Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 6, 2017, стр. 3 – 11.

ОДНО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. Н. ЕНГИБАРЯН, Н. Б. ЕНГИБАРЯН

Институт Математики НАН Армении [1]
E-mails: *b.yengibaryan@eif.am*, *yengib@instmath.sci.am*

Аннотация. Пусть $E = E(a, b)$ некоторое банахово пространство измерим(a, b) функций; I - единичный оператор; $\hat{K}$ действующий в E регулярный интегральный оператор типа Фредгольма, а $\hat{K}_{\pm}$ его треугольные части. Рассматривается представление $I - \hat{K} = (I - \hat{K}_{-})(I - \hat{U})(I - \hat{K}_{+})$, для нескольких известных классов интегральных операторов. В частности показывается, что при определенных условиях оператор $\hat{U}$ положительный и его спектральный радиус $r\left(\hat{U}\right) < 1$. Отмечаются некоторые возможные применения рассмотренного представления.

MSC2010 number: 45A05

Ключевые слова: треугольные части интегрального оператора; факторизация; положительность, уменьшение нормы.

1. Введение

Рассмотрим интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$\left(I - \hat{K}\right) f = g. \tag{1.1}$$

Здесь I - единичный оператор, а $\hat{K}$ интегральный оператор:

$$\hat{K} f(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) dt, \quad x \in (a, b) \subset (-\infty, \infty), \tag{1.2}$$

ограниченно действующий в некотором вещественном банаховом пространстве $E = E(a, b)$ измеримых функций на $(a, b) \subset (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим следующее трехфакторное представление оператора $I - \hat{K}$:

$$I - \hat{K} = \left(I - \hat{K}_{-}\right)\left(I - \hat{U}\right)\left(I - \hat{K}_{+}\right), \tag{1.3}$$

где $\hat{K}_{\pm}$ - треугольные части K:

$$\hat{K}_{+} f(x) = \int_a^x K(x,t) f(t) dt\,, \quad \hat{K}_{-} f(x) = \int_x^b K(x,t) f(t) dt\,. \tag{1.4}$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта №15T-1A246.

Преобразование вида (1.3) было рассмотрено в работе [1] в связи с решением уравнения Винера-Хопфа. Оно допускает распространение на широкие классы линейных интегральных операторов (а также матриц). Для этого достаточно потребовать обратимость операторов $I - \hat{K}_\pm$ в E. Это требование автоматически выполняется, если треугольные операторы $\hat{K}_\pm$ из рассматриваемого класса вольтерровы.

Будучи простым по форме и по способу построения, представление (1.3) может значительно способствовать численно-аналитическому решению уравнения (1.1), благодаря возможному улучшению некоторых свойств оператора $\hat{U}$ по сравнению с $\hat{K}$, включая уменьшение нормы.

Настоящая работа посвящена изучению представления (1.3) для некоторых известных классов интегральных операторов, и применению (1.3) к уравнению (1.1). В частности показывается, что если $\hat{K}$ действующий в $L_2(a, b)$ отрицательный (в смысле гильбертовых пространств) оператор с произвольной нормой, то интегральный оператор $\hat{U}$ положительный и сжимающий . Представление (1.3) может быть использовано в вопросе численно-аналитического решения ряда интегральных уравнений математической физики.

2. Классы интегральных операторов

Обозначим через $B = B(E)$ алгебру с единицей I линейных ограниченных операторов, действующих в $E = E(a, b)$, снабженной операторной нормой в E. Рассмотрим некоторое банахово пространство $\Omega \subset B$ регулярных интегральных операторов вида (1.2). Оператор $\hat{K}$ является регулярным, если вместе с ним в E ограниченно действует также оператор $|\hat{K}|$ с ядром $|K|$.

Предполагается, что класс Ω обладает следующими свойствами.

