Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 5, 2017, стр. 52-67.

ОЦЕНКИ СНИЗУ МНОГОЧЛЕНОВ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - армянский (Славянский) университет
Математический институт НАН Армении
E-mails: *haikghazaryan@mail.ru; vachagan.margaryan@yahoo.com*

Аннотация. Многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ называется почти гипоэллиптическим (см. [16]), если все его производные $D^\nu P(\xi)$ оцениваются сверху через $P(\xi)$. Из Теоремы Зайденберга - Тарского следует, что для каждого многочлена $P(\xi)$ удовлетворяющего условию $P(\xi) > 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ существуют числа $\sigma > 0$ и $T \in \mathbb{R}^1$ такие, что $P(\xi) \geq \sigma(1 + |\xi|)^T\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Наибольшее из чисел T, удовлетворяющее этому соотношению, обозначим через $ST(P)$ и назовем числом Зайденберга - Тарского многочлена P. Известно, что если к тому же $P \in \mathbb{I}_n$, т.е. $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, то $T = T(P) > 0$. В работе для одного класса почти гипоэллиптических многочленов $n \geq 2$ переменных находятся достаточные условия при которых $ST(P) \geq 1$, а в случае $n = 2$ доказывается, что $ST(P) \geq 1$ для любого почти гипоэллиптического многочлена $P \in \mathbb{I}_2$.

MSC2010 number: 12E10, 26C05.

Ключевые слова: почти гипоэллиптический оператор; число Зайденберга - Тарского; многогранник Ньютона[1].

1. Постановка задачи и вспомогательные предложения

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times ... \times \mathbb{N}_0$ – множество n-мерных мультииндексов, $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{R}^n$ – n-мерные эвклидовы пространства точек (векторов) соответственно $x = (x_1, ..., x_n)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $\mathbb{R}_+^n = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_j \geq 0\ (j = 1, ..., n),\}$ $\mathbb{R}_0^n = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 \cdots \xi_n \neq 0\}$. Для $\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{E}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^n \cap \mathbb{R}_0^n$ и $t > 0$ положим $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$,

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}, \quad |\xi, \lambda| = \sqrt{|\xi_1|^{2/\lambda_1} + ... + |\xi_n|^{2/\lambda_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n,$$

где $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ или $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$, $(j = 1, ..., n)$, $(\lambda, \alpha) = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n$, $t^\lambda = (t^{\lambda_1}, \cdots, t^{\lambda_n})$, $t^\lambda \cdot \xi = (t^{\lambda_1}\xi_1, \cdots, t^{\lambda_n}\xi_n)$.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта N SCS 15T-1A 197 и Тематического Фонда Российско-Армянского университета министерства образования и науки Российской Федерации.

Многие свойства решений тех или иных задач линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами определяются поведением на бесконечности характеристического многочлена (символа) $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ дифференциального оператора $P(D) = P(D_1, ..., D_n)$, отвечающего данному дифференциальному уравнению. Хорошо известно, что символ $P(\xi)$ гипоэллиптического по Л. Хермандеру оператора бесконечно возрастает при бесконечном возрастании модуля аргумента (см. [1] или [2]), при этом из теоремы 11.1.3 монографии [1] следует существование положительных чисел σ и $c_0 = c_0(P)$ таких, что $|P(\xi)| \geq \sigma[1 + |\xi|^{c_0}]$ для всех достаточно больших $|\xi|$. Обозначим через $c = c(P)$ наибольшее из чисел $c_0(P)$ и назовем его числом гипоэллиптичности оператора P. Символы эллиптических операторов возрастают оптимально, т.е. для любого эллиптического оператора $P(D)$ порядка m существует число $\sigma > 0$ такое, что $|P(\xi)| \geq \sigma[1 + |\xi|^m]$ для всех достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Что касается символов общих линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, то из теоремы Зайденберга - Тарского следует (см. [3], [4], или [1], Пример A.2.6), что для каждого оператора $P(D)$, символ которого удовлетворяет условию $P(\xi) > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ существуют числа $\sigma > 0$ и $T \in \mathbb{R}^1$ такие, что $P(\xi) \geq \sigma(1 + |\xi|)^T \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Наибольшее из чисел T, удовлетворяющее этому соотношению, обозначим через $ST(P)$ и назовем числом Зайденберга - Тарского. Таким образом, для гипоэллиптического оператора (многочлена) P $ST(P) = c(P)$, а для эллиптического оператора P порядка m $ST(P) = m$.

Для гипоэллиптического оператора $P(D)$ числом Зайденберга - Тарского $ST(P)$ определяются те классы Жевре, к которым принадлежат решения уравнения $P(D)u = 0$, а для общих линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами этим числом определяются поведение фундаментальных решений в начале координат и на бесконечности и другие свойства (см. [5] - [8]).

Обозначим через $\mathbb{I}_n$ множество многочленов с вещественными коэффициентами n переменных таких, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$. Очевидно, что умножением на (-1) и добавлением положительной константы всегда можно добиться того, что любой многочлен $P \in \mathbb{I}_2$ будет положительным для всех значений $\xi \in \mathbb{R}^n$.

В работе [9] для многочленов двух переменных, представляющихся в виде суммы трех однородных многочленов, найдены необходимые и достаточные условия принадлежности этих многочленов множеству $\mathbb{I}_2$, а в [10] найден алгоритм вычисления числа Зайденберга - Тарского для таких многочленов. Отмеченные условия и алгоритм получены в терминах порядков и кратностей нулей соответствующих однородных многочленов. В работе [11] получены необходимые и достаточные условия принадлежности почти гипоэллиптического многочлена (см. ниже, определение 1.1) $n \geq 2$ переменных к $\mathbb{I}_n$ в терминах устойчивости многочленов относительно линейных невырожденных преобразований. В работе В. П. Михайлова [12] найдены достаточные условия принадлежности многочлена к I_n в терминах невырожденности соответствующих подмногочленов, а в работе Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикина [13] в терминах устойчивости многочленов относительно возмущения коэффициентов исследуемого многочлена.

Из теоремы Зайденберга - Тарского следует, что для многочлена $P \in I_2$ число $ST(P)$ является положительным. Однако во многих вопросах теории линейных дифференциальных уравнений особый интерес представляет случай, когда $ST(P) \geq 1$, поэтому часто на изучаемый оператор априори ставится условие $ST(P) \geq 1$. Это обеспечивает, например, существование достаточно богатого множества бесконечно дифференцируемых решений в множестве обобщенных решений негипоэллиптического (например, почти гипоэллиптического) уравнения $P(D) = 0$ (см., например, [14] - [15]).

