Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 4, 2017, стр. 51-71.

ЯВЛЕНИЕ ГИББСА ДЛЯ ОБЩЕЙ СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА

В. Г. МИКАЕЛЯН

Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: *mik.vazgen@gmail.com*

Аннотация. Явление Гиббса исследуется для рядов по общей системе Франклина. Общая система Франклина порожденная всюду плотной в $[0,1]$ последовательностью точек $\mathcal{T} = (t_n, n \geq 0)$, это последовательность кусочно линейных непрерывных функций с узлами из $\mathcal{T}$, n-ая функция которой имеет узлы $t_0, \ldots, t_n$. В статье доказано, что явление Гиббса для рядов по общей системе Франклина имеет место почти для всех точек отрезка $[0,1]$.

MSC2010 number: 42C10.

Ключевые слова: явление Гиббса; ряд Фурье; общая система Франклина.

1. Введение

Явлением Гиббса называется определенная особенность поведения частичных сумм ряда Фурье в окрестности точки разрыва функции. Оно впервые обнаружено Г. Уилбрейамом (1848 г.) и значительно позже переоткрыто Дж. Гиббсом (1899 г.). n-ая частичная сумма ряда Фурье имеет большие колебания вблизи скачка, которое достигает максимума частичной суммы, выше заданной функции. При увеличении n скачок не затухает, а стремится к конечному пределу.

Классическая система Франклина – полная ортонормированная система кусочно-линейных непрерывных функций с двоичными узлами. Она была введена Франклином в [1], как пример полной ортонормированной системы, которая является базисом в $C[0,1]$. Затем эта система была исследована многими авторами с разных точек зрения. Хорошо известно, что классическая система Франклина является базисом в $L^p[0,1]$ при $1 \leq p < \infty$ и безусловным базисом при $1 < p < \infty$ (см. [2]).

В данной статье мы исследуем общую систему Франклина, которая получается рассмотрением произвольной последовательности узлов. Берется всюду плотная в $[0,1]$ последовательность различных точек $\mathcal{T} = (t_n, n \geq 0)$ из $[0,1]$ и строится общая система Франклина кусочно-линейных непрерывных функций с узлами

$\mathcal{T}$. Более подробно общая система Франклина определена в параграфе 2. Общая система Франклина также является базисом в $C[0,1]$ и $L^p[0,1]$ при $1 \leq p < \infty$ (см. [3]) и безусловным базисом при $1 < p < \infty$ (см. [4]).

2. Определения и основной результат

Определение 2.1. *Последовательность* $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ *различных точек из* $[0,1]$ *назовем допустимой, если* $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0,1)$ *для любого* $n \geq 2$ *и* $\mathcal{T}$ *всюду плотно в* $[0,1]$.

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \geq 1$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n+1\}$. Пусть $\pi_n = \{x_i^n : x_i^n < x_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n\}$ – неубывающая перестановка последовательности $\mathcal{T}_n$. Тогда через S_n обозначим пространство функций определенных на R, которые непрерывны, линейны на $[x_i^n, x_{i+1}^n]$ для любого $i = 0, 1, ..., n$. Ясно, что $\dim S_n = n+1$ и $S_{n-1} \subset S_n$. Следовательно существует (с точностью до знака) единственная функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\|f_n\|_2 = 1$. Эту функцию назовем n-ной функцией Франклина на R, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$.

Для фиксированного n через N_i^n, $0 \leq i \leq n+1$, обозначим B-сплайны соответствующие π_n, т.е.

$$N_0^n(t) = \begin{cases} \frac{x_1^n - t}{x_1^n - x_0^n} & \text{при } t \in [x_0^n, x_1^n] \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$N_n^n(t) = \begin{cases} \frac{t - x_{n-1}^n}{x_n^n - x_{n-1}^n} & \text{при } t \in [x_{n-1}^n, x_n^n] \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и

$$N_k^n(t) = \begin{cases} \frac{t - x_{k-1}^n}{x_k^n - x_{k-1}^n} & \text{при } t \in [x_{k-1}^n, x_k^n] \\ \frac{x_{k+1}^n - t}{x_{k+1}^n - x_k^n} & \text{при } t \in [x_k^n, x_{k+1}^n] \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

при $1 \leq k \leq n-1$. Ясно, что $\{N_i^n\}_{i=0}^n$ образует базис в пространстве S_n.

Определение 2.2. *Пусть* $\mathcal{T}$ – *допустимая последовательность. Общая система Франклина* $\{f_n, n \geq 0\}$ *соответствующая разбиению* $\mathcal{T}$ *определяется по правилу* $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = \sqrt{3}(2t-1)$, *и для* $n \geq 2$, f_n *есть* n*-ая функция Франклина, соответствующая разбиению* $\mathcal{T}$.

Из оценок L_∞-норм ортогональных проекций на кусочно-линейных функциях (см. [3]) следует, что для каждой последовательности узлов $\mathcal{T}$, соответствующая система Франклина является базисом в $C[0,1]$ и $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$.

Отметим, что в случае $t_n = \dfrac{2m-1}{2^k}$, для $n = 2^k + m$, $k = 0, 1, \ldots$, $m \in \{1, 2, \ldots, 2^k\}$, мы получаем классическую систему Франклина (см. [1]).

Определение 2.3. *Пусть t_0 – точка разрыва первого рода функции $q \in L^1[0,1]$, причем $|q(t_0+) - q(t_0-)| = 2d > 0$, и пусть последовательность функций $\{q_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к $q(t)$ в каждой точке некоторой окресности точки t_0. Функцию*

$$G(t_0, q, \{q_n\}_{n=1}^{\infty}) = G(t_0) = \overline{\lim_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}}}\,\frac{1}{d}\left|q_n(t) - \frac{q(t_0+) + q(t_0-)}{2}\right|$$

назовем функцией Гиббса для последовательности $\{q_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$. Если $G(t_0) > 1$, то скажем, что для последовательности $\{q_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ в точке t_0 имеет место явление Гиббса.

Хорошо известно (см. [5], стр. 123-126), что для частичных сумм ряда Фурье по тригонометрической системе имеет место явление Гиббса: функция $G(t_0)$ не зависит от t_0 и равна постоянной Гиббса

$$G(t_0) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt \approx 1.17.$$

Явление Гиббса для рядов Фурье по системе Уолша исследовано в работах [6] и [7]. Существование явления Гиббса для рядов Фурье по системе Уолша доказано А. М. Зубакином в [6]. В [7] доказано, что значение постоянной Гиббса для частичных сумм рядов Фурье-Уолша зависит от распределения точек разрыва функции, и для двоично-иррациональных точек находиться между числами $\frac{4}{3}$ и $\frac{3}{2}$. Значение $\frac{3}{2}$ достигается почти всюду, а значение $\frac{4}{3}$ в определенных точках.