а) Ω является прямой суммой подпространств $\Omega^\pm$, состоящих из нижних и верхних треугольных (формально вольтерровых) операторов вида (1.4).
б) Классы $\Omega^\pm$ замкнуты относительно умножения и являются алгебрами.
в) Если $\hat{V}_\pm \in \Omega^\pm$, то

$$\hat{V}_- \hat{V}_+ \in \Omega. \tag{2.1}$$

г) При умножении в Ω имеет место обычное правило композиции ядер.

Замкнутость всего класса Ω относительно умножения не требуется.

Замечание 2.1. *Условие* (2.1) *может быть заменено условием* $\hat{V}_+ \hat{V}_- \in \Omega$.

Пусть $\hat{K} \in \Omega$ задается посредством (1.2). Через $\hat{K}^T$ обозначается сопряженный интегральный оператор с транспонированным ядром $K(t, x)$. Оператор $\hat{K}^T$, действующий в сопряженном пространстве E^*, может как принадлежать, так и - не принадлежать классу Ω.

Определение 2.1. *Пусть $\hat{K}_\pm \in \Omega^\pm$. Операторы $I - \hat{K}_\pm$ назовем нормально обратимыми по классам $\Omega^\pm$, если*

$$(2.2)\qquad \left(I - \hat{K}_\pm\right)^{-1} = I + \hat{\Gamma}_\pm, \quad \hat{\Gamma}_\pm \in \Omega^\pm,$$

$$(2.3)\qquad \hat{\Gamma}_+ f(x) = \int_a^x \Gamma^+(x,t) f(t)dt, \quad \hat{\Gamma}_- f(x) = \int_x^b \Gamma^-(x,t) f(t)dt.$$

3. Построение представления (1.3). Схема применения к (1.1)

Пусть $\hat{K} \in \Omega$, а его треугольные части $\hat{K}_\pm \in \Omega^\pm$ определены согласно (1.4). Предполагается, что операторы $I - \hat{K}_\pm$ нормально обратимы: имеют место равенства (2.2). Представление (1.3) может быть построено аналогично работе [1]. Из равенства $I - \hat{K} = \left(I - \hat{K}_-\right)\left(I - \hat{K}_+\right) - \hat{K}_-\hat{K}_+$ с учетом (2.2) приходим к (1.3), где $\hat{U} = \left(I + \hat{\Gamma}_-\right)\hat{K}_-\hat{K}_+\left(I + \hat{\Gamma}_+\right)$. Используя равенства $\left(I + \hat{\Gamma}_-\right)\hat{K}_- = \hat{\Gamma}_-$, $\hat{K}_+\left(I + \hat{\Gamma}_+\right) = \hat{\Gamma}_+$ получаем:

$$(3.1)\qquad \hat{U} = \hat{\Gamma}_-\hat{\Gamma}_+ \in \Omega.$$

Имеет место следующий результат.

Лемма 3.1. *При выполнении условий нормальной обратимости* (2.2) *имеет место представление* (1.3), *где оператор определяется согласно* (3.1).

Из (1.3) видно, что оператор $I - \hat{U}$ обратим в E тогда и только тогда, когда обратим $I - \hat{K}$.

Итак, построение представления (1.3) сводится к определению ядер $\Gamma^\pm$ треугольных операторов $\hat{\Gamma}_\pm$. В случае симметричного ядра K достаточно найти Γ^+, поскольку тогда

$$(3.2)\qquad \Gamma^-(x,t) = \Gamma^+(t,x).$$

Разложение (1.3) сводит (1.1) к последовательному решению следующих трех уравнений:

$$(3.3)\qquad \left(I - \hat{K}_-\right) h = g,$$

$$(3.4)\qquad \left(I - \hat{U}_-\right) F = h,$$

$$(3.5)\qquad \left(I - \hat{K}_-\right) f = F,.$$

Решения уравнений (3.3) и (3.5) выражаются через $\hat{\Gamma}^\pm$, которые участвуют в (1.3). Остается рассмотреть вопрос решения уравнения (3.4).

