Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 6, 2017, стр. 12 – 24.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ ДЛЯ МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Г. А. КАРАПЕТЯН

Российско-Армянский университет[1]
E-mail: *garnik_karapetyan@yahoo.com*

Аннотация. Работа является продолжением работы [1], где с помощью специального интегрального представления функций доказываются теоремы вложения для мультианизотропных функциональных пространств. В отличие от отмеченной работы здесь изучается случай, когда вполне правильный многоугольник имеет произвольное количество вершин анизотропности.

MSC2010 number: 32Q40.

Ключевые слова: теорема вложения; мультианизотропное пространство; вполне правильный многоугольник; интегральное представление.

Введение

В данной работе интегральные представления и теоремы вложения, которые в работе [1] были доказаны для функций, принадлежащих мультианизотропному функциональному пространству с одной вершиной анизотропности, обобщаются для случая, когда вполне правильный многоугольник имеет произвольное количество вершин анизотропности. Теоремы вложения впервые изучал С. Л. Соболев в [2]. В дальнейшем эти результаты были обобщены другими математиками по разным направлениям. Отметим из них работы [3] – [6] и монографию [7].

1. Ядра интегрального представления и их свойства

Пусть $\mathbb{R}^2$ – двумерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}^2_+$ – множество двумерных мультииндексов, т.е. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2_+$, если α_1, α_2 целые неотрицательные числа. Для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{Z}^2_+$ и $t > 0$ введем следующие обозначения: $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}$, $t^\eta = (t^{\eta_1}, t^{\eta_2})$, $D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2)$; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}$ есть обобщенная производная по С.Л.Соболеву. Для некоторого набора мультииндексов обозначим через $\mathfrak{N}$ наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все

[1]Работа выполнена в рамках тематического финансирования РАУ из средств МОН РФ и при поддержке тематического финансирования комитета науки при министерстве образования и науки РА (код проекта SCS є15T-1A197).

точки данного набора. Многоугольник $\mathfrak{N}$ называется вполне правильным, если имеет вершину в начале координат и на всех координатных осях, а внешние нормали всех некоординатных сторон имеют положительные компоненты. Пусть $\alpha^0 = (l_1, 0), \alpha^1, \dots, \alpha^M = (0, l_2)$ есть вершины вполне правильного многоугольника $\mathfrak{N}$. Соответствующую некоординатную внешнюю нормаль стороны, проходящей через точки α^i, α^{i+1}, обозначим μ^{i+1} $(i = 0, 1, \dots, M-1)$, где уравнение соответствующей стороны дается формулой $(\mu^{i+1}, \alpha) = 1$ $(i = 0, 1, \dots, M-1)$. Как и в работе [1], с помощью вершин многоугольника $\mathfrak{N}$ введем следующий многочлен: $P(\nu, \xi) = \left(\nu \cdot \xi^{\alpha^0}\right)^{2k} + \left(\nu \cdot \xi^{\alpha^1}\right)^{2k} + \dots + \left(\nu \cdot \xi^{\alpha^M}\right)^{2k}$, где $\nu > 0$ произвольный параметр и обозначим

$$
\begin{aligned}
&G_0(\xi, \nu) = e^{-P(\nu,\xi)}, \\
&G_{1,j}(\xi, \nu) = 2k\left(\nu \cdot \xi^{\alpha^i}\right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)}, (j = 0, 1, \dots, M).
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Пусть $\hat{G}_0(t, \nu)$, $\hat{G}_{1,j}(t, \nu)$ $(j = 0, 1, \dots, M)$ есть преобразования Фурье соответствующих функций G_0 и $G_{1,j}$ $(j = 0, 1, \dots, M)$. Очевидно, что G_0, $G_{1,j}$ $(j = 0, 1, \dots, M)$ и их преобразования Фурье принадлежат классу $S = S(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим через $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ точку пересечения линий $(\alpha, \mu^1) = 1$ и $(\alpha, \mu^M) = 1$. Пусть $(\theta, 0)$ и $(0, \sigma)$ такие точки, что $\theta\mu_1^M = 1$ и $\sigma\mu_2^1 = 1$, а N такое четное число, что $N\gamma_1$, $N\gamma_2$, $N\theta$, $N\sigma$ – четные числа. Тогда для ядер $\hat{G}_0, \hat{G}_{1,j}$ $(j = 0, 1, \dots, M)$ имеет место следующая лемма (аналог леммы 1.1 работы [1]).

Лемма 1.1. *Для любого мультииндекса $m = (m_1, m_2)$ существуют постоянные числа $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2)$ такие, что для любого $\nu : 0 < \nu < 1$ имеют место неравенства*

(1.2)
$$\left|D^m \hat{G}_{1,j}(t, \nu)\right| \le \nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,M}(|\mu^i| + (m,\mu^i))} \cdot \frac{a_1|\ln\nu| + a_2}{1 + \nu^{-N}(t_1^{N\gamma_1} t_2^{N\gamma_2} + t_1^{N\theta})} \quad \text{при } \gamma_1 < \gamma_2,$$

(1.3)
$$\left|D^m \hat{G}_{1,j}(t, \nu)\right| \le \nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,M}(|\mu^i| + (m,\mu^i))} \cdot \frac{b_1|\ln\nu| + b_2}{1 + \nu^{-N}(t_1^{N\gamma_1} t_2^{N\gamma_2} + t_2^{N\sigma})} \quad \text{при } \gamma_1 > \gamma_2,$$

(1.4)
$$\left|D^m \hat{G}_{1,j}(t, \nu)\right| \le \nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,M}(|\mu^i| + (m,\mu^i))} \cdot$$
$$\cdot \frac{c_1|\ln\nu| + c_2}{\left(1 + \nu^{-N}\left((t_1 t_2)^{N\gamma} + t_1^{N\theta}\right)\right)\left(1 + \nu^{-N}\left((t_1 t_2)^{N\gamma} + t_2^{N\sigma}\right)\right)} \quad \text{при } \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma.$$

Аналогичные неравенства имеют место и для $\hat{G}_0(t, \nu)$.