Явление Гиббса для рядов Фурье по классической системе Франклина исследовано О. Г. Саргсяном в [8], где доказана следующая теорема:

Теорема 2.1. *Пусть t_0 является точкой разрыва первого рода функции $f \in L^1[0,1]$. Обозначим через $S_n(f,t)$ частичную сумму ряда Фурье-Франклина функции f и $G(t_0) = G(t_0, f, \{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty})$. Тогда в каждой точке $t_0 \in (0,1)$*

$$1 + \frac{\sqrt{3}-1}{3} \leq G(t_0) \leq 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3(3+\sqrt{3})},$$

причем почти всюду

$$G(t_0) = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3(3+\sqrt{3})}.$$

Сформулируем основной результат настоящей статьи:

Теорема 2.2. *Пусть t_0 является точкой разрыва первого рода функции $f \in L^1[0,1]$. Обозначим через $S_n(f,t)$ частичную сумму ряда Фурье по общей системе Франклина функции f и $G(t_0) = G(t_0, f, \{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty})$. Тогда*

a) $G(t_0) \le 2$ *для любого* $t_0 \in (0,1)$,

b) $G(t_0) \ge \frac{5}{4}$ *для почти всех* $t_0 \in [0,1]$.

Замечание 2.1. *Заметим, что нижняя грань в теореме 2.2 больше чем нижняя грань в теореме 2.1.*

Следствие 2.1. *Явление Гиббса для рядов Фурье по общей системе Франклина имеет место почти во всех точках отрезка* $[0,1]$.

Замечание 2.2. *В статье* [9] *для общей системы Франклина* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *доказано, что для почти всех* $x \in [0,1]$, *если функция* $f \in L^1[0,1]$ *в точке* x *имеет разрыв первого рода, то ряд Фурье-Франклина расходится в этой точке. До этого в* [10] *было доказано, что для классической системы Франклина последнее свойство справедливо для всех* $x \in [0,1]$. *В связи с этим и с теоремой 2.2 возникают следующие два вопроса:*

Вопрос 2.1. *Справедливо ли утверждение, что для рядов Фурье по произвольной общей системе Франклина явление Гиббса имеет место для всех точек интервала* $(0,1)$?

Вопрос 2.2. *Справедливо ли утверждение, что для произвольной общей системы Франклина, если в точке* $x \in [0,1]$ *функция* $f \in L^1[0,1]$ *имеет разрыв первого рода, то ряд Фурье расходится в этой точке?*

3. Доказательство основного результата

Для упрощения обозначений, иногда будем писать x_i вместо x_i^n. Зафиксируем n-ое разбиение отрезка $[0,1]$:

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1.$$

и обозначим $\lambda_i = x_i - x_{i-1}$. Также, для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ обозначим $\alpha_i = K_n(x_k, x_i)$. Рассмотрим следующую функцию

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \le t \le x \\ 0, & \text{при } x < t \le 1, \end{cases} \qquad x \in (0,1)$$

Обозначим через $S_n(\varphi_x, t)$ последовательность частичных сумм ряда Фурье по общей системе Франклина функции φ_x. Заметим, что

$$S_n(\varphi_x, t) = \int\limits_0^1 \varphi_x(\tau) K_n(t, \tau)\, d\tau = \int\limits_0^x K_n(t, \tau)\, d\tau,$$

где $K_n(x, \tau)$ – n-ое ядро Дирихле общей системы Франклина.

Лемма 3.1. Если $x \in (0,1)$ и $t \in [0,1]$, то

$$-\frac{1}{2} \le S_n(\varphi_x, t) \le \frac{3}{2}.$$

Доказательство. Поскольку функция $S_n(\varphi_x, t)$ кусочно-линейная и непрерывная относительно переменной t, следовательно, достаточно доказать, что

$$-\frac{1}{2} \le S_n(\varphi_x, x_k) \le \frac{3}{2}$$

для любого $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Без ограничения общности мы можем считать, что $x \in [x_m, x_{m+1}]$, где $m \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$. Обозначим $\alpha_i = K_n(x_k, x_i)$, $i = 1, ..., n$. Через x' обозначим точку, которая удовлетворяет условиям $K_n(x_k, x') = 0$ и $x' \in (x_m, x_{m+1})$.

Теперь вычислим $S_n(\varphi_x, x_k)$. Поскольку функция

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, x_m) \\ \frac{x_{m+1} - t}{\lambda_{m+1}} & \text{при } t \in [x_m, x_{m+1}] \\ 0 & \text{при } t \in (x_{m+1}, 1], \end{cases}$$

принадлежит S_n, то

$$\int\limits_0^1 K_n(x_k, t)\, \psi(t)\, dt = \psi(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k \le m \\ 0 & \text{при } k > m. \end{cases}$$

Следовательно, получаем

$$\int\limits_0^{x_m} K_n(x_k, t)\, dt = \int\limits_0^1 K_n(x_k, t)\, \psi(t)\, dt - \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} K_n(x_k, t)\, \frac{x_{m+1} - t}{\lambda_{m+1}} dt$$

$$= \psi(x_k) - \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} \left(\alpha_m + \frac{\alpha_{m+1} - \alpha_m}{\lambda_{m+1}} (t - x_m) \right) \frac{x_{m+1} - t}{\lambda_{m+1}} dt$$

$$= \psi(x_k) - \frac{(\alpha_{m+1} + 2\alpha_m)\lambda_{m+1}}{6} = \begin{cases} 1 - \dfrac{(\alpha_{m+1} + 2\alpha_m)\lambda_{m+1}}{6} & \text{при } k \le m, \\ -\dfrac{(\alpha_{m+1} + 2\alpha_m)\lambda_{m+1}}{6} & \text{при } k > m. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$S_n(\varphi_x, x_k) = \int\limits_0^x K_n(x_k, t)\,dt = \int\limits_0^{x_m} K_n(x_k, t)\,dt + \int\limits_{x_m}^{x} K_n(x_k, t)\,dt$$

$$= \int\limits_0^{x_m} K_n(x_k, t)\,dt + \int\limits_{x_m}^{x} \left(\alpha_m + \frac{\alpha_{m+1} - \alpha_m}{\lambda_{m+1}} (t - x_m) \right) dt$$

$$= \int\limits_0^{x_m} K_n(x_k, t)\,dt + \alpha_m (x - x_m) + \frac{\alpha_{m+1} - \alpha_m}{2\lambda_{m+1}} (x - x_m)^2$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{(\alpha_{m+1} + 2\alpha_m)\lambda_{m+1}}{6} + \alpha_m (x - x_m) + \dfrac{\alpha_{m+1} - \alpha_m}{2\lambda_{m+1}} (x - x_m)^2 & \text{при } k \le m, \\ -\dfrac{(\alpha_{m+1} + 2\alpha_m)\lambda_{m+1}}{6} + \alpha_m (x - x_m) + \dfrac{\alpha_{m+1} - \alpha_m}{2\lambda_{m+1}} (x - x_m)^2 & \text{при } k > m. \end{cases}$$

