Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 5, 2017, стр. 25-35.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ФРАНКЛИНА С "ХОРОШЕЙ" МАЖОРАНТОЙ ЧАСТИЧНЫХ СУММ

Г. Г. ГЕВОРКЯН, М. П. ПОГОСЯН

Ереванский государственный университет, Армения[1]
Американский университет Армении
E-mails: *ggg@ysu.am*, *michael@ysu.am*

Аннотация. Найдены формулы восстановления коэффициентов кратного ряда Франклина по его сумме, удовлетворяющего условиям: 1) квадратные частичные суммы с номерами 2^ν почти всюду сходятся, 2) мажоранта частичных сумм с номерами 2^ν удовлетворяет некоторому необходимому условию.

MSC2010 number: 42B05, 42C05, 42C10, 42C25.

Ключевые слова: кратные ряды Франклина; теорема единственности; теорема восстановления.

1. Введение

Ортонормированная система Франклина состоит из кусочно-линейных и непрерывных функций. Эта система построена Ф. Франклином [1] как первый пример полной ортонормированной системы, которая является базисом в пространстве непрерывных на $[0;1]$ функций. Для формулировки результатов напомним некоторые определения.

Пусть $n = 2^\mu + \nu$, $\mu \geq 0$, где $1 \leq \nu \leq 2^\mu$. Обозначим

$$s_{n,i} = \begin{cases} \dfrac{i}{2^{\mu+1}}, & \text{для } \ 0 \leq i \leq 2\nu, \\ \dfrac{i-\nu}{2^\mu}, & \text{для } \ 2\nu < i \leq n. \end{cases}$$

Через S_n обозначим пространство функций, непрерывных и кусочно-линейных на $[0;1]$ с узлами $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$, т.е. $f \in S_n$, если $f \in C[0;1]$ и линейная на каждом отрезке $[s_{n,i-1}; s_{n,i}]$, $i = 1, 2, ..., n$. Ясно, что $\dim S_n = n+1$ и множество $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$ получается добавлением точки $s_{n,2\nu-1}$ к множеству $\{s_{n-1,i}\}_{i=0}^{n-1}$. Поэтому, существует единственная функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1},

[1]Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта 10-3/1-41

$f_n(s_{n,2\nu-1}) > 0$ и $\|f_n\|_2 = 1$. Полагая $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$, $x \in [0;1]$, получим ортонормированную систему $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, которая эквивалентным образом определена Ф. Франклином [1].

В настоящей работе рассматриваются кратные ряды по системе Франклина.

Пусть d некоторое натуральное число. Рассмотрим d-мерные ряды Франклина

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_d) \in \mathbb{N}_0^d$-вектор с неотрицательными целочисленными координатами, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d) \in [0;1]^d$ и $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = f_{m_1}(x_1) \cdot ... \cdot f_{m_d}(x_d)$.

Обозначим через $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ квадратные частичные суммы ряда (1.1) с номерами 2^ν, т.е.

$$\sigma_\nu(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}:m_i\leq 2^\nu, i=1,...,d} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_d)$. Положим

$$\sigma^*(\mathbf{x}) = \sup_\nu |\sigma_\nu(\mathbf{x})|.$$

В работе [2] анонсирована и в работе [3] доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если суммы (1.2) сходятся по мере к интегрируемой функции f и выполняется условие*

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} \left(\lambda \cdot \operatorname{mes}\left\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : \sigma^*(\mathbf{x}) > \lambda\right\}\right) = 0, \tag{1.3}$$

то ряд (1.1) является рядом Фурье-Франклина функции f.