Доказательство. Для доказательства сначала изучим поведение интеграла

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} e^{-P(\nu,\xi)} d\xi_1 d\xi_2$$

в зависимости от $\nu : 0 < \nu < 1$.

Рассмотрим точку α^1. Если $\frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то после преобразования $\xi = \nu^{-\mu^1}\eta$, получим

$$I \leq C\nu^{-(|\mu^1|+(m,\mu^1))}.$$

$$\cdot \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} e^{-\eta_1^{2kl_1} - \eta_1^{2k\alpha_1^1} \eta_2^{2k\alpha_2^1} - \nu^{2k\left(1-(\alpha^2,\mu^1)\right)} \eta_1^{2k\alpha_1^2} \eta_2^{2k\alpha_2^2} \ldots - \ldots \nu^{2k\left(1-(l_2,\mu_2^1)\right)} \eta_2^{2kl_2}} d\eta_1 d\eta_2$$

$$\leq C\nu^{-(|\mu^1|+(m,\mu^1))}.$$

$$\cdot \int\limits_0^\infty d\eta_1 \int\limits_0^\infty \eta_1^{m_1 - \frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} - m_2 \frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1}} e^{-\eta_1^{2kl_1}} e^{-\left(\eta_1^{\frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1}} \eta_2\right)^{2k\alpha_2^1}} \left(\eta_1^{\frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1}} \eta_2\right)^{m_2} d\left(\eta_1^{\frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1}} \eta_2\right)$$

$$\leq C\,\nu^{-(|\mu^1|+(m,\mu^1))} \int\limits_0^\infty t^{m_2} e^{-t^{2k\alpha_2^1}} dt \int\limits_0^\infty \eta_1^{m_1 - \frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} - m_2 \frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1}} e^{-\eta_1^{2kl_1}} d\eta_1 \leq C\,\nu^{-(|\mu^1|+(m,\mu^1))},$$

так как $m_1 - \frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} - m_2 \frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} > -1$.

Если же $\frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то рассмотрим последнюю некоординатную сторону. При $\frac{\alpha_1^{M-1}}{\alpha_2^{M-1}} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$, после преобразования $\xi = \nu^{-\mu^M}\eta$, получим аналогично предыдущему случаю, что $I \leq C\nu^{-(|\mu^M|+(m,\mu^M))}$.

Пусть теперь $\frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$, $\frac{\alpha_1^{M-1}}{\alpha_2^{M-1}} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$ (случай равенства изучим отдельно), тогда рассмотрим следующую точку α^2. Если $\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то возьмем сторону, проходящую через точки α^1 и α^2 (т.е. рассмотрим внешнюю нормаль μ^2), а если $\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то рассмотрим следующую точку α^3. Так как по предположению $\frac{\alpha_1^M}{\alpha_2^M} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то обязательно найдутся точки α^i и α^{i+1} $(i = 0, 1, \ldots, M-1)$ из вершин многоугольника $\mathfrak{N}$ такие, что

$$\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i} > \frac{m_1+1}{m_2+1}, \quad \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} < \frac{m_1+1}{m_2+1}. \tag{1.5}$$

Докажем, что $I \leq C\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))}$, где μ^{i+1} – нормаль стороны, проходящей через точки α^i и α^{i+1}. Для этого в интеграле I сделав замену переменных $\xi = \nu^{-\mu^{i+1}}\eta$, получим

$$I \leq C\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} e^{-\eta_1^{\alpha_1^i} \eta_2^{\alpha_2^i} - \eta_1^{\alpha_1^{i+1}} \eta_2^{\alpha_2^{i+1}}} d\eta_1 d\eta_2.$$

Докажем, что существуют такие числа K и L ($K, L > -1$), что

$$\eta_1^{m_1-\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}\eta_2^{m_2-\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}} = \left(\eta_1\eta_2^{\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}}\right)^K \left(\eta_2\eta_1^{\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}\right)^L.$$

Относительно K и L имеем систему

$$\begin{cases} m_1 - \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} = K + \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}L \\ m_2 - \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i} = \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}K + L \end{cases},$$

откуда, согласно (1.5)

$$K = \frac{m_1 - (1+m_2)\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} + \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}{1 - \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}} > -1,$$

(1.6)

$$L = \frac{m_2 - (1+m_1)\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i} + \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}{1 - \frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}} > -1.$$

Исходя из этого, в интеграле I сделав замену переменных $t = \eta_1\eta_2^{\alpha_2^i/\alpha_1^i}$, $\tau = \eta_2\eta_1^{\alpha_1^{i+1}/\alpha_2^{i+1}}$, получим

$$I \le C\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))}\int_0^\infty\int_0^\infty t^K e^{-t^{\alpha_1^i}}\tau^L e^{-\tau^{\alpha_2^{i+1}}}\,dt d\tau \le C\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))}.$$

Так как $K, L > -1$, то интегралы сходятся.

