_S |u(\varrho r\zeta) - u(r\zeta)| d\sigma(\zeta) d\eta(r) + 2 \int_\delta^1 \int_S |u(r\zeta)| d\sigma(\zeta) d\eta(r),$$

откуда видно, что выбрав число δ , а затем ϱ достаточно близкими к 1, правую часть этого неравенства можно сделать сколь угодно малой.

(ii) следует из принципа максимума и непрерывности. Как известно, функция u_ϱ , гармоническая в окрестности $\bar{B}$, равномерно на $\bar{B}$ приближается гармоническими полиномами. Используя этот факт, получаем (iii) и (iv). $\square$

Отметим еще, что в [4] даны соответствующие свойства пространств голоморфных функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$.

3. Воспроизводящее ядро

Рассмотрим сперва случай плоскости (т. е. $n = 2$). Если функция u гармонична в единичном круге B_2 , то, как известно, она является вещественной частью

голоморфной в B_2 функции f . Так как $u = (f + \bar{f})/2$, то из разложения в ряд Тейлора получаем разложение для u , имеющее вид

$$(3.1) \quad u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta},$$

где $0 \leq r < 1$. В многомерном случае (т. е. $n > 2$) такой связи между гармоническими и голоморфными функциями нет, но существует аналог разложения (3.1), в котором роль экспонент $e^{ik\theta}$ играют сферические гармоники. В связи с этим напомним некоторые факты из теории гармонических функций (см., например, [5]).

Через $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ обозначается множество всех комплекснозначных однородных гармонических полиномов степени k в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Сужение полинома из $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ на сферу S называется сферической гармоникой степени k . Множество всех сферических гармоник степени k обозначается через $\mathcal{H}_k(S)$.

Всякая сферическая гармоника $p \in \mathcal{H}_k(S)$ единственным образом продолжается до однородного гармонического полинома, который мы будем обозначать той же буквой p .

$\mathcal{H}_k(S)$ является конечномерным замкнутым подпространством гильбертова пространства $L^2(S)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_S u(\zeta) \overline{v(\zeta)} d\sigma(\zeta).$$

Пусть точка $\xi \in S$ фиксирована. Функционал $\Lambda: \mathcal{H}_k(S) \rightarrow \mathbb{C}$, определяемый как значение в точке ξ : $\Lambda(p) = p(\xi)$, очевидно, линейен. Из общей теории гильбертовых пространств следует, что существует элемент $Z_k(\cdot, \xi) \in \mathcal{H}_k(S)$ такой, что для всех $p \in \mathcal{H}_k(S)$

$$p(\xi) = \int_S p(\zeta) Z_k(\zeta, \xi) d\sigma(\zeta).$$

Функция Z_k называется зональной гармоникой порядка k с полюсом в точке ξ . Она вещественна и удовлетворяет условию $Z_k(\zeta, \xi) = \overline{Z_k(\xi, \zeta)}$.

Пусть φ — весовая функция и η — весовая мера. Введем меру $d\mu = \varphi d\eta$ и меру $d\mu'$, определенную равенством

$$(3.2) \quad \int_0^1 f(r) d\mu'(r) = \int_0^1 f(r^2) d\mu(r), \quad f \in C[0, 1].$$

Очевидно, обе эти меры борелевские, конечные, положительные и их носители не сосредоточены ни на каком подинтервале $[0, \rho)$, $0 < \rho < 1$.

Ниже используется полярная форма точек $x, y \in \mathbb{R}^n$, т. е. $x = \rho\xi$, $y = r\zeta$, где $\xi, \zeta \in S$, $\rho > 0$, $r > 0$. Рассмотрим функцию

$$(3.3) \quad R_\mu(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^{-1} \rho^k r^k Z_k(\xi, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^{-1} Z_k(x, y),$$

где $t_k = \int_0^1 r^k d\mu(r) = \int_0^1 r^{2k} d\mu(r)$. Во втором равенстве в (3.3) через $Z_k(x, y)$ обозначено продолжение $Z_k(\xi, \zeta)$ по каждой переменной со сферы на все пространство $\mathbb{R}^n$ как однородного гармонического полинома степени k , поэтому $\rho^k r^k Z_k(\xi, \zeta) = Z_k(x, y)$.