Успех применения данной схемы решения уравнения (1.1) во многом зависит от того, какие частные свойства оператора $\hat{K}$ переходят к $\hat{U}$ и в каком отношении "улучшается" $\hat{U}$ по сравнению с $\hat{K}$. Эти вопросы будут рассмотрены для некоторых известных классов уравнений (1.1).

4. Случай симметричного оператора $\hat{K}$ в $L_2(a,b)$

4.1. Оценка спектрального радиуса оператора $\hat{U}$. Приведем некоторые вспомогательные факты из теории линейных операторов в гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$ со скалярным произведением $\langle f,g\rangle$ (см. [2], [3]).

Действующий в $L_2(a,b)$ интегральный оператор $\hat{W}$ с вещественным ядром W является положительным, если

$$\langle \hat{W}f,f\rangle = \int_a^b\int_a^b W(x,t)f(x)f(t)dxdt \geq 0, \quad \forall f\in L_2(a,b).$$

Положительный оператор обязательно является симметричным (вещественно самосопряженным).

Пусть оператор $\hat{A}\in B(L_2)$ допускает представление

$$\hat{A} = \hat{G}\hat{G}^T, \tag{4.1}$$

где $G\in B(L_2)$. Тогда $\hat{A}$ положительный.

Спектр $\sigma(\hat{A})$ положительного оператора $\hat{A}$ содержится в положительной полуоси: $\sigma(\hat{A})\subset[0,\infty)$. Для спектрального радиуса $r(\hat{A})$ симметричного оператора $\hat{A}\in B(L_2)$ имеет место следующее равенство (см. [3, теорему 2 гл. 11.8]):

$$r(\hat{A}) = \max\left(r^+, -r^-\right). \tag{4.2}$$

где

$$r^+(\hat{A}) \equiv \sup\sigma(\hat{A}) = \sup_{\|x\|\leq 1}\langle \hat{A}x,x\rangle, \quad r^-(\hat{A}) \equiv \inf\sigma(\hat{A}) = \inf_{\|x\|\leq 1}\langle \hat{A}x,x\rangle.$$

Рассмотрим представление (1.3) при $E(a,b)=L_2(a,b)$. От класса Ω дополнительно потребуем замкнутость относительно операции транспонирования. Оператор $\hat{K}$ будем считать симметричным: $\hat{K}^T=\hat{K}$. Тогда из (1.4),(3.1) и (3.3) будем иметь:

$$\hat{K}_- = \hat{K}_+^T, \quad \hat{\Gamma}_- = \hat{\Gamma}_+^T, \quad \hat{U}^T = \hat{U}. \tag{4.3}$$

Операторы $\hat{\Gamma}_\pm$ имеют вид (2.3).

Теорема 4.1. *Пусть в $L_2(a,b)$ оператор $\hat{K}\in\Omega$ с симметричным ядром K, удовлетворяет условию нормальной обратимости* (2.2). *Тогда имеет место представление* (1.3) *с положительным оператором $\hat{U}\in\Omega$ вида* (3.1), *причем:*

а) *Если $r^+(\hat{K})<1$, то имеет место неравенство*

$$r(\hat{U}) \leq 1-\left(1-r^+(\hat{K})\right)\left(\|I-\hat{K}_+\|\right)^{-2} < 1. \tag{4.4}$$

б) *Если*

$$r^+(\hat{K}) = 1, \quad \text{то} \quad r(\hat{U}) = 1. \tag{4.5}$$

Доказательство. Положительность оператора $\hat{U}$ следует из (3.1), (4.3) и условия положительности (4.1). Отсюда, согласно (4.2) следует равенство $r(\hat{U}) =$