В настоящей работе мы докажем следующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть суммы (1.2) сходятся по мере к некоторой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_k \to +\infty$ выполняется*

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\lambda_k \cdot \operatorname{mes}\left\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : \sigma^*(\mathbf{x}) > \lambda_k\right\}\right) = 0. \tag{1.4}$$

Тогда для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ имеет место

$$a_{\mathbf{m}} = \lim_{k\to+\infty} \int_{[0;1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{1.5}$$

где

$$[f(\mathbf{x})]_\lambda = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \textit{если} \;\; |f(\mathbf{x})| \leq \lambda, \\ 0, & \textit{если} \;\; |f(\mathbf{x})| > \lambda. \end{cases} \tag{1.6}$$

Напомним, что функция f называется A-интегрируемой на $[0;1]^d$, если выполняется

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\lambda\cdot\operatorname{mes}\left\{\mathbf{x}\in[0;1]^d:|f(\mathbf{x})|>\lambda\right\}\right)=0 \tag{1.7}$$

и существует

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{[0;1]^d}[f(\mathbf{x})]_\lambda d\mathbf{x}=:(A)\int_{[0;1]^d}f(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{1.8}$$

Поскольку для любого фиксированного $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d$ функция $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$ ограничена, то при выполнении (1.7) имеет место

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{[0;1]^d}[f(\mathbf{x})]_\lambda f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{[0;1]^d}[f(\mathbf{x})f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})]_\lambda d\mathbf{x},$$

если хотя бы один из этих пределов существует.

Поэтому из теоремы 1.2 следует

Теорема 1.3. *Если суммы (1.2) по мере сходятся к некоторой функции f и выполняется условие (1.7), то функция f является A-интегрируемой и ряд (1.1) является рядом Фурье-Франклина в смысле A-интегрирования, т.е. для любого $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d$ имеет место*

$$a_{\mathbf{m}}=(A)\int_{[0;1]^d}f(\mathbf{x})f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Аналоги теорем 1.1–1.3 для простых (однократных) рядов Франклина доказаны в работах [4], [5]. В работе [6] аналогичная теорема доказана для простых рядов по общей системе Франклина, порожденной квазидиадической и сильно регулярной последовательностью. Поскольку в настоящей работе общая система Франклина не рассматривается, то определение этой системы приводится не будет. В работах [4]–[6] вместо мажоранты частичных сумм с номерами 2^ν фигурирует мажоранта всех частичных сумм. Поэтому, теоремы 1.1–1.3 новые также для простых рядов Франклина.

Аналогичные вопросы для систем Прайса, порожденной ограниченной последовательностью, рассмотрены В. В. Костиным [7], [8]. При доказательстве Теоремы 1.2 в основном применяем методы из работы первого автора [3]. И местами, ради полноты изложения, мы вынуждены повториться.

2. Доказательство Теоремы 1.2

Введем некоторые обозначения. Положим $t_j^\nu=\dfrac{j}{2^\nu}$, при $0\le j\le 2^\nu$, а также $t_{-1}^\nu=t_0^\nu=0$ и $t_{2^\nu+1}^\nu=t_{2^\nu}^\nu=1$. Обозначим $\delta_j^\nu=(t_{j-1}^\nu;t_{j+1}^\nu)$.

Для любого $\nu > 1$ определим функции $B_i^\nu(x)$, $i = 0, ..., 2^\nu$, следующим образом:

$$B_i^\nu(t_j^\nu) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases}, \quad j = 0, ..., 2^\nu, \text{ и } B_i^\nu(t) \text{ линейна на } [t_{j-1}^\nu; t_j^\nu], \; j = 1, ..., 2^\nu.$$

Положим $\mathbb{N}_\nu^d = \{0, 1, ..., 2^\nu\}^d$. Тогда

$$\sigma_\nu(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_\nu^d} a_\mathbf{m} f_\mathbf{m}(\mathbf{x}).$$

Для вектора $\mathbf{j} = (j_1, ..., j_d) \in \mathbb{N}_\nu^d$ обозначим

$$\Delta_\mathbf{j}^\nu = \delta_{j_1}^\nu \times \cdots \times \delta_{j_d}^\nu, \quad \mathbf{t_j}^\nu = (t_{j_1}^\nu, ..., t_{j_d}^\nu) \tag{2.1}$$

и

$$B_\mathbf{j}^\nu(\mathbf{t}) = B_\mathbf{j}^\nu(t_1, ..., t_d) = B_{j_1}^\nu(t_1) \cdot ... \cdot B_{j_d}^\nu(t_d).$$

Нетрудно заметить, что $\sum_{j=0}^{2^\nu} B_j^\nu(x) = 1$, когда $x \in [0;1]$. Поэтому