Мы будем пользоваться соотношением двойственности между $h_\infty(\varphi)$ и $h^1(\eta)$, которое задается билинейной формой:

$$(3.4) \quad \langle u, v \rangle = \int_S \int_0^1 u(r\zeta) \overline{v(r\zeta)} \varphi(r) d\eta(r) d\sigma(\zeta), \quad u \in h_\infty(\varphi), \quad v \in h^1(\eta).$$

Следующее предложение утверждает, что $\langle u(\cdot), R_\mu(x, \cdot) \rangle = u(x)$ для всех $u \in h_\infty(\varphi) \cup h^1(\eta)$. В этом случае говорят, что функция $R_\mu(x, y)$ является воспроизводящим ядром для билинейной формы (3.4).

Предложение 3.1. а) При фиксированной точке $x \in B$ функция $R_\mu(x, y)$ гармонична в шаре $\{y: |y| < |x|^{-1}\}$.

б) Функция $R_\mu(x, y)$ является воспроизводящим ядром для билинейной формы (3.4), т. е. для всех $u \in h_\infty(\varphi) \cup h^1(\eta)$

$$(3.5) \quad \langle u(\cdot), R_\mu(x, \cdot) \rangle = u(x).$$

Доказательство. Как известно (см. [5, Theorem 5.33]),

$$(3.6) \quad |Z_k(\xi, \zeta)| \leq d_k \leq Ck^{n-2}, \quad \text{для всех } \xi, \zeta \in S,$$

где d_k — размерность пространства $\mathcal{H}_k(S)$, C — абсолютная константа. Так как мера μ' не равна нулю ни в какой окрестности 1, то

$$t_k \geq \int_s^1 r^k d\mu'(r) \geq s^k \int_s^1 d\mu'(r), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда следует, что $t_k^{-1} = O(s^{-k})$, $k \rightarrow \infty$, для каждого $0 < s < 1$. Отсюда и из (3.6) следует, что ряд в правой части (3.3) сходится абсолютно и равномерно на множестве $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}: |x||y| \leq q, 0 < q < 1\}$, откуда и следует утверждение а).

С учетом того, что $\varphi d\eta = d\mu$, из (3.4) следует, что (3.5) является интегральным представлением: для всякой функции $u \in h_\infty(\varphi)$ или $u \in h^1(\eta)$

$$(3.7) \quad u(x) = \int_S \int_0^1 u(r\zeta) R_\mu(x, r\zeta) d\mu(r) d\sigma(\zeta).$$

Имеем

$$\|u\|_\mu = \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)| d\mu(r) d\sigma(\zeta) = \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)| \varphi(r) d\eta(r) d\sigma(\zeta),$$

откуда

$$(3.8) \quad \|u\|_\mu \leq \|u\|_\varphi \int_0^1 d\eta(r) \leq C \|u\|_\varphi$$

и

$$(3.9) \quad \|u\|_\mu \leq \max \varphi(r) \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)| d\eta(r) d\sigma(\zeta) \leq C \|u\|_\eta.$$

Отсюда следует, что если $u \in h_\infty(\varphi) \cup h^1(\eta)$, то $u \in h^1(\mu)$. Для функций же из $h^1(\mu)$ (в несколько иных обозначениях) формула (3.7) доказана в [3, Theorem 1], откуда и следует утверждение б). $\square$

Предложение 3.2. Пусть $\mathfrak{L}(R_\mu(x, \cdot))$ — линейная оболочка множества функций $\{R_\mu(x, \cdot), x \in B\}$. Тогда $\mathfrak{L}(R_\mu(x, \cdot))$ плотна в $h^1(\eta)$ и в $h_0(\varphi)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $h^1(\eta)$, для $h_0(\varphi)$ доказательство аналогично. Согласно теореме Хана–Банаха, достаточно показать, что если $\Phi \in h^1(\eta)^*$ и $\Phi(R_\mu(x, \cdot)) = 0$ для всех $x \in B$, то Φ аннулирует все $h^1(\eta)$.