Целью настоящей работы является нахождение алгебраических условий на почти гипоэллиптический многочлен $P \in \mathbb{I}_n$, при которых $ST(P) \geq 1$. Основными результатами работы являются:

Теорема I (см. Следствие 1.1) *Пусть* $P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_j(\xi)$ *почти гипоэллиптический многочлен (с, вообще говоря, комплексными коэффициентами), где* P_j m_j *- однородный многочлен* ($j = 0, 1, ..., M$: $m_0 > m_1 > ... > m_M$). *Пусть для всех* $\eta \in \Sigma(P_0)$ *кратность нуля* $l(\eta)$ *многочлена* P_0 *меньше* m_0. *Если* $P \in \mathbb{I}_n$, *то с некоторой постоянной* $C > 0$ *и для всех* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *имеет место неравенство*

$$|\xi| \leq C\,[|P(\xi)| + 1].$$

Теорема II (см. Теорема 3.1) *Пусть* $n = 2$ *и* $P \in \mathbb{I}_2$ *почти гипоэллиптический многочлен. Тогда с некоторой постоянной* $C > 0$ *и для всех* $\xi \in \mathbb{R}^2$ *имеем*

$$|\xi| \leq C\,[|P(\xi)| + 1].$$

Статья имеет следующую структуру: в оставшейся части этого параграфа мы формулируем некоторые вспомогательные результаты и доказываем Теорему I (см. Следствие 1.1). В §2 мы изучаем некоторые свойства многочленов двух переменных, которые мы используем в §3 для доказательства Теоремы II (см. Теорему 3.1).

Следующий пример показывает, что принадлежность многочлена P множеству I_n не гарантирует оценку $ST(P) \geq 1$. Пусть $n = 2$, $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^4 - \xi_2)^2 + \xi_1^2$. Очевидно, $P \in \mathbb{I}_2$. Рассмотрим поведение P на последовательности $\{\xi^s = (s^{1/4}, s)\}_{s=1}^{\infty}$ при $s \to \infty$. Очевидно, что для достаточно больших s $P(\xi^s) = s^{1/2}$, а $|\xi^s| \sim s$, т.е $P(\xi^s)/|\xi^s| \to 0$ при $s \to \infty$, поэтому многочлен P не удовлетворяет соотношению $ST(P) \geq 1$. Отметим, что многочлен P в этом примере не является почти гипоэллиптическим, так как, например, $|D_1^2 P(\xi^s)|/P(\xi^s) = 32\, s^2 \to \infty$ при $s \to \infty$.

Далее под n-мерным многочленом мы будем понимать многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum\limits_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ такой, что для каждого $j = 1, ..., n$ существует точка $\xi^j \in \mathbb{R}^n$ такая, что $D_j P(\xi^j) \neq 0$. Обозначим через (P) множество $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, для которых $\gamma_\alpha \neq 0$.

Лемма 1.1. *Пусть $M, n_j \in \mathbb{N}_0$, $n_M > ... > n_0 \geq 0$ $x, a_j \in \mathbb{R}^1$ $(j = 0, 1, ..., M)$, $a_0 \cdots a_M \neq 0$ и $r(x) = \sum\limits_{j=0}^{M} a_j x^{n_j}$. Тогда кратность нуля любого ненулевого корня многочлена r не превосходит M.*

Доказательство. Пусть, наоборот, для некоторого $x_0 \neq 0$

$$r^{(j)}(x_0) = 0, \;\; j = 0, 1, ..., M. \tag{1.1}$$

Тогда система соотношений (1.1) эквивалентна системе

$$x_0^j\, r^{(j)}(x_0) = 0 \;\; j = 0, 1, ..., M. \tag{1.1'}$$

Рассмотрим эту систему как линейную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов $\{a_j\}$. Введем обозначения $\bar{a}(x_0) = (a_0 x_0^{n_0}, a_1 x_0^{n_1}, ..., a_M x_0^{n_M})$ и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n_0 & n_1 & \cdots & n_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \prod\limits_{j=0}^{M-1} (n_0 - j) & \prod\limits_{j=0}^{M-1} (n_1 - j) & \cdots & \prod\limits_{j=0}^{M-1} (n_M - j) \end{pmatrix}$$

Тогда систему $(1.1')$ можно записать в виде $A\bar{a}(x_0) = 0$. Так как $x_0 \neq 0$ и $detA \neq 0$, то $a_j = 0$, $j = 0, 1, ..., M$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Определение 1.1. *(см. [16]) Многочлен P назовем почти гипоэллиптическим, если с некоторой постоянной $C > 0$ и для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} |D^\alpha P(\xi)| \leq C\,[|P(\xi)| + 1].$$

Пусть R однородный многочлен порядка m (m - однородный многочлен). Через $\Sigma(R)$ обозначим множество его вещественных корней на единичной сфере: $\Sigma(R) = \{\eta \in R^n, |\eta| = 1, R(\eta) = 0\}$, а через $l_R(\eta)$ кратность корня $\eta \in \Sigma(R)$ и положим $l(R) := \sup\limits_{\eta\in\Sigma(R)} l_R(\eta)$. Из формулы Эйлера для однородных функций непосредственно следует утверждение.

Лемма 1.2. *Если для m-однородного многочлена R $l = l(R) < m$, то*

$$\inf_{|\eta|=1} \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha R(\eta)| > 0 \quad (j = l, l+1, ..., m).$$

Лемма 1.3. *Пусть R m- однородный многочлен с вещественными коэффициентами и $\eta \in \Sigma(R)$. Если $R(\xi) \geq 0$ $\forall\xi \in \mathbb{R}^n$, то m и $l(\eta)$ четные числа.*

Доказательство. Четность m очевидна. Докажем четность $l(\eta)$, при этом достаточно рассмотреть случай $l(\eta) < m$. В силу определения $l(\eta)$ имеем $\sum\limits_{|\alpha|=l(\eta)} |D^\alpha R(\eta)| \neq 0$, поэтому существует точка $\tau \in R^n$ такая, что $\sum\limits_{|\alpha|=l(\eta)} \frac{D^\alpha R(\eta)}{\alpha!}\tau^\alpha \neq 0$. Применяя формулу Лейбница, получаем

$$0 \leq R(\eta + t\,\tau) = \left[\sum_{|\alpha|=l(\eta)} \frac{D^\alpha R(\eta)}{\alpha!}\tau^\alpha\right] t^{l(\eta)} + \sum_{|\alpha|>l(\eta)} \frac{D^\alpha R(\eta)}{\alpha!}\tau^\alpha t^{|\alpha|}.$$