$r^+(\hat{U})$. Пусть $f \in L_2(a,b)$ и $\|f\| = 1$. Обозначим $\varphi = (I + \hat{\Gamma}_+)f \in L_2$. Из (1.3) имеем $\langle \varphi, (I - \hat{K})\varphi\rangle = \langle f, (I - \hat{U})f\rangle = 1 - \langle f, \hat{U}f\rangle$. Отсюда получаем:

$$1 - \langle f, \hat{U}f\rangle = \|\varphi\|^2 - \langle \varphi, \hat{K}\varphi\rangle \geq \|\varphi\|^2 \left(1 - r^+(\hat{K})\right). \tag{4.6}$$

Из равенства $f = (I - \hat{K}_+)\varphi$ имеем $\|\varphi\| \geq \left(\|I - \hat{K}_+\|\right)^{-1}$. Отсюда и из (4.6) получаем следующую оценку:

$$\langle f, \hat{U}f\rangle \leq 1 - \left(1 - r^+(\hat{K})\right)\left(\|I - \hat{K}_+\|\right)^{-2}, \quad \|f\| = 1. \tag{4.7}$$

При $r^+(\hat{K}) < 1$ из (4.6) следует оценка (4.4). В случае $r^+(\hat{K}) = 1$ из (4.6) имеем $r(\hat{U}) \leq 1$. Необратимость оператора $I - \hat{K}$ исключает неравенство $r(\hat{U}) < 1$, поэтому $r(\hat{U}) = 1$. Теорема доказана. □

Теорема 4.1 содержит следующие важные свойства оператора $\hat{U}$. Одним из них является тот факт, что при $r^+(\hat{K}) \leq 1$ выполняются неравенство (4.3) и равенство (4.4), независимо от значения $r^-(\hat{K})$. Второе свойство заключается в том, что оператор $\hat{U}$ положительный при симметричном $\hat{K}$.

Сведение (1.1) к уравнению (3.4) раскрывает возможности применения богатого арсенала методов решения интегральных уравнений с оператором сжатия.

Важный класс уравнений (1.1), удовлетворяющих условию $r^+(\hat{K}) < 1$, составляют уравнения с отрицательным оператором (то есть когда $(-\hat{K})$ положительный). Тогда спектр оператора $\hat{K}$ сосредоточен на отрицательной полуоси, $r^+(\hat{K}) = 0$. Поэтому для применимости теоремы 4.1 остается выполнение условий нормальной обратимости (2.2).

Уравнение (1.1) с отрицательным оператором возникает в теории оптимальной фильтрации случайных процессов (см. [4]-[6]), при решении обратных задач теории переноса излучения (см. [7]) в случае применения регуляризационных методов решения интегральных уравнений первого рода и др.

4.2. О выполнении условий (2.2). В случае конечного промежутка (a,b), при достаточно общих предположениях относительно классов треугольных операторов $\Omega^{\pm}$, операторы $\hat{V}_{\pm} \in \Omega^{\pm}$ вольтерровы в строгом смысле (их спектр состоит только из точки 0). Тогда условия (3.1) автоматически выполняются. Так обстоит дело в случае операторов Гильберта-Шмидта, который будет рассмотрен в следующем пункте и в случае ядерных (по Гротендику) операторов.

В ряде случаев выполнение неравенства $r^+(\hat{K}) \leq 1$ обеспечивает нормальную обратимость $I - \hat{K}_{\pm}$. В этом вопросе может быть использована следующая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть $\hat{V} \in B(L_2(a,b))$ и $\hat{A} = \hat{V} + \hat{V}^T$. Тогда*

а) *Если $r^+(\hat{A}) \leq 1$, то имеет место неравенство*

$$\langle \hat{V}\varphi, \varphi\rangle \leq \frac{1}{2}\|\varphi\|^2, \quad \varphi \in L_2(a,b). \tag{4.8}$$