Так как $R_\mu(x, y)$ гармонична в $|y| < |x|^{-1}$, ряд (3.3) этой функции сходится в $\bar{B}$ равномерно и, следовательно, также и по норме $h^1(\eta)$. Поэтому

$$(3.10) \quad \Phi(R_\mu(x, \cdot)) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^{-1} \Phi(Z_k(x, \cdot))$$

для всякой точки $x \in B$.

Пусть $\{e_1^{(k)}, \dots, e_{d_k}^{(k)}\}$ ортонормальный базис в $\mathcal{H}_k(S)$. Тогда $Z_k(x, y) = \sum_{j=1}^{d_k} \bar{e}_j^{(k)}(x) e_j^{(k)}(y)$. Имеем

$$(3.11) \quad \Phi(Z_k(x, \cdot)) = \sum_{j=1}^{d_k} c_j^{(k)} \bar{e}_j^{(k)}(x),$$

где $c_j^{(k)} = \Phi(e_j^{(k)})$. Таким образом, $\Phi(Z_k(x, \cdot)) \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ и (3.10) является однородным разложением функции $\Phi(R_\mu(x, \cdot))$ на однородные полиномы. Покажем, что из равенства $\Phi(R_\mu(x, \cdot)) = 0$ следует $\Phi(Z_k(x, \cdot)) = 0$, $k = 0, 1, \dots$. Зафиксируем $\zeta \in S$ и рассмотрим сужение функции $\Phi(R_\mu(x, \cdot))$ на прямую $x = r\zeta$, $0 \leq r < 1$. Имеем

$$\Phi(R_\mu(r\zeta, \cdot)) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^{-1} \Phi(Z_k(r\zeta, \cdot)) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^{-1} \Phi(Z_k(\zeta, \cdot)) r^k \equiv 0$$

для всех $0 \leq r < 1$. По теореме единственности для коэффициентов степенного ряда одной переменной, $\Phi(Z_k(\zeta, \cdot)) = 0$ (т. к. $t_k^{-1} \neq 0$), $k = 0, 1, \dots$. Отсюда и из (3.11)

$$\Phi(Z_k(\zeta, \cdot)) = \sum_{j=1}^{d_k} c_j^{(k)} \bar{e}_j^{(k)}(\zeta) = 0, \quad \zeta \in S, \quad k = 0, 1, \dots,$$

откуда в силу линейной независимости системы $\{\bar{e}_j^{(k)}\}_{j=1}^{d_k}$ следует, что $c_j^{(k)} = 0$ $j = 1, \dots, d_k$ и для всех $k = 0, 1, \dots$. Значит, Φ аннулирует все гармонические полиномы, так как всякий гармонический полином является конечной линейной комбинацией $e_j^{(k)}$. Согласно пункту (iii) Предложения 2.2, Φ аннулирует все пространство $h^1(\eta)$. $\square$

Для весовой меры η обозначим через $L^1(d\eta d\sigma)$ и $L^\infty(d\eta d\sigma)$ банаховы пространства комплексзначных функций в B , которые интегрируемы и, соответственно, существенно ограничены и измеримы относительно меры $d\eta d\sigma$. Норму в этих пространствах обозначим, соответственно, через $\|\cdot\|_\eta$ и $\|\cdot\|_\infty$. Пусть, далее $C_0(B)$ — банахово пространство комплексзначных непрерывных на $\bar{B}$ функций, обращающихся в нуль на S , с суп-нормой. Как известно, двойственным (сопряженным) к $C_0(B)$ является $M(B)$ — пространство комплексных конечных борелевских мер в B , с нормой полной вариации. Мы отождествляем $L^1(d\eta d\sigma)$ с абсолютно непрерывными относительно $d\eta d\sigma$ мерами.

Следующая теорема является основной.

Теорема 3.1. Пусть φ — весовая функция, η — весовая мера и R_μ — соответствующее воспроизводящее ядро (3.3). Рассмотрим линейные интегральные операторы

$$(Tf)(x) = \int_S \int_0^1 R_\mu(x, r\zeta) f(r\zeta) d\eta(r) d\sigma(\zeta) \quad f \in L^\infty(d\eta d\sigma),$$

$$(S\nu)(x) = \int_B R_\mu(x, y) \varphi(y) d\nu(y) \quad \nu \in M(B).$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $\|R_\mu(x, \cdot)\|_\eta \leq \frac{c}{\varphi(x)}$, $x \in B$.
- (ii) T является ограниченным оператором из $L^\infty(d\eta d\sigma)$ в $h_\infty(\varphi)$.
- (iii) S является ограниченным оператором из $M(B)$ в $h^1(\eta)$.
- (iv) $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$.
- (v) $h_0(\varphi)^* \sim h^1(\eta)$.