Отсюда при $t \to \infty$ имеем

$$0 \leq R(\eta + t\,\tau) = t^{l(\eta)}[\sum_{|\alpha|=l(\eta)} \frac{D^\alpha R(\eta)}{\alpha!}\tau^\alpha](1 + o(1)).$$

Откуда непосредственно следует, что $\sum\limits_{|\alpha|=l(\eta)} \frac{D^\alpha R(\eta)}{\alpha!}\tau^\alpha > 0$ и число $l(\eta)$ четное. □

Пусть $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R^n$. Многочлен $R(\xi) = R(\xi_1, ..., \xi_n)$ назовем λ - однородным λ-порядка $d = d(R, \lambda)$, если $R(t^\lambda\xi) = R(t^{\lambda_1}\xi_1, ..., t^{\lambda_n}\xi_n) = t^d R(\xi)$ для всех $t > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, $\lambda-$однородный многочлен $R(\xi)$ $\lambda-$порядка d, представляется в виде

$$R(\xi) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d} \gamma_\alpha\xi^\alpha. \tag{1.2}$$

Лемма 1.4. *Пусть $n = 2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}$ взаимно простые числа, R $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ – однородный многочлен $\lambda-$порядка d вида (1.2) такой, что $R(0,1) \cdot R(1,0) \neq 0$. Тогда 1) $d, d/\lambda_1, d/\lambda_2 \in \mathbb{N}$, 2) существуют числа $d_1 \in \mathbb{N}$ и $a_j \in \mathbb{R}^1$ $(j = 0, 1, ..., d_1)$ такие, что многочлен R можно представить в виде*

$$R(\xi) = \sum_{j=0}^{d_1} a_j \, (\xi_1^{\lambda_2})^j \, (\xi_2^{\lambda_1})^{d_1 - j} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Доказательство. Что $d \in \mathbb{N}$, очевидно. Из условия $R(0,1) \cdot R(1,0) \neq 0$ следует, что множество (R) содержит ненулевые мультииндексы $(\alpha_1, 0)$ и $(0, \alpha_2)$ такие, что $\alpha_1 \lambda_1 = \alpha_2 \, \lambda_2 = d$, откуда следует, что $d/\lambda_1, d/\lambda_2 \in \mathbb{N}$. Это доказывает первый пункт леммы.

Для доказательства второго пункта отметим, что из взаимной простоты чисел λ_1 и λ_2 следует, что $d_1 := d/(\lambda_1 \, \lambda_2) \in \mathbb{N}$. Положим $\Pi := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^2, (\lambda, \alpha) = d\}$ и пусть $\beta \in \Pi$, т.е. $\lambda_1 \, \beta_1 + \lambda_2 \, \beta_2 = d = d_1 \, \lambda_1 \, \lambda_2$, или, что то же самое, $\frac{\beta_1}{\lambda_2} \lambda_1 = d_1 \, \lambda_1 - \beta_2$.

Так как $d_1 \lambda_1 - \beta_2 \in \mathbb{N}_0$ и числа λ_1 и λ_2 взаимно простые, то $\frac{\beta_1}{\lambda_2} \in \mathbb{N}_0$. Следовательно $\Pi := \{(\lambda_2 \, j, \lambda_1 \, (d_1 - j)) \ j = 0, 1, ..., d_1\}$. Так как $(R) \subset \Pi$, то отсюда имеем

$$R(\xi) = \sum_{j=0}^{d_1} \gamma_{j \, \lambda_2, (d_1 - j) \, \lambda_1} \, (\xi_1^{\lambda_2})^j \, (\xi_2^{\lambda_1})^{d_1 - j} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2,$$

где $\gamma_{j \, \lambda_2, (d_1 - j) \, \lambda_1} = 0$ при $(j \, \lambda_2, (d_1 - j) \, \lambda_1) \notin (R)$, что доказывает требуемое представление. Лемма доказана. □

Лемма 1.5. *Пусть P почти гипоэллиптический многочлен m-ого порядка, представленный в виде суммы однородных многочленов:*

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_{m_j}(\xi), \tag{1.3}$$

где $m = m_0 > m_1 > ... > m_M \geq 0$, P_{m_j} m_j- однородный многочлен $(j = 0, ..., M)$. Если $l = l(P_m) < m$, то 1) $P \in I_n$, 2) существует положительное число c_1 такое, что

$$|\xi|^{\,2} \leq (|\xi| + 1)^{m-l} \leq c_1 \, [|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Доказательство. В силу леммы 1.2 и m-однородности многочлена P_m с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$

$$|\xi|^{m-l} \leq C_1 |\xi|^{m-l} \sum_{|\alpha| = l} |(D^\alpha P_m)(\xi/|\xi|)$$

$$= C_1|\xi|^{m-l}|\xi|^{-m+l}\sum_{|\alpha|=l}|(D^\alpha P_m)(\xi)| = C_1\sum_{|\alpha|=l}|(D^\alpha P_m)(\xi)|.$$

Так как многочлен P почти гипоэллиптичен, то отсюда имеем с некоторыми положительными постоянными C_2 и C_3

$$|\xi|^{m-l} \le C_1\sum_{|\alpha|=l}|[(D^\alpha P)(\xi) - D^\alpha(P-P_m)(\xi)]|$$

$$\le C_1\sum_{|\alpha|=l}|(D^\alpha P)(\xi)| + C_2(|\xi|+1)^{m_1-l}$$

$$\le C_3[|P(\xi)|+1] + C_2(|\xi|+1)^{m_1-l} \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Так как $m_1 < m$, то отсюда с некоторой постоянной $C_4 > 0$ имеем

$$|\xi|^{m-l} \le C_4[|P(\xi)|+1] \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Так как $l < m$, то это значит, что $P \in \mathbb{I}_n$, что доказывает первый пункт леммы. Неравенством (1.5) доказана также правая часть неравенства (1.4)

Для доказательства левой части неравенства (1.4), нам надо показать, что $m-l \ge 2$. С этой целью заметим (см. [17], лемма 3.1), что для многочлена $P \in \mathbb{I}_n$ подмногочлен P_m (с вещественными коэффициентами) сохраняет знак в R^n. А это по лемме 1.3 означает, что числа m и $l_{P_m}(\eta)$ чётные для всех $\eta \in \Sigma(P_m)$. В силу того, что $l < m$ отсюда следует, что $m - l \ge 2$, если $m > 2$ и $l = 0$, если $m = 2$. Этим левая часть (1.4) и тем самым лемма 1.5 доказана. □

Следствие 1.1. *(см. Теорему I в пункте 1) Так как многочлен P (с. вообще говоря, комплексными коэффициентами) и многочлен $|P|^2$ одновременно принадлежат или нет $\mathbb{I}_n$, то в силу леммы 1.5 существует число $c > 0$ такое, что*

$$|\xi|^2 \le (1+|\xi|)^{2(m_0-l)} \le c\,[|P(\xi)|^2+1] \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

где $l := \sup\limits_{\eta\in\Sigma(P_0)} l(\eta)$.