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_\nu^d} B_\mathbf{j}^\nu(\mathbf{x}) = 1, \quad \text{когда } \mathbf{x} \in [0;1]^d, \quad \text{и } \operatorname{supp} B_\mathbf{j}^\nu = \overline{\Delta_\mathbf{j}^\nu}.$$

Нетрудно заметить также, что

$$\int_{[0;1]^d} B_\mathbf{j}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Delta_\mathbf{j}^\nu} B_\mathbf{j}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \prod_{i=1}^d \int_{\delta_{j_i}^\nu} B_{j_i}^\nu(x_i) dx_i = \prod_{i=1}^d \frac{\operatorname{mes}(\delta_{j_i}^\nu)}{2} = \frac{\operatorname{mes}(\Delta_\mathbf{j}^\nu)}{2^d}.$$

Поэтому для

$$M_\mathbf{j}^\nu(\mathbf{x}) = \frac{2^d}{\operatorname{mes}(\Delta_\mathbf{j}^\nu)} \cdot B_\mathbf{j}^\nu(\mathbf{x}) \tag{2.2}$$

имеем

$$\int_{[0;1]^d} M_\mathbf{j}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1. \tag{2.3}$$

Очевидно, что как система функций $\{B_\mathbf{j}^\nu\}_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_\nu^d}$, так и система функций $\{M_\mathbf{j}^\nu\}_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_\nu^d}$, образуют базис в линейном пространстве

$$\mathbf{S}_\nu := \left\{ \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_\nu^d} a_\mathbf{m} f_\mathbf{m}(\mathbf{x}) : a_\mathbf{m} \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2.4}$$

Поэтому верна следующая лемма.

Лемма 2.1. *Если $F \in \mathbf{S}_\nu$ и $F \neq 0$, то существует $\mathbf{j} \in \mathbb{N}_\nu^d$, такое что*

$$(F, M_\mathbf{j}^\nu) := \int_{[0;1]^d} F(\mathbf{x}) M_\mathbf{j}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \neq 0.$$

В работе [3] доказаны следующие леммы

Лемма 2.2. *Для любых $M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x})$ и $\nu > \nu_0$ существуют числа $\alpha_{\mathbf{j}}$ такие что*

$$M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_\nu^d} \alpha_{\mathbf{j}} M_{\mathbf{j}}^{\nu}(\mathbf{x}),$$

причем

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}_\nu^d} \alpha_{\mathbf{j}} = 1, \quad \alpha_{\mathbf{j}} \geq 0 \quad \text{и} \quad \alpha_{\mathbf{j}} = 0, \quad \text{если} \quad \Delta_{\mathbf{j}}^{\nu} \not\subset \Delta_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}.$$

Лемма 2.3. *Пусть функция F определена на $\Delta := [\alpha_1;\beta_1] \times \cdots \times [\alpha_d;\beta_d]$, $d \in \mathbb{N}$, и является линейной функцией по каждой переменной. Тогда если $L = \max_{\mathbf{t}\in\Delta}|F(\mathbf{t})|$, то*

$$\operatorname{mes}\left\{\mathbf{t}\in\Delta : |F(\mathbf{t})| \geq \frac{L}{2^d}\right\} \geq \frac{\operatorname{mes}(\Delta)}{3^d}.$$

Доказательство теоремы 1.2. Пусть суммы (1.2) по мере сходятся к функции f и ряд (1.1) удовлетворяет условию (1.4). Сначала докажем, что для произвольного ν_0 и $\mathbf{j}_0 \in \mathbb{N}_{\nu_0}^d$ имеет место

$$\int_{[0;1]^d} \sigma_{\nu_0}(\mathbf{x}) M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \int_{[0;1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{2.5}$$

Обозначим

$$E_k = \left\{\mathbf{x} \in \operatorname{supp} M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0} = \overline{\Delta_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}} : \sigma^*(\mathbf{x}) > \lambda_k\right\}.$$

Пусть ε-произвольное положительное число. По условию теоремы, можно выбрать такое k_0, чтобы выполнялись

$$2^{10d} \cdot 2^{\nu_0 d} \cdot \lambda_k \cdot \operatorname{mes}(E_k) < \varepsilon, \quad \text{когда} \quad k \geq k_0, \tag{2.6}$$