Доказательство. Непосредственно из определения оператора T следует, что из (i) вытекает (ii). В самом деле,

$$\begin{aligned} |(Tf)(x)| &\leq \|f\|_{\infty} \int_S \int_0^1 |R_{\mu}(x, r\zeta)| d\eta(r) d\sigma(\zeta) \\ &= \|f\|_{\infty} \|R_{\mu}(x, \cdot)\|_{\eta} \leq \|f\|_{\infty} \frac{c}{\varphi(x)}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\|Tf\|_{\varphi} \leq c\|f\|_{\infty}$.

Из теоремы Фубини следует, что из (i) вытекает также (iii). В самом деле,

$$\begin{aligned} \|S\nu\|_{\eta} &= \int_B \left| \int_B R_{\mu}(r\zeta, y) \varphi(y) d\nu(y) \right| d\eta(r) d\sigma(\zeta) \\ &\leq \int_B \left(\int_B |R_{\mu}(r\zeta, y)| d\eta(r) d\sigma(\zeta) \right) \varphi(y) d|\nu|(y) \\ &\leq \int_B \frac{c}{\varphi(y)} \varphi(y) d|\nu|(y) = c\|\nu\|. \end{aligned}$$

Докажем, что из (iii) следует (v). Условие (v) означает, что каждый элемент из $h^1(\eta)$ может быть отождествлен с линейным функционалом на $h_0(\varphi)$ посредством двойственного соотношения (3.4), а точнее, если для заданной функции $v \in h^1(\eta)$ определить функционал $l_v(u) = \langle u, v \rangle$, $u \in h_0(\varphi)$, то $l_v \in h_0(\varphi)^*$. Обратно, для каждого функционала $l \in h_0(\varphi)^*$ должна существовать единственная функция $v \in h^1(\eta)$ такая, что $l = l_v$. Кроме того, нормы $\|l_v\|$ и $\|v\|_{\eta}$ эквивалентны.

В самом деле, согласно неравенству Гельдера,

$$|l_v(u)| = |\langle u, v \rangle| \leq \|v\|_{\eta} \|u\|_{\varphi}.$$

Таким образом, $l_v \in h_0(\varphi)^*$ и $\|l_v\| \leq \|v\|_{\eta}$. Осталось доказать, что существует константа c такая, что всякий функционал $l \in h_0(\varphi)^*$ представляется в виде $l = l_v$, где $v \in h^1(\eta)$ и $\|v\|_{\eta} \leq c\|l\|$.

Отождествляя $u \in h_0(\varphi)$ с функцией $u\varphi \in C_0(B)$, мы можем рассматривать $h_0(\varphi)$ как подпространство $C_0(B)$. Из теоремы Хана-Банаха следует, что существует мер $\nu \in M(B)$ такая, что $\|l\| = \|\nu\|$ и $l(u) = \int_B u(y)\varphi(y) d\nu(y)$. Таким образом,

$$l(R_{\mu}(x, \cdot)) = \int_B R_{\mu}(x, y) \varphi(y) d\nu(y) = (S\nu)(x).$$

Пусть $v = S\nu$. Согласно (iii), $v \in h^1(\eta)$ и $\|v\| \leq \|S\| \|\nu\| = \|S\| \|l\|$. Далее, по Предложению 3.1, $l_v(R_{\mu}(x, \cdot)) = \langle R_{\mu}(x, \cdot), v \rangle = v(x) = (S\nu)(x) = l(R_{\mu}(x, \cdot))$. Таким образом, функционалы l и l_v совпадают на линейной оболочке $\mathcal{L}(R_{\mu}(x, \cdot))$ множества функций $\{R_{\mu}(x, \cdot), x \in B\}$. По Предложению 3.2, $l = l_v$. Единственность следует также из Предложения 3.2, так как v определяется воспроизводящим ядром.