Теперь изучим случай равенства. Пусть

(1.7) $$\frac{\alpha_1^{i-1}}{\alpha_2^{i-1}} > \frac{m_1+1}{m_2+1},\ \frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i} = \frac{m_1+1}{m_2+1},\ \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} < \frac{m_1+1}{m_2+1},\ (i = 1, \dots, M-1).$$

При $i = 1$ для $\alpha^0 = (l_1, 0) = (\alpha_1^0, \alpha_2^0)$ имеем, что $\frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} < \frac{m_2+1}{m_1+1}$, поэтому будем считать, что $\frac{\alpha_1^0}{\alpha_2^0} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$. Аналогично, для точки $\alpha^M = (0, l_2) = (\alpha_1^M, \alpha_2^M)$ имеем $\frac{\alpha_1^M}{\alpha_2^M} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$.

Разделим I на следующие интегралы:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$= \int_0^{\nu^{-\mu_1^i}} d\xi_1 \int_0^{\nu^{-\mu_2^i}} d\xi_2 + \int_0^{\nu^{-\mu_1^i}} d\xi_1 \int_{\nu^{-\mu_2^i}}^\infty d\xi_2 + \int_{\nu^{-\mu_1^i}}^\infty d\xi_1 \int_0^{\nu^{-\mu_2^i}} d\xi_2 + \int_{\nu^{-\mu_1^i}}^\infty d\xi_1 \int_{\nu^{-\mu_2^i}}^\infty d\xi_2.$$

Оценим каждое слагаемое отдельно. В I_1 сделав замену переменных $\xi = \nu^{-\mu^i}\eta$, получим

$$I_1 = \nu^{-(|\mu^i|+(m,\mu^i))} \int_0^1 \int_0^1 \eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2} e^{-P\left(\nu,\nu^{-\mu^i}\eta\right)} d\eta_1 d\eta_2 \le C\nu^{-(|\mu^i|+(m,\mu^i))},$$

а в I_2 сделав замену переменных $\xi = \nu^{-\mu^{i+1}}\eta$, получим

$$I_2 \le C\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))} \int_0^{\nu^{\mu_1^{i+1}-\mu_1^i}} \int_{\nu^{\mu_2^{i+1}-\mu_2^i}}^{\infty} \eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1^i}\eta_2^{2k\alpha_2^i}} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1^{i+1}}\eta_2^{2k\alpha_2^{i+1}}} d\eta_1 d\eta_2$$

$$= C\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))}.$$

$$\cdot \int_0^{\nu^{\mu_1^{i+1}-\mu_1^i}} \int_{\nu^{\mu_2^{i+1}-\mu_2^i}}^{\infty} \left(\eta_1\eta_2^{\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}}\right)^K e^{-\left(\eta_1\eta_2^{\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}}\right)^{2k\alpha_1^i}} \eta_2^{\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}} \frac{1}{\eta_2} e^{-\left(\eta_1^{\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}\eta_2\right)^{2k\alpha_2^{i+1}}} d\eta_1 d\eta_2,$$

где K определяется формулой (1.6). После замены переменных $t = \eta_1\eta_2^{\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}}$, $\tau = \eta_1^{\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}\eta_2$, получим

(1.8)

$$I_2 \le C\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))} \int_0^{\infty} e^{-t^{2k\alpha_1^i}} t^K dt \int_{\nu^{(\mu_2^{i+1}-\mu_2^i)\left(1-\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}\right)} t^{\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}}^{\infty} \frac{e^{-\tau^{2k\alpha_2^{i+1}}}}{\tau} d\tau,$$

так как $\eta_1 = t\eta_2^{-\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}}$, то $\tau = t^{\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}\eta_2^{1-\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}}$. Пусть $\mu_2^{i+1} \le \mu_2^i$, тогда имеем

$$\tau \ge t^{\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}} \nu^{(\mu_2^{i+1}-\mu_2^i)\left(1-\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}\right)} \ge t^{\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}.$$

Последнее неравенство следует из того, что $\nu < 1$, $\mu_2^{i+1} \le \mu_2^i$, $\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i} < 1$ (т.к. $\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$, $\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i} = \frac{m_2+1}{m_1+1}$, то $\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i} < 1$). В итоге получим, что

$$I_2 \le C\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))} \int_0^{\infty} e^{-t^{2k\alpha_1^i}} t^K dt \int_{t^{\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}} \frac{e^{-\tau^{2k\alpha_2^{i+1}}}}{\tau} d\tau \le C\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))},$$

так как $K > -1$, а интеграл $\int_0^{\infty} e^{-t^{2k\alpha_1^i}} t^K \ln t \, dt$ сходится при $K > -1$.