и

$$\operatorname{mes}(E_k) < 2^{-8d} \operatorname{mes}(\operatorname{supp} M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}), \quad \text{когда} \quad k \geq k_0. \tag{2.7}$$

Для $\nu \geq \nu_0$ обозначим

$$\Omega_\nu = \left\{A : A = \left(\frac{j_1 - 1}{2^\nu}; \frac{j_1}{2^\nu}\right) \times \cdots \times \left(\frac{j_d - 1}{2^\nu}; \frac{j_d}{2^\nu}\right), A \subset \operatorname{supp} M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}\right\}$$

Если для некоторого $A \in \Omega_\nu$ выполняется

$$\operatorname{mes}(E_k \cap A) < 2^{-2d} \operatorname{mes}(A), \tag{2.8}$$

то

$$|\sigma_\nu(\mathbf{x})| \leq 2^d \lambda_k, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in A. \tag{2.9}$$

Действительно, поскольку на A функция $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ линейная по каждой переменной x_j, $j = 1, ..., d$, то в силу леммы 2.3 получим, что если бы имело место $|\sigma_\nu(\mathbf{x}_0)| > 2^d \cdot \lambda_k$ для некоторого $\mathbf{x}_0 \in A$, тогда выполнялось бы

$$\mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in A : |\sigma_\nu(\mathbf{x})| > \lambda_k\} \geq 3^{-d}\mathrm{mes}(A),$$

которое противоречит (2.8).

Из (2.7) следует, что

$$\mathrm{mes}(E_k \cap A) < 2^{-7d}\mathrm{mes}(A), \quad \text{когда} \quad A \in \Omega_{\nu_0}. \tag{2.10}$$

Теперь для $\nu \geq \nu_0$ по индукции определим семейства Ω_ν^1 и Ω_ν^2. Для $\nu = \nu_0$ положим

$$\Omega_{\nu_0}^1 = \left\{A \in \Omega_{\nu_0} : \mathrm{mes}(A \cap E_k) > 2^{-6d} \cdot \mathrm{mes}(A)\right\}, \quad Q_{\nu_0} = \bigcup_{A \in \Omega_{\nu_0}^1} A,$$

и

$$\Omega_{\nu_0}^2 = \{A \in \Omega_{\nu_0} : A \not\subset Q_{\nu_0}\}, \quad P_{\nu_o} = \bigcup_{A \in \Omega_{\nu_0}^2} A.$$

Из (2.10) следует, что $Q_{\nu_0} = \emptyset$ и $P_{\nu_0} = \mathrm{supp} M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}$.

Допуская, что определены $\Omega_{\nu'}^1$, $\Omega_{\nu'}^2$, $Q_{\nu'}$ и $P_{\nu'}$, для $\nu' < \nu$, определим семейства Ω_ν^1 и Ω_ν^2 следующим образом.

$$\Omega_\nu^1 = \left\{A \in \Omega_\nu : \mathrm{mes}(A \cap E_k) > 2^{-6d}\mathrm{mes}(A) \ \text{ и } \ A \not\subset \bigcup_{\nu' < \nu} Q_{\nu'}\right\}, \tag{2.11}$$

$$Q_\nu = \bigcup_{A \in \Omega_\nu^1} A,$$

$$\Omega_\nu^2 = \left\{A \in \Omega_\nu : A \not\subset \bigcup_{\nu' \leq \nu} Q_{\nu'}\right\}.$$

Положим также

$$P_\nu = \bigcup_{A \in \Omega_\nu^2} A.$$

Таким образом определенные семейства Ω_ν^1, Ω_ν^2 и множества Q_ν, P_ν обладают следующими свойствами: $\Omega_\nu^1 \subset \Omega_\nu$, $\Omega_\nu^2 \subset \Omega_\nu$,

$$\mathrm{supp} M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0} = P_\nu \bigcup \left(\bigcup_{\nu' \leq \nu} Q_{\nu'}\right), \quad P_\nu \bigcap \left(\bigcup_{\nu' \leq \nu} Q_{\nu'}\right) = \emptyset \tag{2.12}$$

$$Q_{\nu'} \bigcap Q_{\nu''} = \emptyset, \quad \text{если} \quad \nu' \neq \nu''. \tag{2.13}$$