Аналогично доказывается, что из (ii) следует (iv). Только на этот раз нужно использовать двойственность пространств $L^1(d\eta d\sigma)$ и $L^\infty(d\eta d\sigma)$ вместо двойственности $C_0(B)$ и $M(B)$.

Пусть, далее, выполнено (iv). Применив теорему Хана-Банаха, будем иметь

$$\begin{aligned} \|R_\mu(x, \cdot)\|_\eta &\leq c \sup \{ |\langle u, R_\mu(x, \cdot) \rangle| : u \in h_\infty(\varphi), \|u\|_\varphi \leq 1 \} \\ &= c \sup \{ |u(x)| : u \in h_\infty(\varphi), \|u\|_\varphi \leq 1 \} \leq \frac{c}{\varphi(x)}, \quad x \in B. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что из (v) следует (i). $\square$

Непосредственно из определения воспроизводящего ядра следует, что если S ограничен, то он является ограниченным проектором из $M(B)$ на подпространство $h^1(\eta)$.

Рассмотрим оператор T . Если $u \in h_\infty(\varphi)$, то $T(u\varphi) = u$. Это следует из того, что ядро R_μ воспроизводящее. Предположим, что T ограничен. Тогда $\|u\|_\varphi \leq \|T\| \|u\varphi\|_\infty$. Следовательно, $\varphi h_\infty(\varphi)$ можно рассматривать как замкнутое подпространство $L^\infty(d\eta d\sigma)$. Таким образом, если T ограничен, то оператор φT осуществляет ограниченное проектирование из $L^\infty(d\eta d\sigma)$ на подпространство $\varphi h_\infty(\varphi)$.

4. Двойственность

В этом разделе мы рассматриваем задачу двойственности для широкого класса весовых функций φ . Теорема 3.1, по существу, сводит задачу двойственности к оценке (i) воспроизводящего ядра, проверить которую легче, чем соотношения (iv) и (v).

Пусть функция $\psi(t)$ положительна, непрерывно дифференцируема, монотонно возрастает к $+\infty$ на $[0, \infty)$ и удовлетворяет следующим трем условиям:

- I. $\Delta^p \left[\frac{1}{\psi(k)} \right] \geq 0$, $k, p = 0, 1, 2, \dots$
- II. Существуют $a > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что $\psi(t)/t^a \searrow 0$ для $t > t_0$, при $t \rightarrow \infty$.
- III. Существует константа $c > 0$ такая, что

$$|\Delta^2 \psi(k)| \leq -c \frac{\Delta^1 \psi(k)}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь использовано стандартное обозначение разности порядка p

$$\Delta^p f(k) = \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} f(k+j).$$

Лемма 4.1. [2, Лемма 1] Пусть функция $\psi(t)$ положительна, непрерывна, монотонно возрастает на $[0, \infty)$ и удовлетворяет условию II. Тогда существуют константы c, C такие, что для $0 \leq r < 1$

$$\frac{c}{1-r} \psi\left(\frac{1}{1-r}\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) r^k \leq \frac{C}{1-r} \psi\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

Лемма 4.2. Пусть функция $\psi(t)$ положительна, непрерывна, монотонно возрастает на $[0, \infty)$ и удовлетворяет условиям II и III. Пусть

$$R(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) Z_k(x, y).$$

Тогда

$$\int_S R(\rho\xi, r\zeta) d\sigma(\zeta) \leq C \psi\left(\frac{1}{1-\rho r}\right).$$

Доказательство. Применяя преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} R(\xi, r\zeta) &= \sum_{k=0}^q \psi(k) Z_k(\xi, r\zeta) = \sum_{k=0}^q \psi(k) r^k Z_k(\xi, \zeta) \\ (4.1) \quad &= \sum_{k=0}^{q-1} (\Delta^1 \psi(k) r^k) D_k(\xi, \zeta) + \psi(q) r^q D_q(\xi, \zeta), \end{aligned}$$

где $D_k(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^k Z_m(\xi, \zeta)$.