Если же $\mu_2^{i+1} > \mu_2^i$, то обозначим через $a = \left(\mu_2^{i+1} - \mu_2^i\right)\left(1 - \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}\right)$, тогда из формулы (1.8) получим

$$I_2 \leq C\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))}\int\limits_0^\infty e^{-t^{2k\alpha_1^i}}t^K dt\left(\int\limits_{\nu^a t^{\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}}^1 \frac{e^{-\tau^{2k\alpha_2^{i+1}}}}{\tau}d\tau + \int\limits_1^\infty \frac{e^{-\tau^{2k\alpha_2^{i+1}}}}{\tau}d\tau\right)$$

$$\leq (c_1|ln\nu| + c_2)\,\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))}.$$

В I_3 после замены переменных $\xi = \nu^{-\mu^i}\eta$, имеем

$$I_3 \leq C\nu^{-(|\mu^i|+(m,\mu^i))}\int\limits_0^1 d\eta_2\int\limits_1^\infty \eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2}e^{-\eta_1^{2k\alpha_1^{i-1}}\eta_2^{2k\alpha_2^{i-1}}}e^{-\eta_1^{2k\alpha_1^i}\eta_2^{2k\alpha_2^i}}d\eta_1$$

$$= \nu^{-(|\mu^i|+(m,\mu^i))}.$$

$$\cdot\int\limits_1^\infty\int\limits_0^1 \exp\left\{-\left(\eta_1\eta_2^{\frac{\alpha_2^{i-1}}{\alpha_1^{i-1}}}\right)^{2k\alpha_1^{i-1}}\right\}\eta_1^{-1}d\eta_1\left(\eta_1^{\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i}}\eta_2\right)^L\exp\left\{-\left(\eta_1^{\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i}}\eta_2\right)^{2k\alpha_2^i}\right\}\eta_1^{\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i}}d\eta_2.$$

Обозначив $t = \eta_1\eta_2^{\frac{\alpha_2^{i-1}}{\alpha_1^{i-1}}}$, $\tau = \eta_1^{\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i}}\eta_2$, переходим к интегралу

$$I_3 \leq C\nu^{-(|\mu^i|+(m,\mu^i))}\int\limits_0^\infty e^{-\tau^{2k\alpha_2^i}}\tau^L d\tau\int\limits_{\tau^{\frac{\alpha_1^{i-1}}{\alpha_2^{i-1}}}}^\infty \frac{e^{-t^{2k\alpha_1^{i-1}}}}{t}dt \leq C\nu^{-(|\mu^i|+(m,\mu^i))},$$

так как $L > -1$. Наконец, для оценки I_4 сделав замену переменных $\xi = \nu^{-\mu^{i+1}}\eta$, получим

$$I_4 \leq C\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))}\int\limits_{\nu^{\mu_1^{i+1}-\mu_1^i}}^\infty d\eta_1\int\limits_{\nu^{\mu_2^{i+1}-\mu_2^i}}^\infty \eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2}e^{-\eta_1^{2k\alpha_1^i}\eta_2^{2k\alpha_2^i}-\eta_1^{2k\alpha_1^{i+1}}\eta_2^{2k\alpha_2^{i+1}}}d\eta_2$$

$$\leq C\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))}\int\limits_0^\infty e^{-t^{2k\alpha_2^i}}t^K dt\int\limits_c^\infty \frac{e^{-\tau^{2k\alpha_2^{i+1}}}}{\tau}d\tau,$$

где $c = (\nu^{\mu_2^{i+1}-\mu_2^i})(1-\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}\frac{\alpha_2^i}{\alpha_1^i})t^{\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}}}$, то есть I_4 оценивается как I_2 (см. неравенство (1.8). Следовательно, для I_4 имеем

$$I_4 \leq (c_1|\ln\nu| + c_2)\,\nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,M}(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))}.$$

В итоге получим, что для некоторых постоянных $c_1, c_2 > 0$ имеет место неравенство

$$I \le (c_1 |\ln \nu| + c_2)\, \nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,M}\left(|\mu^i| + (m,\mu^i)\right)}. \tag{1.9}$$

Замечание 1.1. *Множитель $|\ln \nu|$ появляется только в том случае, когда для некоторых i ($i = 1, \dots, M-1$) имеет место соотношение (1.7).*

Перейдем теперь к доказательству неравенства (1.2). Пусть $\gamma_1 < \gamma_2$. Для любого мультииндекса $m = (m_1, m_2)$ имеем

$$D^m \hat{G}_{1,r}(t,\nu) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R^2} \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} e^{-i(t,\xi)} \left(\nu \cdot \xi^{\alpha^r}\right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)} d\xi_1 d\xi_2, \ (r = 0, 1, \dots, M).$$

Пусть для некоторого номера i ($i = 0, 1, ..., M-1$) имеет место неравенство

$$\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i} > \frac{m_1 + (2k-1)\,\alpha_1^r + 1}{m_2 + (2k-1)\,\alpha_2^r + 1}, \quad \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} < \frac{m_1 + (2k-1)\,\alpha_1^r + 1}{m_2 + (2k-1)\,\alpha_2^r + 1}. \tag{1.10}$$

Тогда после замены переменных $\xi = \nu^{-\mu^{i+1}} \eta$, получим

$$\left| D^m \hat{G}_{1,r}(t,\nu) \right| \le C \nu^{-\left(|\mu^{i+1}| + (m,\mu^{i+1})\right) + (2k-1)\left(1 - (\alpha^r, \mu^{i+1})\right)}.$$

$$\cdot \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \eta_1^{m_1 + (2k-1)\alpha_1^r} \eta_2^{m_2 + (2k-1)\alpha_2^r} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1^i} \eta_2^{2k\alpha_2^i} - \eta_1^{2k\alpha_1^{i+1}} \eta_2^{2k\alpha_2^{i+1}}} d\eta_1 d\eta_2.$$