Случай I: $k \le m$. Если $k < m$, тогда имеем, что (см. [11])

$$(\alpha_i + 2\alpha_{i+1})\lambda_{i+1} = -(2\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2})\lambda_{i+2}$$

для любого $i \in \{k, k+1, \dots, m-1\}$. Следовательно

$$(\alpha_k + 2\alpha_{k+1})\lambda_{k+1} \cdot \prod_{i=k+1}^{m-1} \frac{\alpha_i + 2\alpha_{i+1}}{2\alpha_i + \alpha_{i+1}} = (-1)^{m-k} (2\alpha_m + \alpha_{m+1})\lambda_{m+1}.$$

Из неравенств $|\alpha_i| > 2|\alpha_{i+1}|$ и $\alpha_i \alpha_{i+1} < 0$ (см. [11]) следует, что

$$0 < \frac{\alpha_i + 2\alpha_{i+1}}{2\alpha_i + \alpha_{i+1}} < \frac{1}{2}$$

для любого $i \in \{k+1, k+2, \dots, m-1\}$, поэтому

$$\frac{(\alpha_k + 2\alpha_{k+1})\lambda_{k+1}}{2^{m-k-1}} \ge (-1)^{m-k} (2\alpha_m + \alpha_{m+1})\lambda_{m+1}.$$

Заметим, что из равенства (см. [11])

$$\frac{\alpha_{k-1}\lambda_k}{6} + \frac{\alpha_k(\lambda_k + \lambda_{k+1})}{6} + \frac{\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}}{6} = 1$$

вытекает, что

$$(\alpha_k + 2\alpha_{k+1})\lambda_{k+1} \le \frac{(2\alpha_k + \alpha_{k+1})\lambda_{k+1}}{2} = 3\left(1 - \frac{(2\alpha_k + \alpha_{k-1})\lambda_k}{6}\right) < 3,$$

следовательно

$$(-1)^{m-k}(2\alpha_m + \alpha_{m+1})\lambda_{m+1} < \frac{3}{2^{m-k-1}},$$

в частности

$$(-1)^{m-k}(2\alpha_m + \alpha_{m+1})\lambda_{m+1} < 3, \tag{3.1}$$

при $k < m$. Теперь рассмотрим два подслучая.

а) $\alpha_m > 0$. В этом случае имеем

$$S_n(\varphi_{x_m}, x_k) \le S_n(\varphi_x, x_k) \le S_n(\varphi_{x'}, x_k),$$

потому что

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} K_n(x_k, t)\, dt = \frac{(\alpha_m + \alpha_{m+1})\lambda_{m+1}}{2} > 0.$$

Таким образом достаточно доказать, что

$$S_n(\varphi_{x_m}, x_k) \ge -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad S_n(\varphi_{x'}, x_k) \le \frac{3}{2}. \tag{3.2}$$

Поскольку $\alpha_m, \alpha_k > 0$ и $\alpha_i\alpha_{i+1} < 0$ для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, следовательно $(m-k)\,\vdots\,2$.

Если $k < m$, то используя неравенство (3.1), получим

$$S_n(\varphi_{x_m}, x_k) = 1 - \frac{(\alpha_{m+1} + 2\alpha_m)\lambda_{m+1}}{6} > \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}.$$

Если $k = m$, то будем иметь

$$S_n(\varphi_{x_m}, x_k) = 1 - \frac{(\alpha_{k+1} + 2\alpha_k)\lambda_{k+1}}{6} = \frac{(2\alpha_k + \alpha_{k-1})\lambda_{k+1}}{6} > 0 > -\frac{1}{2}.$$

Теперь докажем второе неравенство в (3.2). Поскольку $x' - x_m = \dfrac{\alpha_m\lambda_{m+1}}{\alpha_m - \alpha_{m+1}}$, следовательно

$$S_n(\varphi_{x'}, x_k) = 1 + \lambda_{m+1}\frac{\alpha_m^2 + \alpha_m\alpha_{m+1} + \alpha_{m+1}^2}{6(\alpha_m - \alpha_{m+1})}.$$

Так как $(m-k)\,\vdots\,2$, то из неравенств (3.1) и

$$\frac{(\alpha_{k+1} + 2\alpha_k)\lambda_{k+1}}{6} \le 1$$

следует, что если $k \le m$, то $\lambda_{m+1} \le \dfrac{6}{2\alpha_m + \alpha_{m+1}}$.

Таким образом

$$S_n(\varphi_{x'}, x_k) \le 1 + \frac{\alpha_m^2 + \alpha_m\alpha_{m+1} + \alpha_{m+1}^2}{(2\alpha_m + \alpha_{m+1})(\alpha_m - \alpha_{m+1})}$$

$$= 1 + \frac{(2\alpha_m + \alpha_{m+1})(\alpha_m - \alpha_{m+1}) + 3\alpha_{m+1}(\alpha_m + \alpha_{m+1})}{2(2\alpha_m + \alpha_{m+1})(\alpha_m - \alpha_{m+1})} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Второе неравенство в (3.2) доказано.

б) $\alpha_m < 0$. В этом случае имеем

$$S_n(\varphi_{x'}, x_k) \le S_n(\varphi_x, x_k) \le S_n(\varphi_{x_m}, x_k),$$

потому что

$$\int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} K_n(x_k, t)\, dt = \frac{(\alpha_m + \alpha_{m+1})\lambda_{m+1}}{2} < 0.$$

Таким образом достаточно доказать, что

$$S_n(\varphi_{x'}, x_k) \ge -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad S_n(\varphi_{x_m}, x_k) \le \frac{3}{2}. \tag{3.3}$$