Из (3.6) следует, что $|D_q(\xi, \zeta)| \leq C(q+1)q^{n-2}$. С учетом этого неравенства и условия II, будем иметь

$$|\psi(q) r^q D_q(\xi, \zeta)| \leq C r^q (q+1) q^{a+n-2}.$$

Отсюда следует, что при $q \rightarrow \infty$ последний член в правой части (4.1) стремится к нулю и мы получаем

$$R(\xi, r\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta^1 \psi(k) r^k) D_k(\xi, \zeta).$$

Еще раз применив преобразование Абеля, получим

$$R(\xi, r\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta^2 \psi(k) r^k) (k+1) F_k(\xi, \zeta),$$

где $F_k(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^k D_m(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^k (k+1-m) Z_m(\xi, \zeta)$. Используя тождество

$$\Delta^2(\psi(k) r^k) = [(1-r)^2 \psi(k) + 2r(1-r) \Delta^1 \psi(k) + r^2 \Delta^2 \psi(k)] r^k,$$

получаем оценку

$$|R(\xi, r\zeta)| \leq (1-r)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \psi(k) r^k F_k(\xi, \zeta) + \\ + 2(1-r) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (-\Delta^1 \psi(k)) r^{k+1} F_k(\xi, \zeta) + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 \psi(k) r^{k+2}| F_k(\xi, \zeta).$$

Далее, поскольку $Z_m(\xi, \cdot)$ является однородным гармоническим полиномом степени m , то имеем

$$(4.2) \quad \int_S Z_m(\xi, \zeta) d\sigma(\zeta) = Z_m(\xi, 0) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m \geq 1. \end{cases}$$

Учитывая, что $F_k(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^k (k+1-m) Z_m(\xi, \zeta)$, из (4.2) получим

$$\int_S F_k(\xi, \zeta) d\sigma(\zeta) = k+1.$$

Поэтому

$$(4.3) \quad \int_S |R(\xi, r\zeta)| d\sigma(\zeta) \leq (1-r)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \psi(k) r^k + \\ + 2(1-r) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (-\Delta^1 \psi(k)) r^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 \psi(k) r^{k+2}|.$$

Применяя Лемму 4.1 к функции $(x+1)\psi(x)$, имеем

$$(4.4) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \psi(k) r^k \leq \frac{c}{(1-r)^2} \psi\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Для $n > x_0$ из II следует

$$\frac{\psi(n+\varepsilon) - \psi(n)}{(n+1)^a} - \frac{\psi(n)}{n^a} + \frac{\psi(n)}{(n+1)^a} \leq 0.$$

Далее, $\psi(n+1) - \psi(n) \leq \psi(n)[(1+1/n)^a - 1] \leq c\psi(n)/n$, т. е.

$$-\Delta^1 \psi(n) \leq c \frac{\psi(n)}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Отсюда и из Леммы 4.1

$$(4.5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (-\Delta^1 \psi(k)) r^{k+1} \leq \frac{c}{1-r} \psi\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Применяя условие III, затем суммируя по частям и еще раз применяя Лемму 4.1, будем иметь

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 \psi(k) r^{k+2}| &\leq c \sum_{k=0}^{\infty} ((-\Delta^1 \psi(k)) r^{k+2}) \\ &\leq cr(1-r) \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k) r^k - c\psi(0)r^2 \leq c\psi \left(\frac{1}{1-r} \right). \end{aligned}$$

Из (4.3)–(4.6) следует

$$\int_S R(\xi, r\zeta) d\sigma(\zeta) \leq C\psi \left(\frac{1}{1-r} \right).$$

Учитывая, что $R(\rho\xi, r\zeta) = R(\xi, \rho r\zeta)$, отсюда получаем утверждение леммы. $\square$

Теперь мы в состоянии доказать основную теорему о двойственности.

Теорема 4.1. Пусть φ — весовая функция вида $\varphi(r) = \frac{1}{\psi(1/(1-r))}$, где $\psi(t)$ положительна, непрерывно дифференцируема, монотонно возрастает к ∞ на $[0, \infty)$ и удовлетворяет условиям I, II и III. Тогда существует весовая мера такая, что $h_0(\varphi)^* \sim h^1(\eta)$ и $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$ относительно двойственного соотношения (3.4).