Из условия (1.10), как аналог условия (1.5), следует, что последний интеграл можно представить в виде

$$\left| D^m \hat{G}_{1,r}(t,\nu) \right| \le C \nu^{-\left(|\mu^{i+1}| + (m,\mu^{i+1})\right) + (2k-1)\left(1 - (\alpha^r, \mu^{i+1})\right)}.$$

$$\cdot \int\limits_0^\infty t^K e^{-t^{2k\alpha_1^i}} dt \int\limits_0^\infty \tau^L e^{-\tau^{2k\alpha_2^{i+1}}} d\tau\,,$$

где $K,\ L > -1$ некоторые числа. Так как $\nu < 1$, а $1 - (\alpha^r, \mu^{i+1}) \ge 0$, то имеем

$$\left| D^m \hat{G}_{1,r}(t,\nu) \right| \le C \nu^{-\left(|\mu^{i+1}| + (m,\mu^{i+1})\right)}.$$

В случае, когда для некоторого i ($i = 0, 1, \dots, M-1$)

$$\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i} = \frac{m_1 + (2k-1)\,\alpha_1^r + 1}{m_2 + (2k-1)\,\alpha_2^r + 1}, \quad \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} < \frac{m_1 + (2k-1)\,\alpha_1^r + 1}{m_2 + (2k-1)\,\alpha_2^r + 1}$$

появляется множитель $|\ln \nu|$, как и при оценке интеграла I.

В итоге получим, что для некоторых постоянных c_1 и c_2 имеет место неравенство

$$\left| D^m \hat{G}_{1,r}(t,\nu) \right| \le \nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,M}\left(|\mu^i| + (m,\mu^i)\right)} (c_1 |\ln \nu| + c_2).$$

Оценим теперь выражение $\nu^{-N} t_1^{N\gamma_1} t_2^{N\gamma_2} D^m \hat{G}_{1,r}(t,\nu)$. По свойству преобразования Фурье имеем

$$\nu^{-N} t_1^{N\gamma_1} t_2^{N\gamma_2} D^m \hat{G}_{1,r}(t,\nu)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\nu^{-N} \iint\limits_{R^2} D_{\xi_1}^{N\gamma_1} D_{\xi_2}^{N\gamma_2} e^{-i(t,\xi)} \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} 2k\left(\nu\xi^{\alpha^r}\right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)} d\xi_1 d\xi_2,$$

которое после интегрирования по частям переходит в интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\nu^{-N} \iint\limits_{R^2} e^{-i(t,\xi)} D_{\xi_1}^{N\gamma_1} D_{\xi_2}^{N\gamma_2} \left(\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} 2k\left(\nu\xi^{\alpha^r}\right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)}\right) d\xi_1 d\xi_2.$$

Из формулы (1.8) работы [1], для производной функции $\Phi(\xi)e^{P(\nu,\xi)}$ имеем, что нужно оценить следующие интегралы

$$\nu^{-N+2k-1} \sum_{\beta+\delta=N\gamma} C_{|N\gamma|}^{|\beta|} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty D_\xi^\delta \left(\xi_1^{m_1+(2k-1)\alpha_1^r} \xi_2^{m_2+(2k-1)\alpha_2^r}\right)\cdot$$

$$\cdot \sum_{\sigma^1+\dots+\sigma^{|\beta|}=\beta} e^{-P(\nu,\xi)} \prod_{j=0}^{|\beta|} D_\xi^{\sigma^j}(P(\nu,\xi)) d\xi_1 d\xi_2,$$

где произведение берется для тех j, для которых $|\sigma^j| > 0$.

Рассмотрим один из интегралов в данной сумме и в нем степень ξ_1 обозначим ρ_1, а степень ξ_2 - ρ_2. Если

а) $\frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} < \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, то после преобразования $\xi = \nu^{-\mu^1}\eta$ для степени ν, получим

$$\nu^{-(|\mu^1|+(m,\mu^1))}\nu^{-N}\nu^{(N\gamma,\mu^1)}\nu^{1-(\mu^1,\alpha^r)} \prod_{j=1}^{|\beta|} \nu^{1-(\mu^1,\alpha^j)},$$

где количество множителей $|\beta|$, а индексы j $(j = 0,1,\dots,M)$ могут повторяться. Так как $(N\gamma,\mu^1) = N$, $(\alpha^r,\mu^1) \le 1$ $(r = 0,1,\dots,M)$, то степень при ν будет больше или равна, чем $-\left(|\mu^1| + (m,\mu^1)\right)$. То есть получим

$$\left|\nu^{-N} t_1^{N\gamma_1} t_2^{N\gamma_2} D^m \hat{G}_{1,r}(t,\nu)\right| \le C\nu^{-(|\mu^1|+(m,\mu^1))}.$$

б) если $\frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^1} > \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, то рассмотрим последнюю некоординатную сторону. Если $\frac{\alpha_1^{M-1}}{\alpha_2^{M-1}} > \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, то после преобразования $\xi = \nu^{-\mu^M}\eta$, так как $\left(N\gamma,\mu^M\right) = N$ для степени ν получим то же самое, только везде μ^1 заменится на μ^M.