Поскольку $\alpha_m < 0$, то $k < m$ и $(m-k+1) \vdots 2$. Следовательно, из неравенства (3.1) получим оценку $\lambda_{m+1} < -\dfrac{3}{2\alpha_m + \alpha_{m+1}}$. Имеем также $\alpha_{m+1} > 0$ и $\alpha_m + 2\alpha_{m+1} < 0$. Отсюда следует, что

$$S_n(\varphi_{x'}, x_k) = 1 + \lambda_{m+1}\frac{\alpha_m^2 + \alpha_m\alpha_{m+1} + \alpha_{m+1}^2}{6(\alpha_m - \alpha_{m+1})} > 1 - \frac{\alpha_m^2 + \alpha_m\alpha_{m+1} + \alpha_{m+1}^2}{2(2\alpha_m + \alpha_{m+1})(\alpha_m - \alpha_{m+1})}$$

$$= \frac{3\left(\alpha_m^2 - \alpha_{m+1}(\alpha_m + \alpha_{m+1})\right)}{2(2\alpha_m + \alpha_{m+1})(\alpha_m - \alpha_{m+1})} > 0 > -\frac{1}{2}.$$

Первое неравенство в (3.3) доказано. Вторе неравенство в (3.3) сразу следует из неравенства (3.1):

$$S_n(\varphi_{x_m}, x_k) = 1 - \frac{(\alpha_{m+1} + 2\alpha_m)\lambda_{m+1}}{6} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Случай II: $k > m$. В этом случае из неравенства (см. [11])

$$(\alpha_i + 2\alpha_{i+1})\lambda_{i+1} = -(2\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2})\lambda_{i+2}, \quad i \in \{m-1, m, \dots, k-2\}$$

следует, что

$$(2\alpha_{k-1} + \alpha_k)\lambda_k \cdot \prod_{i=m}^{k-2} \frac{2\alpha_i + \alpha_{i+1}}{\alpha_i + 2\alpha_{i+1}} = (-1)^{k-m}(\alpha_{m-1} + 2\alpha_m)\lambda_m.$$

Из неравенств $|\alpha_i| > 2|\alpha_{i+1}|$ и $\alpha_i\alpha_{i+1} < 0$ (см. [11]) следует, что

$$0 < \frac{2\alpha_i + \alpha_{i+1}}{\alpha_i + 2\alpha_{i+1}} < \frac{1}{2}$$

для любого $i \in \{m, m+1, \dots, k-2\}$, поэтому

$$(-1)^{k-m}(\alpha_{m-1} + 2\alpha_m)\lambda_m \le \frac{(2\alpha_{k-1} + \alpha_k)\lambda_k}{2^{k-m-1}}.$$

Замечая, что

$$(2\alpha_{k-1}+\alpha_k)\lambda_k \le \frac{(\alpha_{k-1}+2\alpha_k)\lambda_k}{2} = 3\left(1-\frac{(\alpha_{k+1}+2\alpha_k)\lambda_{k+1}}{6}\right) < 3,$$

получаем

$$(-1)^{k-m}(\alpha_{m-1}+2\alpha_m)\lambda_m < \frac{3}{2^{k-m-1}},$$

в частности, имеем

$$(-1)^{k-m}(\alpha_{m-1}+2\alpha_m)\lambda_m < 3. \tag{3.4}$$

Опять рассмотрим два подслучая.

а) $\alpha_m > 0$. В этом случае имеем

$$S_n(\varphi_{x_{m+1}}, x_k) \le S_n(\varphi_x, x_k) \le S_n(\varphi_{x'}, x_k),$$

потому что

$$\int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} K_n(x_k,t)\,dt = \frac{(\alpha_m+\alpha_{m+1})\lambda_{m+1}}{2} < 0.$$

Поскольку $\alpha_m > 0$, то $m+1<k$ и $(m-k)\,\vdots\,2$. Следовательно, из неравенств (3.4) получим

$$S_n(\varphi_{x_{m+1}}, x_k) = \frac{(\alpha_m+2\alpha_{m+1})\lambda_{m+1}}{6} > -\frac{1}{2}$$

и

$$S_n(\varphi_{x'}, x_k) = \lambda_{m+1}\frac{\alpha_m^2+\alpha_m\alpha_{m+1}+\alpha_{m+1}^2}{6(\alpha_m-\alpha_{m+1})} < -\frac{\alpha_m^2+\alpha_m\alpha_{m+1}+\alpha_{m+1}^2}{2(\alpha_m+2\alpha_{m+1})(\alpha_m-\alpha_{m+1})}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2\alpha_m(\alpha_m+\alpha_{m+1})-\alpha_{m+1}^2}{2(\alpha_m+2\alpha_{m+1})(\alpha_m-\alpha_{m+1})} < \frac{1}{2} < \frac{3}{2}.$$

б) $\alpha_m < 0$. В этом случае имеем

$$S_n(\varphi_{x'}, x_k) \le S_n(\varphi_x, x_k) \le S_n(\varphi_{x_{m+1}}, x_k),$$

потому что

$$\int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} K_n(x_k,t)\,dt = \frac{(\alpha_m+\alpha_{m+1})\lambda_{m+1}}{2} > 0.$$

Поскольку $\alpha_{m+1} > 0$, следовательно, если $m+1 < k$, то из неравенств (3.4) получим оценку $(\alpha_m+2\alpha_{m+1})\lambda_{m+1} < 6$, но мы также имеем

$$(\alpha_{k-1}+2\alpha_k)\lambda_k = 6\left(1-\frac{(\alpha_{k+1}+2\alpha_k)\lambda_{k+1}}{6}\right) < 6.$$

Таким образом, если $m < k$, то $(\alpha_m + 2\alpha_{m+1})\lambda_{m+1} < 6$. Следовательно

$$S_n(\varphi_{x'}, x_k) = \lambda_{m+1}\frac{\alpha_m^2 + \alpha_m\alpha_{m+1} + \alpha_{m+1}^2}{6(\alpha_m - \alpha_{m+1})} > \frac{\alpha_m^2 + \alpha_m\alpha_{m+1} + \alpha_{m+1}^2}{(\alpha_m + 2\alpha_{m+1})(\alpha_m - \alpha_{m+1})}$$

$$= \frac{3\alpha_m(\alpha_m + \alpha_{m+1})}{2(\alpha_m + 2\alpha_{m+1})(\alpha_m - \alpha_{m+1})} - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$$

и

$$S_n(\varphi_{x_{m+1}}, x_k) = \frac{(\alpha_m + 2\alpha_{m+1})\lambda_{m+1}}{6} < 1 < \frac{3}{2}.$$

Лемма 3.1 доказана. □

Лемма 3.2. Если $0 \le k \le n-1$, то справедливы следующие утверждения.