Это дает ответ (достаточное условие) на поставленный вопрос в случае, когда почти гипоэллиптический многочлен вида (1.3) удовлетворяет условию $l(P_m) < m$. Нам не известно, является ли это условие также необходимым для $n-$мерных почти гипоэллиптических многочленов $P \in \mathbb{I}_n$ при $n > 2$? Но ниже мы покажем, что любой почти гипоэллиптический многочлен двух переменных $P \in \mathbb{I}_2$ удовлетворяет соотношению (1.6).

Отметим, что принадлежность многочлена множеству $\mathbb{I}_n$ не гарантирует его гипоэллиптичность, что следует из следующего примера: пуст $n = 3$, $P(\xi) = (\xi^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2)^4 + \xi^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. Применяя теорему 3.1 работы [17] убедимся, что это почти гипоэллиптический многочлен, а из теоремы 1 работы [11] следует, что $P \in \mathbb{I}_3$, при этом это не гипоэллиптический многочлен, так как не удовлетворяет необходимому условию гипоэллиптичности (см. [19] , теорема 1).

2. Некоторые свойства многочленов двух переменных

Многоугольником Ньютона многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$ назовем наименьший выпуклый многоугольник $\Re(P) \subset \mathbb{R}_+^2$ с вершинами из $\mathbb{N}_0^2$, содержащий множество $(P) \cup \{0\}$. Очевидно, многоугольник Ньютона 2−мерного многочлена является 2−мерным, т.е. $\Re \cap \mathbb{R}_+^2 \cap \mathbb{R}_0^2 \neq \emptyset$.

Многоугольник $\Re$ назовем правильным, если для любого $\nu \in \Re$ $\Pi(\nu) := \{\mu \in \mathbb{R}_+^2, \mu \leq \nu\} \subset \Re$. Для 2−мерного многоугольника $\Re \subset R_+^2$ через $\Lambda(\Re)$ обозначим множество внешних (относительно $\Re$) нормалей одномерных некоординатных сторон. Легко убедиться, что 2-мерный многоугольник $\Re \subset \mathbb{R}_+^2$ является правильным тогда и только тогда, когда $\Lambda(\Re) \subset \mathbb{R}_+^2$. В [17] доказано, что многоугольник Ньютона почти гипоэллиптического многочлена является правильным.

Так как вершины многоугольника Ньютона любого многочлена являются мультииндексами, то среди внешних нормалей любой (одномерной) стороны (нормалей из $\Lambda(\Re)$) существует вектор с рациональными и, следовательно, с целыми координатами. При этом, если λ какая - то внешняя нормаль (одномерной) стороны Γ многоугольника $\Re(P)$ многочлена $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, то уравнение прямой содержащей сторону Γ задаётся формулой $(\lambda, \alpha) = m(\lambda)$, где $m(\lambda) = \max\{(\lambda, \beta), \beta \in (P)\}$. В этом случае $m(\lambda)$−однородный многочлен $P_{m(\lambda)}(\xi) = \sum\limits_{(\lambda,\alpha)=m(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ назовем подмногочленом многочлена P, отвечающим стороне Γ.

Лемма 2.1. *Пусть $\Re(P)$ правильный многоугольник Ньютона почти гипоэллиптического многочлена $P \in \mathbb{I}_2$. Если существует некоординатная (одномерная) сторона Γ многоугольника $\Re(P)$, среди внешних нормалей которой имеется вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ с взаимно простыми натуральными компонентами, то подмногочлен $P_{m(\lambda)}$ сохраняет знак в $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Так как многочлен $P_{m(\lambda)}$ λ−однородный, то достаточно показать, что $P_{m(\lambda)}$ сохраняет знак на множестве $\mathfrak{D} = \{\xi \in \mathbb{R}^2, |\xi, \lambda| = 1\}$.

Пусть, наоборот, $P_{m(\lambda)}(\eta^1) > 0$, $P_{m(\lambda)}(\eta^2) < 0$ для пары точек $\eta^1, \eta^2 \in \mathcal{D}$ и пусть $t \to \infty$. Тогда

$$P(t^\lambda \eta^1) = t^{m(\lambda)} P_{m(\lambda)}(\eta^1) + o(t^{m(\lambda)}) \to +\infty,$$

$$P(t^\lambda \eta^2) = t^{m(\lambda)} P_{m(\lambda)}(\eta^2) + o(t^{m(\lambda)}) \to -\infty.$$

Это значит, что для любого достаточно большого t существует точка $\eta(t) \in \mathcal{D}$ такая, что $P(t^\lambda \eta(t)) = 0$. Из компактности множества $\mathcal{D}$ следует существование последовательности $\{t_s\}_{s=1}^\infty$ такой, что $t_s \to \infty$ и последовательность $\{\eta(t_s)\}_{s=1}^\infty$ сходится к некоторой точке $\tau \in \mathcal{D}$ при $s \to \infty$.

Так как $\eta(t_s) \to \tau$, $0 = P(t_s^\lambda \eta(t_s)) = t_s^{m(\lambda)} P_{m(\lambda)}(\eta(t_s)) + o(t_s^{m(\lambda)})$ при $s \to \infty$, то $P_{m(\lambda)}(\tau) = 0$, т.е. $\tau \in \Sigma(P_{m(\lambda)}, \lambda)$, где $\Sigma(P_{m(\lambda)}, \lambda) = \{\eta \in R^n, |\xi, \lambda| = 1, P_{m(\lambda)}(\eta) = 0\}$.

Так как многочлен $P_{m(\lambda)}$ является $\lambda-$однородным, то существуют числа $l_1, l_2 \in N_0$ и $\lambda-$однородный многочлен R, $\lambda-$порядка $m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2 > 0$ такие, что $R(0,1) \cdot R(1,0) \neq 0$ и многочлен $P_{m(\lambda)}$ представляется в виде $P_{m(\lambda)}(\xi) = \xi_1^{l_1} \xi_2^{l_2} R(\xi)$ $\forall \xi \in R^2$.