в) как и при оценке I, в случае

$$\frac{\alpha_1^{M-1}}{\alpha_2^{M-1}} > \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$$

рассмотрим те мультииндексы α^i и α^{i+1}, для которых

$$\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i} > \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}, \ \frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} < \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}.$$

Тогда после преобразования $\xi = \nu^{-\mu^{i+1}}\eta$ для степени ν, получим

$$\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))}\nu^{-N}\nu^{(N\gamma,\mu^{i+1})}\nu^{1-(\mu^{i+1},\alpha^r)}\prod_{j=1}^{|\beta|}\nu^{1-(\mu^{i+1},\alpha^j)}.$$

Так как $(N\gamma,\mu^{i+1}) \geq N$, $(\alpha^r,\mu^{i+1}) \leq 1\,(r=0,1,\ldots,M)$, то как и в предыдущем случае степень ν будет больше или равна, чем $-\left(\left|\mu^{i+1}\right|+(m,\mu^{i+1})\right)$, то есть

$$\left|\nu^{-N}t_1^{N\gamma_1}t_2^{N\gamma_2}D^m\hat{G}_{1,r}(t,\nu)\right| \leq C\nu^{-(|\mu^{i+1}|+(m,\mu^{i+1}))}.$$

г) В случае, когда для некоторого i $(i=1,\ldots,M-1)$ $\frac{\alpha_1^{i-1}}{\alpha_2^{i-1}} > \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, $\frac{\alpha_1^i}{\alpha_2^i} = \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, $\frac{\alpha_1^{i+1}}{\alpha_2^{i+1}} < \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, то, как и при оценке интеграла I, имеем

$$\left|\nu^{-N}t_1^{N\gamma_1}t_2^{N\gamma_2}D^m\hat{G}_{1,r}(t,\nu)\right| \leq \nu^{-\max\limits_{i=1,\ldots,M}(|\mu^i|+(m,\mu^i))}(a_1|\ln\nu|+a_2) \tag{1.11}$$

при некоторых постоянных a_1 и a_2. Так как $(N\theta,\mu^k) \geq N\,(k=1,\ldots,M)$, то аналогичная оценка справедлива и для $t_1^{N\theta}\hat{G}_{1,r}(t,\nu)$, то есть

$$\left|\nu^{-N}t_1^{N\theta}\hat{G}_{1,r}(t,\nu)\right| \leq \nu^{-\max\limits_{i=1,\ldots,M}(|\mu^i|+(m,\mu^i))}(a_1|\ln\nu|+a_2),$$

и неравенство (1.2) доказано.

Аналогично доказываются неравенства (1.3) и (1.4). □

Замечание 1.2. *В неравенствах (1.2)-(1.4) множитель $|\ln\nu|$ появляется только в том случае, когда для некоторого i имеет место соотношение (1.7).*

2. Интегральное представление и теоремы вложения

Как и в работе [1], для любой функции f рассмотрим усреднение с ядром усреднения $\hat{G}_0(t,\nu)$

$$f_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(t)\hat{G}_0(t-x,\nu)dt. \tag{2.1}$$

Справедливы следующие свойства усреднения $f_\nu(x)$.

Лемма 2.1. *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$, то $f_\nu \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $\|f_\nu\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \to 0$ при $\nu\to\infty$, $1<p<\infty$, а при $1 \leq p < \infty$*

$$\lim_{\nu\to 0}\|f_\nu - f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Доказательство не отличается от доказательства леммы 2.1 работы [1].

Имеет место следующая теорема об интегральном представлении.

Теорема 2.1. *Пусть для функции f существуют обобщенные производные $D^{\alpha^i} f\ (i = 0, 1, \ldots, M)$, где α^i – вершины вполне правильного многоугольника $\mathfrak{N}$ и $D^{\alpha^i} f \in L_p\left(\mathbb{R}^2\right)\ (i = 0, 1, \ldots, M)$, тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}^2$ имеет место представление*

$$f(x) = f_h(x) + \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=0}^{M} \int_{\varepsilon}^{h} d\nu \int_{\mathbb{R}^2} D^{\alpha^i} f(t) \hat{G}_{1,i}(t - x, \nu) dt. \tag{2.2}$$

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 3.1 работы [1].

Наконец, применяя лемму 1.1 и теорему 2.1, как и в работе [1], можно доказать теорему вложения.

Теорема 2.2. *Пусть $f \in W_p^{\mathfrak{N}}\left(\mathbb{R}^2\right) = \{\, f; f \in L_p\left(\mathbb{R}^2\right), D^{\alpha^r} f \in L_p\left(\mathbb{R}^2\right),\ 1 \le p < \infty,\ r = 0, 1, \ldots, M \,\}$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ – точка пересечения прямых $(\mu^1, \alpha) = 1$ и $(\mu^M, \alpha) = 1$. Тогда, если*

$$\chi = \max_{i=1,\ldots,M} \left(|\mu^i| + (m, \mu^i)\right) - |\mu^M| \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) < 1 \quad \text{при } \gamma_1 < \gamma_2,$$

$$\chi = \max_{i=1,\ldots,M} \left(|\mu^i| + (m, \mu^i)\right) - |\mu^1| \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) < 1 \quad \text{при } \gamma_1 \ge \gamma_2,$$