б) *Если $\hat{V}$ вполне непрерывный, то операторы $I - \hat{V}$ и $I - \hat{V}^T$ обратимы.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in L_2(a,b)$. Из $r^+(\hat{A}) \leq 1$ и (4.1) получаем $\langle \hat{V}\varphi, \varphi\rangle + \langle \hat{V}^T\varphi, \varphi\rangle \leq \|\varphi\|^2$. С учетом равенства $\langle \hat{V}\varphi, \varphi\rangle = \langle \hat{V}^T\varphi, \varphi\rangle$ приходим к (4.6). Докажем утверждение б) от противного. Пусть, например, $I - \hat{V}$ необратим. Подставляя в неравенство (4.6) в качестве φ неподвижный элемент вполне непрерывного оператора $\hat{V}$ приходим к противоречию. Лемма доказана. □

Пусть регулярный оператор $\hat{K}$ обладает вполне непрерывной мажорантой: $|K(x,t)| \leq K_0(x,t)$, где оператор с ядром $K_0(x,t)$ вполне непрерывный в $L_2(a,b)$. Из теоремы о мажоранте (см.[8, теорему 5.10]) следует, что тогда вполне непрерывны как $\hat{K}$, так и - ее треугольные части $\hat{K}_\pm$. Согласно лемме 4.1, при $r^+(\hat{K}) \leq 1$ операторы $I - \hat{K}_\pm$ будут обратимы и соответствующие условия теоремы 4.1 выполняются.

4.3. Случай операторов Гильберта-Шмидта. Пусть Ω совпадает с алгеброй интегральных операторов Гильберта-Шмидта, ядра которых интегрируемы с квадратом:

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt < +\infty.$$

Класс операторов Гильберта Шмидта замкнут относительно умножения и является B. алгеброй. Алгебрами являются также $\Omega^\pm$. Треугольные операторы $\hat{V}_\pm \in \Omega^\pm$ вольтерровы (см. [9]), операторы $I - \hat{V}_\pm$ нормально обратимы.

В рассматриваемом случае теорему 4.1 можно перефразировать следующим образом:

Теорема 4.2. *Пусть $\hat{K}$ интегральный оператор с симметричным ядром Гильберта-Шмидта и выполняется неравенство $r^+(\hat{K}) \leq 1$. Тогда имеет место представление* (1.3), *где $\hat{U}$ положительный интегральный оператор с ядром Гильберта-Шмидта. При $r^+(\hat{K}) < 1$ имеет место неравенство* (4.7). *Если же $r^+(\hat{K}) = 1$, то $r(\hat{U}) = 1$.*

4.4. Формула для обратного оператора $\left(I - \hat{K}\right)^{-1}$. Пусть класс Ω является банаховой алгеброй с операторной нормой. Ниже будет приведена формула для обратного оператора $\left(I - \hat{K}\right)^{-1}$, непосредственно вытекающая из теоремы 4.1. Согласно известной формуле Берлинга - Гельфанда (см. [3]), для оператора $\hat{U}$, фигурирующего в (1.3), имеем:

$$r(\hat{U}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\hat{U}^n\|}. \tag{4.9}$$

Из (4.9) следует, что в случае $r(\hat{U}) < 1$ оператор $\left(I - \hat{U}\right)^{-1}$ разлагается в ряд Неймана: $\left(I - \hat{U}\right)^{-1} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \hat{U}^m$, который сходится быстрее любой геометрической прогрессии со знаменателем $q = r(\hat{U}) + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1 - r(\hat{U})$.

Пусть выполнены условия утверждения а) теоремы 4.1. Тогда выполняется неравенство $r(\hat{U}) < 1$, что приводит к формуле

$$(I - \hat{K})^{-1} = (I + \hat{\Gamma}_+)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \hat{U}^m\right)(I + \hat{\Gamma}_-). \tag{4.10}$$