Доказательство. Для каждого целого числа $m > 1$ построим весовую меру η_m , которая удовлетворяет заключению теоремы. Зафиксируем m и заметим, что вместе с ψ условиями I, II и III удовлетворяет также и ψ^m . Проверяется это элементарно. Из условия I следует, что существует положительная конечная борелевская мера μ'_m на $[0, 1)$ такая, что

$$\psi(k)^{-m} = \int_0^1 r^k d\mu'_m(r), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для этого достаточно применить известный критерий разрешимости проблемы моментов Хаусдорфа для последовательности $f(k)$, а именно: $\Delta^p f(k) \geq 0$, $k, p = 0, 1, 2, \dots$ (см. [6, стр. 97, Теорема 2.6.4]). Заметим, что носитель μ'_m не сосредоточен ни на каком подинтервале $[0, \rho)$, $0 < \rho < 1$, так как в противном случае $\psi(k)^m$ имел бы экспоненциальный рост, что противоречило бы условию II. Определим μ_m согласно (3.2), т.е.

$$\int_0^1 f(r) d\mu'_m(r) = \int_0^1 f(r^2) d\mu_m(r), \quad f \in C[0, 1],$$

и положим $d\eta_m(r) = \psi(1/(1-r)) d\mu_m(r)$. Для того, чтобы η_m была бы весовой мерой, остается показать, что она конечна. Из Предложения 3.1 следует, что

воспроизводящее ядро, ассоциированное с φ и η_m , имеет вид

$$R_m(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k)^m Z_k(x, y).$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать оценку (i) Теоремы 3.1 для R_m , т. е.

$$(4.7) \quad \int_S \int_0^1 |R_m(x, r\zeta)| d\eta_m(r) d\sigma(\zeta) \leq \frac{c}{\varphi(x)}, \quad x \in B.$$

Более того, из (4.7) при $x = 0$ следует, что мера $d\eta_m$ конечна.

Применение Леммы 4.2 для ψ^m сводит (4.7) к неравенству

$$(4.8) \quad \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{1-\rho r}\right)^m d\eta_m(r) \leq c\psi\left(\frac{1}{1-\rho}\right), \quad 0 \leq \rho < 1,$$

доказательство которого приведено в [2, Theorem 4]. □

В заключение приведем примеры функций $\psi(x)$, удовлетворяющих условиям Теоремы 4.1:

$$\psi(x) = (x+1)^\alpha, \quad \psi(x) = [\ln(x+2)]^\alpha, \quad \psi(x) = [\ln \ln(x+4)]^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Заметим, что весовые функции $\varphi(x)$, которым здесь соответствуют $\psi(x) = [\ln(x+2)]^\alpha$ и $\psi(x) = [\ln \ln(x+4)]^\alpha$, не являются нормальными.

Abstract. The paper studies the Banach spaces $h_\infty(\varphi)$, $h_0(\varphi)$, and $h^1(\eta)$ of harmonic functions over the unit ball in $\mathbb{R}^n$. These spaces depend on a weight function φ and a weight measure η . For a given function φ from a sufficiently broad class of functions, we solve the duality problem. that is, we construct measures η such that $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$ and $h_0(\varphi)^* \sim h^1(\eta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. A. Rubel and A. L. Shields, "The second duals of certain spaces of analytic functions", J. Austral. Math. Soc., **11**, 276 – 280 (1970).
- [2] A. L. Shields, D. L. Williams, "Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of harmonic functions", J. Reine Angew. Math., **299** – **300**, 256 – 279 (1978).
- [3] A. I. Petrosyan, "On weighted classes of harmonic functions in the unit ball of $\mathbb{R}^n$ ", Complex Variables, **50**, no. 12, 953 – 966 (2005).
- [4] А. И. Петросян, "Ограниченные проекторы в пространствах функций, голоморфных в единичном шаре", Известия НАН Армении, Математика, **46**, no. 5, 53 – 64 (2011).
- [5] Sheldon Axler, Paul Bourdon, Wade Ramey, Harmonic Function Theory, Springer-Verlag, New York, Inc. (2001).
- [6] Н. И. Ахизер, Классическая Проблема Моментов и Некоторые Вопросы Анализа, Связанные с Нею, Москва (1961).

Поступила 27 мая 2016