a) Если $c \in \left(0, \frac{2\sqrt{3}-3}{6}\right]$, то для любого $x \in \left[x_k + \lambda_{k+1}\left(1 - \sqrt{\frac{1-6c}{3}}\right), x_k + \frac{2\lambda_{k+1}}{3}\right]$

$$S_n(\varphi_x, x_k) \ge 1 + c\lambda_{k+1}\alpha_k.$$

b) Если $c \in \left(\frac{2\sqrt{3}-3}{6}, \frac{1}{12}\right]$, то для любого $x \in \left[x_k + \lambda_{k+1}\frac{2-\sqrt{1-12c}}{3}, x_k + \frac{2\lambda_{k+1}}{3}\right]$

$$S_n(\varphi_x, x_k) \ge 1 + c\lambda_{k+1}\alpha_k.$$

Доказательство. Пусть $c \in \left(0, \frac{1}{12}\right]$. Решим следующее неравенство относительно переменной x:

$$S_n(\varphi_x, x_k) \ge 1 + c\lambda_{k+1}\alpha_k. \tag{3.5}$$

Поскольку (см. доказательство леммы 3.1)

$$S_n(\varphi_x, x_k) = 1 - \frac{\lambda_{k+1}(2\alpha_k + \alpha_{k+1})}{6} + \alpha_k(x - x_k) + \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\lambda_{k+1}} \cdot \frac{(x - x_k)^2}{2},$$

следовательно корни уравнения $S_n(\varphi_x, x_k) = 1 + c\lambda_{k+1}\alpha_k$ являются следующие числа

$$x = x_k + \lambda_{k+1}\frac{\alpha_k \pm \sqrt{\frac{(1-6c)\alpha_k^2 + (1+6c)\alpha_k\alpha_{k+1} + \alpha_{k+1}^2}{3}}}{\alpha_k - \alpha_{k+1}}.$$

Обозначим через x' точку, удовлетворяющую следующим условиям: $K_n(x_k, x') = 0$, $x' \in (x_k, x_{k+1})$. Заметим, что из неравенства $\alpha_k > 2|\alpha_{k+1}|$ (см. [11]) следует, что

$$\frac{x' - x_k}{\lambda_{k+1} + x_k - x'} = \frac{\alpha_k}{|\alpha_{k+1}|} > 2,$$

т.е. $x' > x_k + \frac{2\lambda_{k+1}}{3}$ (см. рисунок).

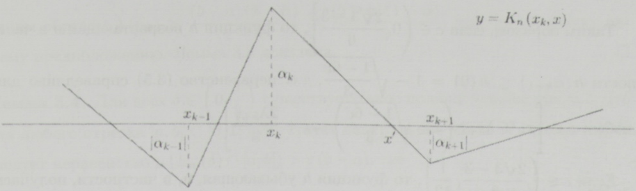

Рис. 1

Следовательно

$$x_k + \lambda_{k+1} \frac{\alpha_k + \sqrt{\dfrac{(1-6c)\,\alpha_k^2 + (1+6c)\,\alpha_k\alpha_{k+1} + \alpha_{k+1}^2}{3}}}{\alpha_k - \alpha_{k+1}}$$

$$\geq x_k + \frac{\alpha_k \lambda_{k+1}}{\alpha_k - \alpha_{k+1}} = x' > x_k + \frac{2\lambda_{k+1}}{3}.$$

Введем функцию

$$h(x) = \frac{\alpha_k - \sqrt{\dfrac{(1-6c)\,\alpha_k^2 + (1+6c)\,\alpha_k x + x^2}{3}}}{\alpha_k - x}, \ x \in \left[-\frac{\alpha_k}{2}, 0\right].$$

Легко проверить, что неравенство $h'(x) \geq 0$ равносильно неравенству (3.6)

$$h'(x) = \frac{2\alpha_k \sqrt{\dfrac{(1-6c)\,\alpha_k^2 + (1+6c)\,\alpha_k x + x^2}{3}} - (1-2c)\,\alpha_k^2 - (1+2c)\,\alpha_k x}{(\alpha_k - x)^2 \cdot 2\sqrt{\dfrac{(1-6c)\,\alpha_k^2 + (1+6c)\,\alpha_k x + x^2}{3}}} \geq 0.$$

Поскольку $\alpha_k > 0$ и $c < \dfrac{1}{12}$, то

$$(1-2c)\,\alpha_k + (1+2c)\,x \geq (1-2c)\,\alpha_k - (1+2c)\,\frac{\alpha_k}{2} = \frac{1-6c}{2}\alpha_k > 0,$$

следовательно неравенство (3.6) равносильно неравенству

$$4\frac{(1-6c)\,\alpha_k^2 + (1+6c)\,\alpha_k x + x^2}{3} \geq ((1-2c)\,\alpha_k + (1+2c)\,x)^2,$$

поэтому $1 - 12c - 12c^2 \geq 0$.

Таким образом, если $c \in \left(0, \dfrac{2\sqrt{3}-3}{6}\right]$, то функция h возрастающая и в частности $h(\alpha_{k+1}) \le h(0) = 1 - \sqrt{\dfrac{1-6c}{3}}$, т.е. неравенство (3.5) справедливо для любых $x \in \left[x_k + \lambda_{k+1}\left(1 - \sqrt{\dfrac{1-6c}{3}}\right), x_k + \dfrac{2\lambda_{k+1}}{3}\right]$.

Если $c \in \left(\dfrac{2\sqrt{3}-3}{6}, \dfrac{1}{12}\right]$, то функция h убывающая, и, в частности, получаем

$$h(\alpha_{k+1}) \le h\left(-\frac{\alpha_k}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{1-12c}}{3}$$

т.е. (3.5) справедливо для любых $x \in \left[x_k + \lambda_{k+1}\dfrac{2-\sqrt{1-12c}}{3}, x_k + \dfrac{2\lambda_{k+1}}{3}\right]$. Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *Если $0 < \alpha < 1$, то для любого отрезка $[a,b] \subset [0,1]$ существует такое натуральное число N, что для любого натурального числа $n \ge N$ существует $s \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ так, что $[x_s, x_{s+1}] \subset (a,b)$ и $\dfrac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s} > \alpha$.*

Доказательство. Предположим, что существует такой отрезок $[a,b] \subset [0,1]$, что для всех $N \in \mathbb{N}$ существует натуральное число $n \ge N$, так, что из $[x_s, x_{s+1}] \subset (a,b)$ следует неравенство $\dfrac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s} \le \alpha$. Обозначим $\lambda(n) = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\lambda_i\}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(n) = 0$, то существует натуральное число N, что для всех натуральных чисел $n \ge N$ выполняется неравенство $\lambda(n) < \dfrac{(b-a)(1-\alpha)}{2}$. Из нашего предположения получаем, что существует такое натуральное число $n_0 \ge N$, что из условия $[x_s, x_{s+1}] \subset (a,b)$ следует $\lambda_{s+1} \le \alpha\lambda_s$. Поскольку $[a,b] \subset [0,1]$, то существуют такие $i, j \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$, что $x_{i-1} \le a < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_j < b \le x_{j+1}$. Таким образом $\lambda_{k+1} \le \alpha\lambda_k$ для всех $k \in \{i, i+1, \ldots, j-1\}$, следовательно

$$\sum_{k=i+1}^{j} \lambda_k \le \alpha \sum_{k=i}^{j-1} \lambda_k < \alpha \sum_{k=i}^{j} \lambda_k,$$

поэтому $(1-\alpha)\sum\limits_{k=i+1}^{j} \lambda_k < \alpha\lambda_i \le \alpha\lambda(n_0)$.