5. Уравнение (1.1) с субстохастическим ядром

В настоящем пункте в качестве функционального пространства E будет рассмотрено пространство $L_1(a,b)$. Класс Ω состоит из операторов, ядра которых удовлетворяют условию

$$\mu(K) = \sup_t \int_a^b |K(x,t)|dx < +\infty. \tag{5.1}$$

Имеет место неравенство

$$\|\hat{K}\|_{L_1} \leq \mu(K). \tag{5.2}$$

Ядро K является стохастическим, если

$$K(x,t) \geq 0, \quad \int_a^b K(x,t)dx \equiv 1. \tag{5.3}$$

Пусть

$$K(x,t) > 0 \quad \text{и} \quad \mu(K) < 1.$$

В теории переноса такой (равномерно субстохастический) случай может соответствовать диссипативному рассеянию. Тогда роль числа $\mu(K)$ может играть альбедо рассеяния.

В диссипативном случае, согласно (5.2), оператор $\hat{K}$ сжимающий в $L_1(a,b)$ с коэффициентом сжатия $\hat{\mu}$. Сжимающими являются также операторы $\hat{K}_\pm$ поэтому выполняются условия (3.1) нормальной обратимости. Согласно лемме 3.1, существует представление (1.3). Можно показать, что тогда $\Gamma_\pm(x,t) > 0$, $\quad U(x,t) > 0$, $\quad \mu(U) < \mu(K)$. При значениях $\mu(K) < 1$, близких к 1, ядро K называется почти консервативным. Решение уравнения (1.1) в таком случае обычно сопряжено с большими трудностями. Тогда даже небольшое уменьшение $\mu(U)$ по сравнению с $\mu(K)$ может оказаться существенным. В случае симметричного почти консервативного ядра K можно ожидать до четырехкратного увеличения числа $1 - \mu(U)$ по сравнению с $1 - \mu(K)$, что приводит к такому же увеличению скорости сходимости ряда Неймана для $(I - \hat{U})^{-1}$ по сравнению с $(I - \hat{K})^{-1}$. Так обстоит дело в случае уравнения Винера-Хопфа с симметричным диссипативным ядром (см. [1]).

6. Одно уравнение Винера-Хопфа с отрицательным ядром

Пусть теперь класс Ω состоит из интегральных операторов Винера-Хопфа

$$\hat{K}f(x) = \int_0^\infty T(x-t)f(t)dt \tag{6.1}$$

с ядерными функциями $T \in L_1(-\infty,\infty)$. Предполагается, что E совпадает с одним из функциональных пространств $L_p(0,\infty)$, $1 \le p \le \infty$. Имеет место оценка:

$$\|\hat{K}\|_E \le \mu = \int_{-\infty}^{\infty} |T(x|dx.$$

Оператор (6.1) некомпактный в пространствах E, треугольные операторы $\hat{K}_\pm$ невольтерровы. Класс Ω не замкнут относительно умножения, однако выполнены все требования из пункта 2.

В [1] было изучено представление (1.3) для случая уравнения Винера-Хопфа

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} T(x-t)f(t)dt, \tag{6.2}$$

с положительным ядром. Ниже будет рассмотрено уравнение (6.2) с четной отрицательной ядерной функцией $K \in L_1(-\infty,\infty)$ представленной через экспоненты в виде интеграла Стильтьеса:

$$K(x) = -\lambda \int_\alpha^\beta e^{-|x|s} d\sigma(s), \quad (\alpha,\beta) \subset (0,\infty), \quad \lambda > 0. \tag{6.3}$$

Здесь σ - неубывающая функция, удовлетворяющая условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 2\int_\alpha^\beta \frac{1}{s} d\sigma(s) = 1.$$

Уравнение (6.2) с ядром (6.3) и соответствующее уравнение на конечном промежутке возникают в теории линейной оптимальной фильтрации случайных процессов (см. [4]-[6]). В работе [10] изложен один способ его решения, основанный на прямое применение метода уравнения В.Амбарцумяна. Уравнение (6.2), (6.3) возникает также при регуляризации уравнении Винера-Хопфа первого рода.