Из (2.11) и (2.13) следует, что

$$\operatorname{mes}\left(\bigcup_{\nu'\leq\nu} Q_{\nu'}\right) < 2^{6d}\operatorname{mes}(E_k) \text{ для любого } \nu. \tag{2.14}$$

Обозначим

$$\mathbf{J}_\nu = \left\{\mathbf{j} : \Delta_\mathbf{j}^\nu \cap Q_\nu \neq \emptyset \text{ и } \Delta_\mathbf{j}^\nu \subset P_{\nu-1}\right\}. \tag{2.15}$$

Если $\mathbf{j} = (j_1, ..., j_d) \in \mathbf{J}_\nu$ и $\Delta_\mathbf{j}^\nu = \left[\frac{j_1-1}{2^\nu}; \frac{j_1+1}{2^\nu}\right] \times \cdots \times \left[\frac{j_d-1}{2^\nu}; \frac{j_d+1}{2^\nu}\right]$, то для любого множества

$$B := \left[\frac{i_1-1}{2^\nu}; \frac{i_1}{2^\nu}\right] \times \cdots \times \left[\frac{i_d-1}{2^\nu}; \frac{i_d}{2^\nu}\right], \text{ где } i_q = j_q \text{ или } j_q+1,\ q = 1, ..., d, \tag{2.16}$$

имеет место

$$\operatorname{mes}(B \cap E_k) < 2^{-5d}\operatorname{mes}(B). \tag{2.17}$$

Действительно, если для некоторого B не выполняется (2.17), тогда для куба $D \in \Omega_{\nu-1}$, с условием $B \subset D$, выполнится

$$\operatorname{mes}(D \cap E_k) \geq 2^{-6d}\operatorname{mes}(D), \tag{2.18}$$

так как $\operatorname{mes}(D) = 2^d \cdot \operatorname{mes}(B)$. Из соотношения (2.18) следует, что $D \subset \bigcup_{\nu'<\nu} Q_{\nu'}$. Следовательно, $B \subset \bigcup_{\nu'<\nu} Q_{\nu'}$ и $\Delta_\mathbf{j}^\nu \bigcap \left(\bigcup_{\nu'<\nu} Q_{\nu'}\right) \neq \emptyset$, которое противоречит условию $\Delta_\mathbf{j}^\nu \subset P_{\nu-1}$ из (2.15) и соотношению (2.12).

В силу (2.8), (2.9), из (2.15)-(2.17) получим

$$|\sigma_\nu(\mathbf{x})| < 2^d \cdot \lambda_k, \text{ когда } \mathbf{x} \in \Delta_\mathbf{j}^\nu,\ \mathbf{j} \in \mathbf{J}_\nu. \tag{2.19}$$

Очевидно, аналогично получим

$$|\sigma_\nu(\mathbf{x})| < 2^d \cdot \lambda_k, \text{ когда } \mathbf{x} \in \Delta_\mathbf{j}^\nu \subset P_\nu. \tag{2.20}$$

Теперь по индукции определим разложения ψ_n для $M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}$, удовлетворяющие условиям:

$$M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0} = \psi_n = \sum_{\nu\leq n}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n M_\mathbf{j}^\nu + \sum_{\mathbf{j}:\Delta_\mathbf{j}^n \subset P_n} \alpha_\mathbf{j}^n M_\mathbf{j}^n, \tag{2.21}$$

$$\sum_{\nu\leq n}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n + \sum_{\mathbf{j}:\Delta_\mathbf{j}^n \subset P_n} \alpha_\mathbf{j}^n = 1, \quad \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n \geq 0, \quad \alpha_\mathbf{j}^n \geq 0. \tag{2.22}$$

Положим $\psi_{\nu_0} = M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}$. Очевидно ψ_{ν_0} удовлетворяет условиям (2.21), (2.22). Допуская, что определено ψ_n, удовлетворяющее условиям (2.21), (2.22), определим