С другой стороны, мы имеем

$$\sum_{k=i+1}^{j} \lambda_k \ge b - a - \lambda_{i-1} - \lambda_{j+1} \ge b - a - 2\lambda(n_0).$$

Таким образом $\lambda(n_0) > \dfrac{(b-a)(1-\alpha)}{2-\alpha} > \dfrac{(b-a)(1-\alpha)}{2}$, что противоречит нашему предположению. Лемма 3.3 доказана. □

Лемма 3.4. Для всех $\delta \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$ существует такое положительное число ε, что для любого отрезка $[a,b] \subset [0,1]$ существует натуральное число N, что из $n \geq N$ следует неравенство $\mu(E_n(\delta) \cap [a,b]) > \varepsilon(b-a)$, где

$$E_n(\delta) = \{x \in [0,1] : \text{существует такой } m \in \{0,1,\ldots,n\}, \text{ что } S_n(\varphi_x, x_m) > 1+\delta\}.$$

Доказательство. Поскольку $\delta \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$, то существуют такие $\alpha \in (0,1)$ и $\varepsilon_1 \in \left(0, \frac{1}{12}\right)$, что $\delta = \dfrac{1-9\varepsilon_1^2}{4} \cdot \dfrac{\alpha}{\alpha+1}$. Теперь в лемме 2 положим $c = \dfrac{1-9\varepsilon_1^2}{12}$. Поскольку

$$\frac{1}{12} > c > \frac{1-\frac{9}{144}}{12} > \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$$

следовательно неравенство (3.5) справедливо для всех $x \in \left[x_k + \left(\frac{2}{3} - \varepsilon_1\right)\lambda_{k+1},\ x_k + \frac{2}{3}\lambda_{k+1}\right]$. Если $\dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > \alpha$, то из неравенства $\alpha_k \geq \dfrac{3}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}$ (см. [11]) вытекает, что

$$S_n(\varphi_x, x_k) \geq 1 + \frac{1-9\varepsilon_1^2}{12}\lambda_{k+1}\alpha_k \geq 1 + \frac{1-9\varepsilon_1^2}{12} \cdot \frac{3\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} > 1 + \frac{1-9\varepsilon_1^2}{4} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1} = 1+\delta.$$

Таким образом, получаем

$$\mu(E_n(\delta) \cap [x_k, x_{k+1}]) > \varepsilon_1 \lambda_{k+1}. \tag{3.7}$$

Теперь возьмем отрезок $[a', b'] \subset [a,b]$ таким чтобы $a' > a$ и $b' - a < \dfrac{b-a}{3}$. Из леммы 3 следует, что существует такое натуральное число N_1, что для любого натурального числа $n \geq N_1$ существует $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, что $[x_i, x_{i+1}] \subset (a', b')$ и $\dfrac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} > \alpha$. Поскольку $[a,b] \subset [0,1]$, то существует $j \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, что $x_j < b \leq x_{j+1}$. Очевидно, что существует такое натуральное число N_2, что для любого натурального числа $n \geq N_2$ имеем $b - x_j < \dfrac{b-a}{3}$.

Пусть $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. Если $\dfrac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s} > \alpha$ для всех $s \in \{i, i+1, \ldots, j-1\}$, то используя (3.7) получим оценки

$$\mu(E_n(\delta) \cap [a,b]) \geq \mu(E_n(\delta) \cap [x_i, x_j]) \geq \varepsilon_1(\lambda_{i+1} + \ldots + \lambda_j)$$

$$= \varepsilon_1(b - a - (x_i - a) - (b - x_j)) \geq \varepsilon_1(b - a - (b' - a) - (b - x_j))$$

Наконец, из этих неравенств получаем

$$\mu\left(E_n(\delta)\cap[a,b]\right)\geq\mu\left(E_n(\delta)\cap[x_i,x_j]\right)$$
$$=\mu\left(E_n(\delta)\cap\left(\bigcup_{s=1}^{k}\Delta_s\right)\right)+\mu\left(E_n(\delta)\cap\left([x_i,x_j]\setminus\left(\bigcup_{s=1}^{k}\Delta_s\right)\right)\right)$$
$$\geq\varepsilon_1(1-\alpha)\sum_{s=1}^{k}\mu(\Delta_s)+\varepsilon_1(1-\alpha)\,\mu\left([x_i,x_j]\setminus\left(\bigcup_{s=1}^{k}\Delta_s\right)\right)=\varepsilon_1(1-\alpha)(x_j-x_i)$$
$$=\varepsilon_1(1-\alpha)(b-a-(x_i-a)-(b-x_j))>\varepsilon_1(1-\alpha)(b-a-(b'-a)-(b-x_j))$$
$$>\varepsilon_1(1-\alpha)\left(b-a-\frac{b-a}{3}-\frac{b-a}{3}\right)=\frac{\varepsilon_1(1-\alpha)}{3}(b-a).$$

Положив $\varepsilon=\dfrac{\varepsilon_1(1-\alpha)}{3}$, будем иметь $\mu\left(E_n(\delta)\cap[a,b]\right)>\varepsilon(b-a)$. Лемма 3.4 доказана. □

Лемма 3.5. Если $A\subset\mathbb{R}$ и $\mu(A)>0$, то для любого $\beta\in(0,1)$ существует такой отрезок $[a,b]$, что

$$\mu\left(A\cap[a,b]\right)>\beta(b-a).$$

Доказательство. Из теоремы Лебега о точках плотности следует, что существует $x\in A$, для которой

$$\lim_{h\to0+}\frac{\mu\left(A\cap[x-h,x+h]\right)}{2h}=1.$$

Следовательно существует $h_0>0$, что

$$\frac{\mu\left(A\cap[x-h_0,x+h_0]\right)}{2h_0}>\beta,$$

т.е. $\mu\left(A\cap[x-h_0,x+h_0]\right)>\beta\left(x+h_0-(x-h_0)\right)$. Лемма 3.5 доказана. □

Лемма 3.6. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность подмножеств $[0,1]$. Если существует такое положительное число ε, что для любого отрезка $[a,b]\subset[0,1]$ существует натуральное число N, что при $n\geq N$, справедливо неравенство

$$\mu\left(A_n\cap[a,b]\right)>\varepsilon(b-a),$$

тогда $\mu\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)=1$.