Вследствие того, что R $\lambda-$однородный многочлен $\lambda-$порядка $m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2 > 0$ такой, что $R(0,1) \cdot R(1,0) \neq 0$ и λ вектор с целочисленными компонентами, из первого пункта леммы 1.4 следует, что числа $m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2$, $(m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2)/\lambda_1$ и $(m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2)/\lambda_2$ натуральные. Имея в виду, что числа λ_1 и λ_2 взаимно простые, из второго пункта леммы 1.4 получим, что $m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2 = l\lambda_1\lambda_2$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. множество $\{\alpha \in \mathbb{N}_0^2, (\lambda, \alpha) = m\}$ можно представить в виде $\{(\lambda_2(l-j), \lambda_1 j) \ \ (j = 0, 1, ..., l)\}$ и, что многочлен $P_{m(\lambda)}$ представляется в виде

$$(2.1) \qquad P_{m(\lambda)}(\xi) = \xi_1^{l_1} \xi_2^{l_2} R(\xi) = \xi_1^{l_1} \xi_2^{l_2} \sum_{j=0}^{l} \delta_j \xi_1^{\lambda_2(l-j)} \xi_2^{\lambda_1 j} \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^2,$$

где $\delta_0 = R(0,1), \delta_l = R(1,0)$.

Рассмотрим следующие три возможности: 1) $\tau_1 = 0$ (следовательно $\tau = (0, \pm 1)$), 2) $\tau_2 = 0$ (следовательно $\tau = (\pm 1, 0)$), 3) $\tau_1 \tau_2 \neq 0$.

В случае 1) из представления (2.1) и из того, что $R(0,1) \neq 0$ следует, что $l_1 \geq 1$ и $D_1^{l_1} P_{m(\lambda)}(\tau) \neq 0$. Так как $\eta(t_s) \to \tau$ при $s \to \infty$, то с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем для достаточно больших s

$$|(D_1^{l_1} P)(t_s^\lambda \eta(t_s))| \geq |(D_1^{l_1} P_{m(\lambda)})(t_s^\lambda \eta(t_s))| - |(D_1^{l_1}[P - P_{m(\lambda)}](t_s^\lambda \eta(t_s))|$$

$$\geq t_s^{m(\lambda) - l_1\lambda_1} \ |(D_1^{l_1} P_{m(\lambda)}(\eta(t_s)| - o(t_s^{m(\lambda) - l_1\lambda_1}) \geq C_1 \, t_s^{m(\lambda) - l_1\lambda_1}.$$

Из почти гипоэллиптичности P отсюда имеем с некоторыми постоянными $C_2, C_3 > 0$ для всех достаточно больших s

$$t_s^{m(\lambda)-l_1\lambda_1} \le C_2 \left|(D_1^{l_1} P)(t_s^\lambda \eta(t_s))\right| \le C_3[|P(t_s^\lambda \eta(t_s))| + 1] = C_3,$$

что противоречит тому, что $m(\lambda) - l_1\lambda_1 > 0$ и $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$.

В случае 2) из представления (2.1) следует, что $l_2 \ge 1$. Проводя аналогичные рассуждения, получим с некоторыми постоянными $C_4, C_5 > 0$ для всех достаточно больших s

$$t_s^{m(\lambda)-l_2\lambda_2} \le C_4 \left|(D_2^{l_2} P)(t_s^\lambda \eta(t_s))\right| \le C_5[|P(t_s^\lambda \eta(t_s))| + 1] = C_5,$$

что противоречит тому, что $m(\lambda) - l_2\lambda_2 > 0$ и $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$.

В случае 3) зафиксируем τ_2 и рассмотрим $R(x, \tau_2)$ как многочлен от x, зависящий от параметра τ_2. Так как в силу леммы 1.1 $x = \tau_1$ является корнем многочлена $R(x, \tau_2)$ кратности $l_0 \le l$, то $D_1^{l_0} P_{m(\lambda)}(\tau) = \tau_1^{l_1}\tau_2^{l_2} D_1^{l_0} R(\tau) \ne 0$. И так как $D_1^{l_0} P_{m(\lambda)}(\eta(t_s)) \to D_1^{l_0} P_{m(\lambda)}(\tau)$ при $s \to \infty$, то существует число $C_6 > 0$ такое, что для всех достаточно больших s

$$|D_1^{l_0} P_{m(\lambda)}\,(t_s^\lambda \eta(t_s))| = t_s^{m(\lambda)-l_0\lambda_1} |D_1^{l_0} P_{m(\lambda)}\,(\eta(t_s))| \ge t_s^{m(\lambda)-l_0\lambda_1}.$$

Отсюда с некоторой постоянной $C_7 > 0$ имеем для всех достаточно больших s

$$|D_1^{l_0} P(t_s^\lambda \eta(t_s))| \ge |D_1^{l_0} P_{m(\lambda)}\,(t_s^\lambda \eta(t_s))| - |D_1^{l_0}[P - P_{m(\lambda)}](t_s^\lambda \eta(t_s))|$$

$$\ge C_6\, t_s^{m(\lambda)-l_0\lambda_1} - o(t_s^{m(\lambda)-l_0\lambda_1}) \ge C_7\, t_s^{m(\lambda)-l_0\lambda_1}.$$

Имея в виду почти гипоэллиптичность многочлена P, отсюда имеем с некоторой постоянной $C_8 > 0$ для всех достаточно больших s

$$t_s^{m(\lambda)-l_0\lambda_1} \le C_8\,[|P(t_s^\lambda \eta(t_s))| + 1] = C_8. \tag{2.2}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\lambda_1 < \lambda_2$, тогда $m(\lambda) - l_0\lambda_1 = m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2 + l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2 - l_0\lambda_1 = l\lambda_1\lambda_2 - l_0\lambda_1 + l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2 \ge l\lambda_1(\lambda_2 - 1) + l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2 > 0$. Так как $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$, то это противоречит соотношению (2.2) и доказывает лемму. □

Лемма 2.2. *Пусть многочлен P удовлетворяет условиям леммы 2.1 и $\lambda_2 > \lambda_1$. Тогда существует число $C > 0$ такое, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$ имеем*

$$|\xi|^{2\frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2}} \le C[|P(\xi)| + 1]. \tag{2.3}$$