ψ_{n+1}. Для $\mathbf{j}$, с условием $\Delta_{\mathbf{j}}^n \subset P_n$, в силу леммы 2.2, имеем

$$M_{\mathbf{j}}^n = \sum_{\mathbf{v}:\Delta_{\mathbf{v}}^{n+1} \subset \mathrm{supp} M_{\mathbf{j}}^n} \beta_{\mathbf{v}} M_{\mathbf{v}}^{n+1}, \quad \text{с} \quad \beta_{\mathbf{v}} \geq 0. \tag{2.23}$$

Заметим, что если $\Delta_{\mathbf{j}}^n \subset P_n$ и выполняется (2.23), то либо $\Delta_{\mathbf{v}}^{n+1} \cap Q_{n+1} \neq \emptyset$, и поэтому $\mathbf{v} \in \mathbf{J}_{n+1}$, либо $\Delta_{\mathbf{v}}^{n+1} \subset P_{n+1}$. Поэтому, подставляя (2.23) в (2.21), и группируя подобные члены (одно и тоже $\Delta_{\mathbf{v}}^{n+1}$ может входить в разные суммы (2.23)), получим

$$M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0} = \psi_{n+1} = \sum_{\nu \leq n+1} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^{n+1} M_{\mathbf{j}}^\nu + \sum_{\mathbf{j}:\Delta_{\mathbf{j}}^{n+1} \subset P_{n+1}} \alpha_{\mathbf{j}}^{n+1} M_{\mathbf{j}}^{n+1}. \tag{2.24}$$

Неотрицательность коэффициентов $\alpha_{\nu,\mathbf{j}}^{n+1}$, $\alpha_{\mathbf{j}}^{n+1}$ в (2.24) следует из неотрицательности коэффициентов в (2.23) и (2.21). Учитывая, что интегралы всех функций $M_{\mathbf{j}}^\nu$ равны единице (см. (2.3)), из (2.24) получим

$$\sum_{\nu \leq n+1} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^{n+1} + \sum_{\mathbf{j}:\Delta_{\mathbf{j}}^{n+1} \subset P_{n+1}} \alpha_{\mathbf{j}}^{n+1} = 1, \quad \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^{n+1} \geq 0, \quad \alpha_{\mathbf{j}}^{n+1} \geq 0.$$

Итак, мы доказали возможность представления (2.21), с коэффициентами (2.22). Отметим, что если $\nu_0 \leq \nu \leq n$ и для $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_d)$ выполняется $\max_i p_i > 2^\nu$, то $(f_{\mathbf{p}}, M_{\mathbf{j}}^\nu) = 0$, для $\mathbf{j} \in \mathbb{N}_\nu^d$. Поэтому

$$(\sigma_n, M_{\mathbf{j}}^\nu) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathbf{N}_n^d} a_{\mathbf{p}} (f_{\mathbf{p}}, M_{\mathbf{j}}^\nu) = \sum_{\mathbf{p} \in \mathbf{N}_\nu^d} a_{\mathbf{p}} (f_{\mathbf{p}}, M_{\mathbf{j}}^\nu) = (\sigma_\nu, M_{\mathbf{j}}^\nu).$$

Следовательно, с учетом (2.21), для $n > \nu_0$ имеем

$$\int_{[0;1]^d} \sigma_{\nu_0}(\mathbf{x}) M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Delta_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}} \sigma_n(\mathbf{x}) M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \tag{2.25}$$

$$\sum_{\nu \leq n} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n (\sigma_n, M_{\mathbf{j}}^\nu) + \sum_{\mathbf{j}:\Delta_{\mathbf{j}}^n \subset P_n} \alpha_{\mathbf{j}}^n (\sigma_n, M_{\mathbf{j}}^n) =$$

$$\sum_{\nu \leq n} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n (\sigma_\nu, M_{\mathbf{j}}^\nu) + \sum_{\mathbf{j}:\Delta_{\mathbf{j}}^n \subset P_n} \alpha_{\mathbf{j}}^n (\sigma_n, M_{\mathbf{j}}^n) =: I_{n,1} + I_{n,2}.$$