Доказательство. Обозначим через $g_n(x)$, $x\in[0,1]$ характеристическую функцию множества A_n. Если $x\notin\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$, то существует $n_0\in\mathbb{N}$, что $x\notin A_n$ для любого $n \geq n_0$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$. Таким образом, достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \neq 0$ почти всюду в $[0,1]$. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ для всех $x \in G$ и $\mu(G) > 0$. Из теоремы Егорова следует, что существует такое множество $F \subset [0,1]$, что $\mu(F) > 0$ и $g_n(x) \rightrightarrows 0$ на F, поэтому существует натуральное число N', что $g_n(x) = 0$ для любого $n \geq N'$, т.е. $F \cap A_n = \emptyset$, при $n \geq N'$. Из леммы 3.5 следует, что существует такой отрезок $[a,b] \subset [0,1]$, что

$$\mu(F \cap [a,b]) > (1-\varepsilon)(b-a).$$

С другой стороны, мы имеем, что существует натуральное число N, что

$$\mu(A_n \cap [a,b]) > \varepsilon(b-a),$$

для любого $n \geq N$. Таким образом, если $n \geq \max\{N, N'\}$, то

$$0 = \mu(F \cap A_n) \geq \mu(F \cap [a,b]) + \mu(A_n \cap [a,b]) - \mu([a,b])$$

$$> (1-\varepsilon)(b-a) + \varepsilon(b-a) - (b-a) = 0,$$

что противоречит нашему предположению. Лемма 3.5 доказана. □

Лемма 3.7. *Пусть $x \in [0,1]$. Если существует положительное число δ и такие последовательности натуральных чисел m_k, n_k, что*

$$S_{n_k}(\varphi_x, x_{m_k}) > 1 + \delta,$$

для всех $k \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = x$.

Доказательство. Зафиксируем k и обозначим через S_j площадь треугольника, вершинами которого являются точка $(x_j, K(x_{m_k}, x_j))$ и ближайшие слева и справа от точки x_j нули функции $K(x_{m_k}, t)$. Мы имеем, что существует такое число $\varepsilon \in (0,1)$, что $S_j \leq \varepsilon^{m_k - j} S_{m_k}$ для любого $j \in \{1, 2, \ldots, m_k\}$ и $S_j \leq \varepsilon^{j - m_k} S_{m_k}$ для любого $j \in \{m_k, m_k + 1, \ldots, n\}$ (см. [12]). Заметим, что (см. [11])

$$S_{m_k} \leq \frac{\lambda_{m_k} + \lambda_{m_k+1}}{2} \alpha_{m_k} \leq \frac{\lambda_{m_k} + \lambda_{m_k+1}}{2} \cdot \frac{4}{\lambda_{m_k} + \lambda_{m_k+1}} = 2.$$

Следовательно $S_j \leq 2\varepsilon^{m_k - j}$ для любого $j \in \{1, 2, \ldots, m_k\}$ и $S_j \leq 2\varepsilon^{j - m_k}$ для любого $j \in \{m_k, m_k + 1, \ldots, n\}$.

Допустим, что $x \in [x_{i-1}, x_i]$ и $i \leq m_k$. Тогда

$$1 + \delta < S_{n_k}(\varphi_x, x_{m_k}) = \int\limits_0^x K_{n_k}(x_{m_k}, t)\,dt < \sum_{j=1}^{i} S_j \leq 2\sum_{j=1}^{i} \varepsilon^{m_k - j} < \frac{2\varepsilon^{m_k - i}}{1 - \varepsilon}.$$

Следовательно $i > m_k - \log_\varepsilon \dfrac{(1-\varepsilon)(1+\delta)}{2}$. Если же $i > m_k$, то

$$1+\delta < \int\limits_0^x K_{n_k}(x_{m_k},t)\,dt = 1 - \int\limits_x^1 K_{n_k}(x_{m_k},t)\,dt,$$

поэтому

$$-\delta > \int\limits_x^1 K_{n_k}(x_{m_k},t)\,dt > -\sum_{j=i-1}^{n} S_j \geq -2\sum_{j=i-1}^{n} \varepsilon^{j-m_k} > -\frac{2\varepsilon^{i-1-m_k}}{1-\varepsilon}.$$

Таким образом $i < m_k + 1 + \log_\varepsilon \dfrac{(1-\varepsilon)\delta}{2}$. Поскольку числа $\log_\varepsilon \dfrac{(1-\varepsilon)(1+\delta)}{2}$ и $1 + \log_\varepsilon \dfrac{(1-\varepsilon)\delta}{2}$ не зависят от k, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = x$. Лемма 3.7 доказана. □

Следствие 3.1. $\overline{\lim\limits_{\substack{t\to x\\ n\to\infty}}}\, S_n(\varphi_x,t) \geq \dfrac{9}{8}$, для почти всех $x \in [0,1]$.

Доказательство. Пусть $\delta \in \left(0, \dfrac{1}{8}\right)$. Из лемм 3.4 и 3.6 следует, что

$$\mu\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n(\delta)\right) = 1.$$

Если $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, E_n(\delta)$, то существует такая последовательность натуральных чисел n_k, что $x \in E_{n_k}(\delta)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, что означает, что существует такая последовательность натуральных чисел m_k, что

$$S_{n_k}(\varphi_x, x_{m_k}) > 1+\delta.$$

Следовательно из леммы 3.7 получим $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = x$. Поэтому

$$\overline{\lim_{\substack{t\to x\\ n\to\infty}}}\, S_n(\varphi_x,t) \geq 1+\delta,$$

и это неравенство справедливо для всех $\delta \in \left(0, \dfrac{1}{8}\right)$, следовательно

$$\overline{\lim_{\substack{t\to x\\ n\to\infty}}}\, S_n(\varphi_x,t) \geq 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}.$$

Следствие 3.1 доказано. □

Лемма 3.8. Пусть $t_0 \in (0,1)$, а g ограниченная на $[0,1]$ и непрерывная в точке t_0 функция. Тогда $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} S_n(g,t) = g(t_0)$.