Доказательство. В ходе доказательства будем пользоваться обозначениями, введенными в доказательстве леммы 2.1. Сначала отметим следующую простую цепь неравенств при $\lambda_2 > \lambda_1$ и для всех $\xi \in R^2$

$$|\xi|^{2\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2}} \le c_1[1 + |\xi_1|^{2\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2}} + |\xi_2|^{2\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2}}]$$

$$\le c_2[1 + (\sqrt{|\xi_1|^{2/\lambda_1} + |\xi_2|^{2/\lambda_2}})^{2(\lambda_2-1)}] = c_2[1 + |\xi, \lambda|^{2(\lambda_2-1)}].$$

Так, что мы докажем больше, если покажем, что с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$|\xi, \lambda|^{2(\lambda_2-1)} \le C_1[|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{2.4}$$

Предположим обратное, что существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ такая, что $|\xi^s, \lambda| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$|P(\xi^s)|/|\xi^s, \lambda|^{2(\lambda_2-1)} \to 0. \tag{2.5}$$

Положим $\tau^s = \xi^s/|\xi^s, \lambda|^{\lambda}$ $(s = 1, 2, ...)$. Из леммы 2.1 следует, что многочлен $P_{m(\lambda)}$ сохраняет знак: $P_{m(\lambda)}(\xi) \ge 0$ в R^2, а из леммы 1.4 следует, что числа l_1, l_2, и $m(\lambda)$ четные, при этом $m(\lambda) - l_1\lambda_1 - l_2\lambda_2 \ge 0$. Поэтому $m(\lambda) \ge 2$.

С другой стороны так как $|\tau^s, \lambda| = 1$ $(s = 1, 2, ...)$ и при $s \to \infty$

$$P(\xi^s) = |\xi^s, \lambda|^{m(\lambda)}\, P_{m(\lambda)}(\tau^s) + o(|\xi^s, \lambda|^{m(\lambda)}),$$

то из предположения (2.5) следует, что предельные точки последовательности $\{\tau^s\}$ принадлежат множеству $\Sigma(P_{m(\lambda)}, \lambda) := \{\xi \in R^2,\ |\xi, \lambda| = 1, P_{m(\lambda)}(\xi) = 0\}$. Пусть $\tau \in \Sigma(P_{m(\lambda)})$ одна из этих предельных точек. Не умаляя общности, можно считать, что $\tau^s \to \tau$ при $s \to \infty$. Представим многочлен $P_{m(\lambda)}$ в виде (2.1) и, как при доказательстве леммы 2.1, рассмотрим следующие три возможности: 1) $\tau_1 = 0$ (следовательно $\tau = (0, \pm 1)$), 2) $\tau_2 = 0$ (следовательно $\tau = (\pm 1, 0)$), 3) $\tau_1\tau_2 \ne 0$. Так как в случае 1) $D_1^{l_1} P_{m(\lambda)}(\tau) = l_1!\tau_2^{l_2} R(\tau) = l_1! R(0, 1) \ne 0$ и $D_1^{l_1} P_{m(\lambda)}(\tau^s) \to D_1^{l_1} P_{m(\lambda)}(\tau)$ при $s \to \infty$, то с некоторой постоянной $C_2 > 0$ имеем для достаточно больших s

$$|D_1^{l_1} P(\xi^s)| \ge |D_1^{l_1} P_{m(\lambda)}(\xi^s)| - |D_1^{l_1}(P - P_{m(\lambda)})(\xi^s)|$$

$$= |\xi^s, \lambda|^{m(\lambda)-l_1\lambda_1} |D_1^{l_1} P_{m(\lambda)}(\tau^s)| - o(|\xi^s, \lambda|^{m(\lambda)-l_1\lambda_1}) \ge C_2\, |\xi^s, \lambda|^{m(\lambda)-l_1\lambda_1}.$$

В силу почти гипоэллиптичности P отсюда имеем с некоторой постоянной $C_3 > 0$ для достаточно больших s $|\xi^s, \lambda|^{m(\lambda)-l_1\lambda_1} \le C_3\, [|P(\xi^s)| + 1]$. Так как (см. выше) $m(\lambda) - l_1\lambda_1 \ge 2\lambda_2$, то это противоречит (2.5) и завершает рассмотрение первого случая.

Рассуждая как в случае 1), в случае 2) для достаточно больших s получим оценку $|\xi^s,\lambda|^{m(\lambda)-l_2\lambda_2} \le C_4\,[|P(\xi^s)|+1]$ с некоторой постоянной $C_4>0$. Так как $m(\lambda)-l_2\lambda_2 \ge 2\lambda_2$, то это противоречит (2.5) и завершает рассмотрение второго случая.

В случае 3) из представления (2.1) следует, что $\tau\in\Sigma(R,\lambda)$. Зафиксируем τ_2 и рассмотрим $R(x,\tau_2)$ как многочлен от x, зависящей от параметра τ_2. Если через l_0 обозначить кратность корня $x=\tau_1$ многочлена $R(x,\tau_2)$, то в силу леммы 1.1 $l_0\le l$. С другой стороны, так как $(D_1^{l_0-j}R)(\tau)=0$ при $j>0$, $D_1^{l_0}R(x,\tau_2)]|_{x=\tau_1}\ne 0$, то $D_1^{l_0}P_{m(\lambda)}(\tau)=\tau_1^{l_1}\tau_2^{l_2}\,D_1^{l_0}R(\tau)\ne 0$.

Пусть $\tau^s\to\tau$ при $s\to\infty$, тогда с некоторой постоянной $C_5>0$ имеем для достаточно больших s

$$|D_1^{l_0}P(\xi^s)| \ge |D_1^{l_0}P_{m(\lambda)}(\xi^s)| - |D_1^{l_0}[P-P_{m(\lambda)}](\xi^s)|$$

$$\ge |\xi^s,\lambda|^{m(\lambda)-l_0\lambda_1}\,|D_1^{l_0}P_{m(\lambda)}(\tau^s)| - o(|\xi^s,\lambda|^{m(\lambda)-l_0\lambda_1}) \ge C_5\,|\xi^s,\lambda|^{m(\lambda)-l_0\lambda_1}.$$

Отсюда, в силу почти гипоэллиптчности многочлена P, получаем неравенство $|\xi^s,\lambda|^{m(\lambda)-l_0\lambda_1}\le C_6\,[|P(\xi^s)|+1]$ с некоторой постоянной $C_6>0$ для всех достаточно больших s. Так как $m(\lambda)-l_0\lambda_1 = l\,\lambda_1\lambda_2 + l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2 - l_0\lambda_1 \ge l\,\lambda_1(\lambda_2-1) + l_1\lambda_1 + l_2\lambda_1 \ge 2(\lambda_2-1)$, то полученная оценка противоречит (2.5) и завершает доказательство оценки (2.4). □

На примере покажем, что оценка (2.3) является точной в том смысле, что в левой части неравенства (2.3) нельзя показатель $2(\lambda_2-1)/\lambda_2$ заменить на $2(\lambda_2-1)/\lambda_2+\varepsilon$ ни для какого $\varepsilon>0$.