то $D^m W_p^{\mathfrak{N}}\left(\mathbb{R}^2\right) \hookrightarrow L_q\left(\mathbb{R}^2\right)$, то есть любая функция $f \in W_p^{\mathfrak{N}}\left(\mathbb{R}^2\right)$ имеет обобщенную производную $D^m f$, принадлежащую пространству $L_q\left(\mathbb{R}^2\right)$, и при $\gamma_1 \ne \gamma_2$ имеет место неравенство

(2.3)

$$\|D^m f\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} \le h^{1-\chi} \left(a_1 |\ln h| + a_2\right) \sum_{i=0}^{M} \left\| D^{\alpha^i} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} + h^{-\chi} \left(b_1 |\ln h| + b_2\right) \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)},$$

где постоянные a_1, a_2, b_1, b_2 не зависят от f и h, а b_1, b_2 также не зависят от q, $h > 0$ – произвольный параметр. При $\gamma_1 = \gamma_2$ имеет место аналогичное неравенство неравенству (2.3), где многочлены относительно $|\ln h|$ имеют второй порядок.

Доказательство. Случаи $\gamma_1 < \gamma_2$ и $\gamma_1 > \gamma_2$ доказываются аналигично как и в доказательстве теоремы 4.1 работы [1]. Докажем случай $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Из интегрального представления (2.2) имеем, что для любых параметров ε и h $(0 < \varepsilon < h)$

$$D^m f_h(x) - D^m f_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{M} \int_{\varepsilon}^{h} d\nu \int_{\mathbb{R}^2} D^{\alpha^j} f(t) D^m \hat{G}_{1,j}(t - x, \nu) dt.$$

Применяя неравенство Юнга, получим

(2.4)
$$\|D^m f_h(x) - D^m f_\varepsilon(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} \le \sum_{j=0}^{M} \int_{\varepsilon}^{h} d\nu \int_{\mathbb{R}^2} \left\|D^{\alpha^j} f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \left\|D^m \hat{G}_{1,j}(\cdot,\nu)\right\|_{L_r(\mathbb{R}^2)},$$

где $1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Оценим $\left\|D^m \hat{G}_{1,j}(\cdot,\nu)\right\|_{L_r(\mathbb{R}^2)}$. Из неравенства (1.4) имеем

$$\left\|D^m \hat{G}_{1,j}(\cdot,\nu)\right\|_{L_r(\mathbb{R}^2)} \le \nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,M}(|\mu^i|+(m,\mu^i))} (c_1|\ln\nu| + c_2)$$

$$\cdot \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dt_1 dt_2}{\left(1+\nu^{-N}\left((t_1t_2)^{N\gamma} + t_1^{N\theta}\right)\right)^r \left(1+\nu^{-N}\left((t_1t_2)^{N\gamma} + t_2^{N\sigma}\right)\right)^r} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Оценим последний интеграл. Так как $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, то $|\mu^1| = |\mu^M|$, $\mu_1^1 > \mu_1^M$, следовательно, $\mu_2^1 < \mu_2^M$. Разделим интеграл на следующие слагаемые (показатель r пропустим, потому что при $n = 2$ он не влияет на сходимость интеграла):

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dt_1 dt_2}{\left(1+\nu^{-N}\left((t_1t_2)^{N\gamma} + t_1^{N\theta}\right)\right)\left(1+\nu^{-N}\left((t_1t_2)^{N\gamma} + t_2^{N\sigma}\right)\right)}$$

$$= \int_0^{\mu_1^1} dt_1 \int_0^{\mu_2^1} dt_2 + \int_{\mu_1^1}^{\infty} dt_1 \int_0^{\mu_2^1} dt_2 + \int_0^{\mu_1^1} dt_1 \int_{\nu^{\mu_2^1}}^{\infty} dt_2 + \int_{\nu^{\mu_1^1}}^{\infty} dt_1 \int_{\nu^{\mu_2^1}}^{\infty} dt_2$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

В I_1 произведя замену переменных $t = \nu^{\mu^1}\eta$, получим

$$I_1 \le C\nu^{|\mu^1|} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\eta_1 d\eta_2}{1 + (\eta_1\eta_2)^{N\gamma} + \eta_2^{N\sigma}} \le C\nu^{|\mu^1|},$$

а в I_2 произведя замену переменных $t = \nu^M \eta$, получим

$$I_2 \le C\nu^{|\mu^M|} \int_{\nu^{\mu_1^1-\mu_1^M}}^{\infty} d\eta_1 \int_0^{\nu^{\mu_2^1-\mu_2^M}} \frac{d\eta_2}{1 + (\eta_1\eta_2)^{N\gamma} + \eta_1^{N\theta}}$$

$$\le C\nu^{|\mu^M|} \left(\int_{\nu^{\mu_1^1-\mu_1^M}}^{1} \frac{d\eta_1}{\eta_1} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^{N\gamma}} + \int_1^\infty \frac{d\eta_1}{\eta_1} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^{N\gamma}+\eta_1^{N\theta}} \right) \le \nu^{|\mu^M|} (d_1|\ln\nu| + d_2)$$