Из результатов работы [11] следует, что в случае ядра (6.3) операторы $I - \hat{K}_\pm$ нормально обратимы и резольвентная функция Γ имеет вид:

$$\Gamma(x,t) = \Gamma_0(x-t), \quad \Gamma_0(x) = -\int_a^{\infty} e^{-xp} d\omega(p),$$

где ω неубывающая функция,

$$-\int_0^{\infty} \Gamma_0(x)dx = \int_\alpha^\beta \frac{1}{p} d\omega(p) = \frac{\lambda}{1+\lambda} < 1.$$

В рассматриваемом случае положительный оператор $\hat{U}$, фигурирующий в (1.3) определяется по следующей формуле:

$$U(x) = \int_0^{\infty} e^{-|x|s} \left[\int_0^{\infty} \frac{d\omega(p)}{s+p}\right] d\omega(s) > 0.$$

Имеет место равенство $\|\hat{U}\| = \left(\frac{\lambda}{2+\lambda}\right)^2 < 1$. Сказанное означает, что соответствующее уравнение (3.4) является уравнением Винера-Хопфа с диссипативным ядром. Оно может быть решено с применением уравнения Амбарцумяна (см. [12]) или методом усреднения ядра работы [13].

Авторы выражают благодарность А. Г. Барсегян за полезные обсуждения.

Abstract. Let $E = E(a, b)$ be some Banach space of measurable functions on (a, b), I be the identity operator, and let $\hat{K}$ be a Fredholm-type regular integral operator acting on E and $\hat{K}_\pm$ be its triangular parts. We consider the representation $I - \hat{K} = (I - \hat{K}_-)(I - \hat{U})(I - \hat{K}_+)$, for some known classes of integral operators. In particular, we show that under certain conditions the operator $\hat{U}$ is positive and its spectral radius satisfies the condition $r\left(\hat{U}\right) < 1$. Also, we give some possible applications of the representation.

Список литературы

[1] Б. Н. Енгибарян, "О многократной факторизации интегральных операторов типа свертки", Ж. Вычисл. Матем. и Мат. физики, **37**, no. 4, 447 – 458 (1997).

[2] В. С. Владимиров, Уравнения Математической Физики, М., Наука (1981).

[3] К. Иосида, Функциональный Анализ, М, Мир (1967).

[4] К. Браммер, Г. Зпффлинг, Фильтр Калмана-Бьюси, М., Наука (1982).

[5] М. В. Колос, И. В. Колос, Методы Линейной Оптимальной Фильтрации, Изд. МГУ (2000).

[6] Дж. Касти, Р. Калаба, Методы Погружения в Прикладной Математике, М., Мир (1976).

[7] Н. Б. Енгибарян, М. Г. Мурадян, Р. С. Варданян, Некоторые Задачи Дистанционного Зондирования, Труды XII научных чтений по космонавтике, М., ИИЕТ АН СССР (1989).

[8] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустильник, П. Е. Соболевский, Интегральные Операторы в Вространствах Суммируемых Функций, М., Наука (1966).

[9] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория Вольтерровых Операторов в Гильбертовом Пространстве и ее Приложения, М., Наука (1967).

[10] Н. Б. Енгибарян, А. Г. Барсегян, "Об одном уравнении свертки теории фильтрации случайных процессов", Укр. мат. журн., **66**, но. 8, 1092 – 1105 (2014).

[11] А. Г. Барсегян, "Уравнения типа восстановления с вполне монотонным ядром", Известия НАН РА, Математика, Ер., **39**, но. 3, 13 – 20 (2004).

[12] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, Уравнения в Свертках и Нелинейные Функциональные Уравнения, Итоги науки и техн., Сер. Мат. анал., **22**, ВИНИТИ, М., 175 - 244 (1984).

[13] А. Г. Барсегян, Н. Б. Енгибарян, "Приближенное решение интегральных и дискретных уравнений Винера-Хопфа", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **55**, но. 5, 836 845 (2015).

Поступила 20 октября 2016