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что многочлен $P(\xi)=(\xi_1^2-\xi_2)^2+\xi_1^2$ является почти гипоэллиптческим. Его многоугольником Ньютона является прямоугольный треугольник с вершинами $(4,0),(0,0),(0,2)$ и с единственной некоординатной стороной $(4,0)-(0,2)$. При этом вектор $\lambda=(1,2)$, с взаимопростыми координатами, является внешней нормалью этой грани. Так, что многочлен P удовлетворяет условиям леммы 2.2.

Рассмотрим последовательность $\{\xi^s=(s,s^2)\}_{s=1}^{\infty}$. На этой последовательности

$$\lim_{s\to\infty}\frac{[|P(\xi^s)|+1]}{|\xi^s|^{2\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2}}} = \lim_{s\to\infty}\frac{s^2+1}{(s^2+s^4)^{1/2}} = 1,$$

поэтому, для любого $\varepsilon>0$ $\lim\limits_{s\to\infty}(s^2+1)/(s^2+s^4)^{1/2+\varepsilon}=0$.

3. Основной результат в двумерном случае

Теорема 3.1. *(см. Теорему II в пункте 1) Пусть* $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha\in(P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha \in \mathbb{I}_2$ *почти гипоэллиптический многочлен. Тогда существует число* $C > 0$ *такое, что*

$$|\xi| \le C\,[|P(\xi)| + 1] \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $m = \max\limits_{\alpha\in(P)} |\alpha|$ и $P_m(\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=m} \gamma_\alpha \xi^\alpha$. Так как $P \in \mathbb{I}_2$, то многочлен P и многоугольник Ньютона $\Re(P)$ двумерные.
Рассмотрим два возможных случая: 1) $card(P_m) = 1$ и 2) $card(P_m) \ge 2$.

Пусть в случае 1) $(P_m) = \{\beta\}$. Если $\beta \in \mathbb{R}^2_0$, то $\Sigma(P_m) = \{(0, \pm1), (\pm1, 0)\}$, при этом (кратность корней $(0, \pm1)$) $l_1 := deg(0, \pm1) = \beta_1$, а $l_2 := deg(\pm1, 0) = \beta_2$ и поэтому $l(P_m) := max\{\beta_1, \beta_2\} < m$. В этом случае утверждение теоремы следует из второго пункта леммы 1.5.

Если в случае 1) $\beta \notin \mathbb{R}^2_0$, то либо $\beta = (m, 0)$, либо $\beta = (0, m)$. Пусть $\beta = (m, 0)$ (случай $\beta = (0, m)$ рассматривается аналогично). Так как многоугольник Ньютона $\Re(P)$ двумерный, то существует (одномерная) некоординатная сторона Γ многоугольника $\Re(P)$, с вершиной $\beta = (m, 0)$. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ внешняя (относительно $\Re(P)$) нормаль этой стороны с целыми компонентами. Из геометрических соображений ясно, что $1 \le \lambda_1 < \lambda_2$, дробь λ_2/λ_1 рациональная и, не умаляя общности, можно считать, что дробь λ_2/λ_1- несократимая, т.е. числа λ_1 и $\lambda_2 \ge 2$ взаимно простые.

Очевидно, уравнение прямой, проходящей через грань Γ, имеет вид $(\lambda, \alpha) = m(\lambda)$, где $m(\lambda) = m\,\lambda_1$, а подмногочлен, отвечающий этой грани вид: $P_{m(\lambda)}(\xi) = \sum\limits_{(\lambda,\alpha)=m(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, при этом $(\lambda, \alpha) < m\,\lambda_1$ для точек $\alpha \in (P - P_{m(\lambda)})$. Так как λ_1 и λ_2 взаимно простые и $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, то $\lambda_2 \ge 2$.

Таким образом многочлен P удовлетворяет условиям леммы 2.2, что доказывает оценку (3.1) и в этом случае.

Прежде чем перейти к случаю 2), заметим, что однородный многочлен P_m двух переменных можно представить в виде

$$P_m(\xi) = \xi_1^{l_1}\, \xi_2^{l_2}\, R(\xi), \tag{3.2}$$

где $l_1, l_2 \in \mathbb{N}_0$, а $R-$ однородный многочлен порядка $m - l_1 - l_2$ такой, что $R(1, 0) \cdot R(0, 1) \ne 0$. При этом, так как в случае 2) $cardR = card(P_m) \ge 2$, то $m - l_1 - l_2 > 0$

В случае 2) имеются следующие две возможности: 2.1) $P_m(0, 1)\, P_m(1, 0) = 0$ и 2.2) $P_m(0, 1) P_m(1, 0) \ne 0$. Отметим, что в последнем случае многоугольник

Ньютона $\Re(P)$ многочлен P представляет собой прямоугольный треугольник с вершинами $(m,0)$, $(0,m)$ и $(0,0)$, при этом в представлении (3.2) $l_1 = l_2 = 0$.

Случай 2.1) в свою очередь разбивается на следующие подслучаи:

2.1.1) $P_m(0,1) = 0$, $P_m(1,0) \neq 0$ тогда $l_1 \in \mathbb{N}, l_2 = 0$

2.1.2) $P_m(0,1) \neq 0$, $P_m(1,0) = 0$ тогда $l_1 = 0, l_2 \in \mathbb{N}$

2.1.2) $P_m(0,1) = P_m(1,0) = 0$, тогда $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$.

Так как $m > l_1 + l_2$, то во всех этих случаях

$$l(P_m) := \max_{\tau \in \Sigma(P_m)} \{l_{P_m}(\tau)\} \leq max\{l_1, m - l_1\} < m$$

и оценка (3.1) следует из леммы 1.5.

Рассмотрим подслучай 2.2). Если в этом случае $\Sigma(P_m) = \emptyset$, т.е. $P_m(\xi) \neq 0$ при $|\xi| \neq 0$, то P эллиптический многочлен и тогда неравенство (3.1) очевидно. Так, что стоит рассмотреть лишь случай $\Sigma(P_m) \neq \emptyset$.