для некоторых постоянных d_1 и d_2. В I_3 после преобразования $t = \nu^{\mu^1}\eta$, получим

$$I_3 \le C\nu^{|\mu^1|}\int_1^\infty d\eta_2 \int_0^1 \frac{d\eta_1}{1+(\eta_1\eta_2)^{N\gamma}+\eta_2^{N\sigma}} \le C\nu^{|\mu^1|}\int_1^\infty \frac{d\eta_2}{1+\eta_2^{N\sigma}}\int_0^1 d\eta_1 \le C\nu^{|\mu^1|}.$$

После преобразования $\xi = \nu^{\mu^1}\eta$ для I_4, получим

$$I_4 \le \nu^{|\mu^1|}\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{d\eta_1 d\eta_2}{1+\eta_2^{N\gamma}+\eta_1^{N\theta}} \le C\nu^{|\mu^1|}.$$

В итоге имеем, что

$$\left\|D^m \hat{G}_{1,j}(\cdot,\nu)\right\|_{L_r(\mathbb{R}^2)} \le \nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,M}(|\mu^i|+(m,\mu^i))+\frac{|\mu^1|}{r}}\left(e_0|\ln\nu|^2+e_1|\ln\nu|+e_2\right)$$
$$= \left(e_0|\ln\nu|^2+e_1|\ln\nu|+e_2\right)\nu^{-\chi}$$

для некоторых постоянных e_0, e_1, e_2.

Подставляя полученную оценку в (2.4) и интегрируя по ν (с учетом того, что $\chi < 1$), получим

$$\|D^m f_h(x) - D^m f_\varepsilon(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} \le h^{1-\chi}\left(c_0|\ln h|^2+c_1|\ln h|+c_2\right)\sum_{i=0}^M \left\|D^{\alpha^i} f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}.$$

Отсюда, как и в работе [1], следует, что $f_h \to f$ в $L_p(\mathbb{R}^2)$ при $h \to 0$, и для f существует обобщенная производная $D^m f$, принадлежащая пространству L_q, для которой выполняется неравенство

$$\|D^m f\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} \le h^{1-\chi}\left(c_0|\ln h|^2+c_1|\ln h|+c_2\right)\sum_{i=0}^M \left\|D^{\alpha^i} f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}$$
$$+h^{-\chi}\left(e_0|\ln h|^2+e_1|\ln h|+e_2\right)\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}.$$

Теорема 2.2 доказана. □

Замечание 2.1. *В неравенстве (2.3) множитель $|\ln h|$ появляется только в том случае, когда для некоторого i ($i = 0,1,\dots,M$) имеет место соотношение (1.7). В противном случае коэффициенты a_1 и b_1 можно взять нулевыми, и неравенство (2.3) превратится в обычное интерполяционное неравенство. Необходимость появления логарифмического множителя в случае (1.7) обоснована в работе [1].*

Из теоремы 2.2 для вложения $D^\alpha W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^2)$ имеем:

Теорема 2.3. *Пусть $1 \le p < \infty$, $m = (m_1, m_2)$ - мультииндекс. Обозначим*

$$\chi = \max_{i=1,\dots,M}\left(|\mu^i| + (m,\mu^i)\right) - |\mu^M|\cdot\left(1-\frac{1}{p}\right) \quad \text{при } \gamma_1 < \gamma_2,$$

$$\chi = \max_{i=1,\dots,M} \left(\left|\mu^i\right| + (m, \mu^i)\right) - \left|\mu^1\right| \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \text{при } \gamma_1 \geq \gamma_2.$$

Тогда, если $\chi < 1$, то $D^m W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^2)$, то есть для любого $f \in W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^2)$ производная $D^m f$ почти всюду непрерывна в $\mathbb{R}^2$, и имеет место неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} |D^m f(x)| \leq h^{1-\chi}\left(a_1|\ln h| + a_2\right) \sum_{i=0}^{M} \left\| D^{\alpha^i} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} + h^{-\chi}\left(b_1|\ln h| + b_2\right) \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}.$$

Abstract. The present paper is a continuation of the author's paper [1], where by means of a special integral representation of functions we prove embedding theorems for multianisotropic functional spaces. In contrast to [1], here we consider the case where the corresponding completely regular polyhedron has many anisotropy vertices.

Список литературы

[1] Г. А. Карапетян, "Интегральное представление и теоремы вложения для мультианизотропных пространств в плоскости с одной вершиной анизотропности", Изв. НАН Армении, **51**, но. 6, 23 – 42 (2016).

[2] С. Л. Соболев, "Об одной теореме функционального анализа", Мат. сб. **4** (36):3, 471 – 497 (1938).

[3] С. М. Никольский, "Об одной задаче С. Л. Соболева", Сиб. Мат. Ж., **3**, но. 6, 845 – 857 (1962).

[4] K. T. Smith, "Inequalities for formally positive integro-differential forms", Bull. Amer. Math., 368 – 370 (1961).

[5] В. П. Ильин, "Интегральные представления дифференцируемых функций и их применение к вопросам продолжения функций классов $W_p^l(G)$", Сиб. Мат. Журн., **8**, но. 3, 573 – 586 (1967).

[6] О. В. Бесов, "О коэрцитивности в неизотропном пространстве С. Л. Соболева", Мат. сб., **73** (115), но. 4, 585 – 599 (1967).

[7] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, М., Наука, (1975).

Поступила 10 марта 2016