Из (2.19) и (2.3) следует

$$|I_{n,1}| \leq \sum_{\nu \leq n} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n |(\sigma_\nu, M_{\mathbf{j}}^\nu)| \leq 2^d \cdot \lambda_k \sum_{\nu \leq n} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n \int_{\Delta_{\mathbf{j}}^\nu} M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{2.26}$$

Из (2.22) и (2.21) имеем

$$\sum_{\nu \leq n} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n \int_{\Delta_{\mathbf{j}}^\nu} M_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_{D_n} M_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{2.27}$$

где

$$D_n = \bigcup_{\nu \le n} \bigcup_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}_\nu} \Delta_{\mathbf{j}}^{\nu}. \tag{2.28}$$

Из определения множества $\mathbf{J}_\nu$ (см. (2.15)) следует, что

$$\frac{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^{\nu} \bigcap Q_\nu)}{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^{\nu})} \ge 2^{-d}.$$

Из последнего и (2.14), (2.13) получаем, что

$$\operatorname{mes}(D_n) \le 2^{7d} \cdot \operatorname{mes}(E_k). \tag{2.29}$$

Поэтому, из (2.26), (2.27) и (2.6) следует, что

$$|I_{n,1}| \le 2^{(\nu_0+1)d} \cdot 2^{7d} \cdot \lambda_k \cdot \operatorname{mes}(E_k) < 2^{-2d}\varepsilon. \tag{2.30}$$

Для $I_{n,2}$ имеем

$$I_{n,2} = \left(\sigma_n, \sum_{\mathbf{j}:\Delta_{\mathbf{j}}^n \subset P_n} \alpha_{\mathbf{j}}^n M_{\mathbf{j}}^n\right) = \tag{2.31}$$

$$\left(\sigma_n - [f]_{\lambda_k}, \sum_{\mathbf{j}:\Delta_{\mathbf{j}}^n \subset P_n} \alpha_{\mathbf{j}}^n M_{\mathbf{j}}^n\right) + \left([f]_{\lambda_k}, \sum_{\mathbf{j}:\Delta_{\mathbf{j}}^n \subset P_n} \alpha_{\mathbf{j}}^n M_{\mathbf{j}}^n\right) =: I_{n,3} + I_{n,4}.$$

Обозначим $H_n = \bigcup_{\mathbf{j}:\Delta_{\mathbf{j}}^n \subset P_n} \Delta_{\mathbf{j}}^n$ и $T_k = \{\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0} : |f(\mathbf{x})| > \lambda_k\}$. Ясно, что $T_k \subset E_k$, и поэтому $\operatorname{mes}(T_k) < \operatorname{mes}(E_k)$. Следовательно (см. (2.6))

$$\operatorname{mes}(T_k) < \varepsilon \cdot 2^{-10d-\nu_0 d} \cdot \lambda_k^{-1}. \tag{2.32}$$

Из (2.20) имеем, что

$$|\sigma_n(\mathbf{x})| < 2^d \cdot \lambda_k, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in H_n.$$

Следовательно

$$|\sigma_n(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}| < (2^d + 1) \cdot \lambda_k, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in H_n. \tag{2.33}$$

Очевидно

$$|I_{n,3}| \le 2^{\nu_0 d} \int_{H_n} |\sigma_n(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}| d\mathbf{x} = \tag{2.34}$$

$$2^{\nu_0 d} \left(\int_{H_n \setminus T_k} |\sigma_n(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}| d\mathbf{x} + \int_{H_n \bigcap T_k} |\sigma_n(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}| d\mathbf{x} \right).$$

Из (2.33) и (2.32) следует, что второй интеграл в (2.34) меньше $\varepsilon/3$ при всех n. А первый интеграл стремится к нулю когда $n \to \infty$, поскольку подинтегральная функция на H_n ограничена и по мере стремится к нулю вне T_k. Следовательно для $I_{n,3}$ имеем

$$|I_{n,3}| < \varepsilon/2, \quad \text{когда } n \text{ достаточно большое.} \tag{2.35}$$

Для $I_{n,4}$ из (2.21) имеем

$$I_{n,4} = ([f]_{\lambda_k}, M^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}) - \left([f]_{\lambda_k}, \sum_{\nu\le n}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_\nu} \alpha^n_{\nu,\mathbf{j}} M^\nu_{\mathbf{j}}\right) =: ([f]_{\lambda_k}, M^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}) + I_{n,5}. \tag{2.36}$$