Если $l(P_m) < m$, то оценка (3.1) следует из леммы 1.5. Так, что остается рассмотреть случай $l(P_m) = m$, т.е. когда существует точка $\tau \in \Sigma(P_m)$ такая, что $l_{P_m}(\tau) = m$. В этом случае $\Sigma(P_m) = \{\pm\tau\}$, при этом в представлении (3.2) $l_1 = l_2 = 0$ и многочлен P_m представляется в виде (см. [18] или [19], лемма 2.1) $P_m(\xi) = \gamma(\tau_2\xi_1 - \tau_1\xi_2)^m$, где $\gamma \neq 0$. Так как в этом случае $(D^\alpha P_m)(\tau) = 0$ при $|\alpha| < m$, то применяя формулу Тейлора и формулу Эйлера для однородных многочленов, имеем для любых $\xi \in \mathbb{R}^2$ и $t > 0$

$$P_m(\xi + t\,\tau) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha P_m)\,(t\,\tau)\,\xi^\alpha = \sum_\alpha \frac{t^{m-|\alpha|}}{\alpha!}[(D^\alpha P_m)(\tau)]\,\xi^\alpha$$

$$= \sum_{\alpha=m} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha P_m)(\tau)\,\xi^\alpha = P_m(\xi) = \gamma(\tau_2\xi_1 - \tau_1\xi_2)^m.$$

Произведем замену переменных $\eta = A\xi$, где

$$A = \begin{pmatrix} \tau_2 & -\tau_1 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{pmatrix}, \quad detA = detA^{-1} = 1$$

и обозначим $Q(\eta) := P(A^{-1}\eta)$. Так как $P \in \mathbb{I}_2$ почти гипоэллиптический многочлен, а матрица $A-$ невырожденная, то в силу теоремы 3.1 работы [11] многочлен Q также принадлежит $\mathbb{I}_2$ и является почти гипоэллиптическим, при этом Q представляется в виде

$$Q(\eta) = \gamma\,\eta_1^m + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \delta_\alpha \xi^\alpha. \tag{3.3}$$

Таким образом многочлен Q удовлетворяет условиям теоремы 3.1, причем из представления (3.3) следует, что для него возможен только случай 1) в процессе настоящего доказательства этой теоремы . По уже доказанной части теоремы существует число $C_1 > 0$ такое, что $|\eta| \leq C_1[|Q(\eta)| + 1]$ $\forall \eta \in \mathbb{R}^2$. Отсюда с некоторой постоянной $C_2 > 0$ и для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$C_2 |\xi| \leq |A\xi| = |\eta| \leq C_1 [|Q(\eta)| + 1] \leq C_1 [|P(A^{-1}\eta)| + 1] = C_1 [|P(\xi)| + 1].$$

Этим рассмотрение подслучая 2.2) завершено и тем самым теорема полностью доказана.

Abstract. A polynomial $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ is said to be almost hypoelliptic if all its derivatives $D^\nu P(\xi)$ can be estimated from above by $P(\xi)$ (see [16]). By a theorem of Seidenberg-Tarski it follows that for each polynomial $P(\xi)$ satisfying the condition $P(\xi) > 0$ for all $\xi \in \mathbb{R}^n$, there exist numbers $\sigma > 0$ and $T \in \mathbb{R}^1$ such that $P(\xi) \geq \sigma(1 + |\xi|)^T$ for all $\xi \in \mathbb{R}^n$. The greatest of numbers T satisfying this condition, denoted by $ST(P)$, is called Seidenberg-Tarski number of polynomial P. It is known that if, in addition, $P \in \mathbb{I}_n$, that is, $|P(\xi)| \to \infty$ as $|\xi| \to \infty$, then $T = T(P) > 0$. In this paper, for a class of almost hypoelliptic polynomials of n (≥ 2) variables we find a sufficient condition for $ST(P) \geq 1$. Moreover, in the case $n = 2$, we prove that $ST(P) \geq 1$ for any almost hypoelliptic polynomial $P \in \mathbb{I}_2$.

Список литературы

[1] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, 2, Springer - Verlag (1983).

[2] Krzyztof Maurin, Methods of Hilert spaces, PWN, Warsaw (1959), English transl (1967).

[3] A. Seidenberg, "A new decision method for elementary algebra", Ann.Math., **60**, 365 – 374 (1954).

[4] A. Tarski, "A decision method for elementary algebra and geometry", Manuscript, Berkley (1951).

[5] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, "Интегральные представления функций и теоремы вложения", Москва, Наука, Физматгиз (1996).

[6] F. Treves, "Fundamental solutions of linear partial differential equations", Amer. J. Math., **84**, 561 – 577 (1962).

[7] Ю. В. Егоров, "О субэллиптических операторах", УМН, **30**, но. 2, 57 – 114 (1975).

[8] М. И. Вишик, Г. Н. Эскин, "Нормально разрешимые задачи для эллиптических систем", Мат. Сб., **74**, но. 3, 326 – 356 (1967).

[9] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Поведение на бесконечности неэллиптических многочленов", Изв. НАН Армении, Мат., **39**, но.3, 21 – 38 (2004).

[10] Г. Г. Казарян и В. Н. Маргарян, "Число Зайденберга - Тарского для двумерных вырождающихся многочленов", Изв. НАН Армении, Мат., **39**, но. 6, 3 – 16 (2004).

[11] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "On increase at infinity of the almost hypoelliptic polynomials", Eurazian Math. Journal, **4**, no. 4, 67 – 89 (2014).

[12] В. П. Михайлов, "О поведение на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, **91**, 59 – 81 (1967).

[13] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Об одном классе гипоэллиптических полиномов", Матем. сб. **75** (117):3, 400 – 416 (1968).

[14] V. N. Margaryan, H. G. Ghazaryan, "Almost hypoelliptic operators with constant powers", Eurasian Mat. Journal...

[15] В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, "О выделении гладких решений одного класса почти гипоэллиптических уравнений постоянной мощности", Изв. НАН Армении ....

[16] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials", Doklady Ross. Acad. Nauk, Math., **398**, no. 6, 701 – 703 (2004).

[17] Г. Г. Казарян, "О почти гипоэллиптических многочленах, возрастающих на бесконечности", Изв. НАН Армении, Мат., **46**, но. 6, 11 – 30 (2011).

[18] B. Pini, "Osservazoni sulla ipoellipticita", Boll.Un.Mat.Ital., (3), **18**, 420 – 432 (1963).

[19] Г. Г. Казарян, "Об одном семействе гипоэллиптических полиномов", Изв. АН Арм ССР, Математика, **9**, но. 3, 189 – 211 (1974).

Поступила 10 февраля 2016