Из (2.28), (2.29) и (2.6) следует, что

$$\operatorname{mes}\left(\operatorname{supp}\left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_\nu} \alpha^n_{\nu,\mathbf{j}} M^\nu_{\mathbf{j}}\right)\right) < 2^{7d}\cdot \operatorname{mes}(E_k) < 2^{-3d-\nu_0 d}\cdot\varepsilon\cdot\lambda_k^{-1}.$$

Кроме того (см. (2.21), (2.22)) имеем

$$\left|\sum_{\mathbf{j}\in\mathbf{J}_\nu} \alpha^n_{\nu,\mathbf{j}} M^\nu_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})\right| \le |M^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x})| \le 2^{(\nu_0+1)d}.$$

Следовательно

$$|I_{n,5}| < 2^{-2d}\cdot\varepsilon. \tag{2.37}$$

Из (2.30), (2.31), (2.35) – (2.37) и (2.25) вытекает, что

$$\left|\int_{[0;1]^d} \sigma_{\nu_0}(\mathbf{x}) M^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{[0;1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} M^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right| < \varepsilon \quad \text{когда } k\ge k_0.$$

Соотношение (2.5) доказано.

Теперь докажем, что для любого $\mathbf{m}\in\mathbb{N}^d_0$ выполняется (1.5). Сначала зафиксируем некоторое ν, с условием $2^\nu \ge \max_{1\le i\le d} m_i$. Тогда (см. (2.4)) $f_{\mathbf{m}} \in \mathbf{S}_\nu$. Учитывая, что система функций $\{M^\nu_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d_\nu}$ образует базис в $\mathbf{S}_\nu$, найдутся коэффициенты $\beta_{\mathbf{j}}$, $\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d_\nu$, такие что

$$f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d_\nu} \beta_{\mathbf{j}} M^\nu_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}). \tag{2.38}$$

Очевидно

$$a_{\mathbf{m}} = (\sigma_\nu, f_{\mathbf{m}}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d_\nu} \beta_{\mathbf{j}}(\sigma_\nu, M^\nu_{\mathbf{j}}).$$

Отсюда, с применением (2.5) и (2.38), получим

$$a_{\mathbf{m}} = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d_\nu} \beta_{\mathbf{j}} \lim_{k\to\infty}\int_{[0;1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} M^\nu_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty}\int_{[0;1]^d}[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Теорема 1.2 полностью доказана.

Abstract. In this paper, we obtain recovery formulas for coefficients of multiple Franklin series by means of its sum, if the series satisfies the following conditions: 1) the square partial sums with indices 2^ν converge almost everywhere, 2) the majorant of partial sums with indices 2^ν satisfies some necessary condition.

Список литературы

[1] Ph. Franklin, "A set of continuos orthogonal functions", Math. Ann. **100**, 522 – 528 (1928).

[2] Г. Г. Геворкян, "Теоремы единственности рядов по системе Франклина", Мат. заметки, **98**, no. 5, 786 – 789 (2015).

[3] Г. Г. Геворкян, "Теорема единственности для кратных рядов Франклина", Мат. заметки, **101**, no. 2, 199 – 201 (2017).

[4] Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по системе Франклина", Мат. заметки, **46**, no. 2, 51 – 58 (1989).

[5] Г. Г. Геворкян, "Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина", Мат. заметки, **59**, no. 4, 521 – 545 (1996).

[6] М. П. Погосян, "О единственности рядов по общей системе Франклина", Изв. НАН Армении, сер. матем., **35**, no. 4, 75 – 81 (2000).

[7] В. В. Костин, "К вопросу о восстановлении коэффициентов рядов по некоторым ортогональным системам функций", Мат. заметки, **73**, no. 5, 704 – 723 (2003).

[8] В. В. Костин, "Обобщение теоремы Л. А. Балашова о подрядах ряда Фурье-Хаара", Мат. заметки, **76**, no. 5, 740 – 747 (2004).

Поступила 28 июня 2016