Доказательство. Пусть

$$0 = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_n^n = 1$$

n-ое разбиение отрезка $[0,1]$. Имеем, что для каждого ε существует такая δ, что для любого $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, справедливо неравенство $|g(t) - g(t_0)| < \varepsilon$. Мы также имеем, что существует такое действительное число M, что $|g(t)| \leq M$ для всех $t \in [0,1]$. Поскольку

$$S_n(g,x) = \int\limits_0^1 K_n(t,s)\, g(s)\, ds \text{ и } \int\limits_0^1 K_n(t,s)\, ds = 1,$$

следовательно из (3.7) получим

$$|S_n(g,t) - g(t_0)| \leq \int\limits_0^1 |K_n(t,s)|\, |g(s) - g(t_0)|\, ds$$

$$= \int\limits_{|s-t_0|>\delta} |K_n(t,s)|\, |g(s) - g(t_0)|\, ds + \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |K_n(t,s)|\, |g(s) - g(t_0)|\, ds$$

$$\leq 2M \int\limits_{|s-t_0|>\delta} |K_n(t,s)|\, ds + \varepsilon \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |K_n(t,s)|\, ds \leq 2M \int\limits_{|s-t_0|>\delta} |K_n(t,s)|\, ds + 3\varepsilon.$$

Таким образом, достаточно доказать предельное соотношение

$$\lim_{\substack{t\to t_0 \\ n\to\infty}} \int\limits_{|s-t_0|>\delta} |K_n(t,s)|\, ds = 0.$$

Справедлива формула (см. [11])

$$K_n(t,s) = \sum_{k=0}^{n} N_k^n(t)\, K_n(x_k^n, s).$$

Обозначим через $x_{p_n}^n$ ближайшую точку разбиения слева от точки $t_0 - \dfrac{\delta}{2}$ и через $x_{q_n}^n$ – ближайшую точку разбиения справа от точки $t_0 - \delta$. Существует такое натуральное число N, что для любого натурального числа $n \geq N$, справедливо неравенство $\left|x_{p_n}^n - x_{q_n}^n\right| > \dfrac{\delta}{4}$.

Заметим, что если $t \in \left(t_0 - \dfrac{\delta}{2}, t_0 + \dfrac{\delta}{2}\right)$ и $n \geq N$, то из неравенства

$$|K_n(x_k^n, x_i^n)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{|k-i|} \frac{4}{|x_k^n - x_i^n|},$$

где $k, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и $k \neq i$ (см. [11]), следует, что

$$\int\limits_0^{t_0-\delta} |K_n(t,s)|\, ds = \int\limits_0^{t_0-\delta} \left| \sum_{k=0}^{n} N_k^n(t) K_n(x_k^n, s) \right| ds = \int\limits_0^{t_0-\delta} \left| \sum_{k=p_n}^{n} N_k^n(t) K_n(x_k^n, s) \right| ds$$

$$= \int\limits_0^{t_0-\delta} \left| \sum_{k=p_n}^{n} N_k^n(t) \sum_{i=0}^{n} N_i^n(s) K_n(x_k^n, x_i^n) \right| ds = \int\limits_0^{t_0-\delta} \left| \sum_{k=p_n}^{n} N_k^n(t) \sum_{i=0}^{q_n} N_i^n(s) K_n(x_k^n, x_i^n) \right| ds$$

$$\leq \int\limits_0^{t_0-\delta} \sum_{k=p_n}^{n} \sum_{i=0}^{q_n} |K_n(x_k^n, x_i^n)|\, ds \leq \int\limits_0^{t_0-\delta} \sum_{k=p_n}^{n} \sum_{i=0}^{q_n} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-i} \frac{4}{|x_k^n - x_i^n|} ds$$

$$\leq \frac{16}{\delta} \int\limits_0^{t_0-\delta} \sum_{k=p_n}^{n} \sum_{i=0}^{q_n} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-i} ds \leq \frac{48}{\delta} \int\limits_0^{t_0-\delta} \sum_{k=p_n}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-q_n} ds$$

$$\leq \frac{144}{\delta} \int\limits_0^{t_0-\delta} \left(\frac{2}{3}\right)^{p_n-q_n} ds \leq \frac{144}{\delta} \left(\frac{2}{3}\right)^{p_n-q_n}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} (p_n - q_n) = +\infty$, то

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} \int\limits_0^{t_0-\delta} |K_n(t,s)|\, ds = 0.$$

Точно также мы можем доказать, что

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} \int\limits_{t_0+\delta}^{1} |K_n(t,s)|\, ds = 0,$$

следовательно $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} \int\limits_{|s-t_0|>\delta} |K_n(t,s)|\, ds = 0$. Лемма 3.8 доказана. □

Теперь докажем основной результат.

Доказательство теоремы 2.2. Пусть $t_0 \in (0,1)$, $f(t_0+) = d_1$ и $f(t_0-) = d_2$. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \begin{cases} f(t) - \varphi_{t_0}(t)(d_2 - d_1) & \text{при } t \in [0,1] \setminus \{t_0\} \\ d_1 & \text{при } t = t_0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция g непрерывна в точке t_0 и ограниченна на $[0,1]$. Следовательно из леммы 8 следует, что $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} S_n(g,t) = g(t_0) = d_1$. Таким образом

$$\overline{\lim_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}}} S_n(f,t) = \begin{cases} d_1 + (d_2 - d_1) \overline{\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}}} S_n(\varphi_{t_0}, t) & \text{при } d_2 > d_1 \\ d_1 + (d_2 - d_1) \underline{\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}}} S_n(\varphi_{t_0}, t) & \text{при } d_2 < d_1, \end{cases}$$

и

$$\varlimsup_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} S_n(f,t) = \begin{cases} d_1 + (d_2 - d_1) \varlimsup\limits_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} S_n(\varphi_{t_0}, t) & \text{при } d_2 < d_1 \\ d_1 + (d_2 - d_1) \varliminf\limits_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} S_n(\varphi_{t_0}, t) & \text{при } d_2 > d_1. \end{cases}$$

Из определении 3 следует, что

$$G(t_0) = \max\left\{2 \varlimsup_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} S_n(\varphi_{t_0}, t) - 1, -2 \varliminf_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} S_n(\varphi_{t_0}, t) + 1\right\}.$$

Из леммы 1 следует, что для любого $t_0 \in [0,1]$

$$G(t_0) \le \max\left\{2\cdot\frac{3}{2} - 1, 2\cdot\frac{1}{2} + 1\right\} = 2,$$

И наконец, из следствии 2 мы получаем, что для почти всех $t_0 \in [0,1]$

$$G(t_0) \ge 2 \varlimsup_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} S_n(\varphi_{t_0}, t) - 1 \ge 2\cdot\frac{9}{8} - 1 = \frac{5}{4}.$$

В заключение выражаю благодарность академику Г. Г. Геворкяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Abstract. The paper is devoted to the Gibbs phenomenon for series by general Franklin systems. The general Franklin system corresponding to a given dense sequence of points $\mathcal{T} = (t_n, n \ge 0)$ in $[0,1]$ is defined to be a sequence of orthonormal piecewise linear functions with knots from $\mathcal{T}$, that is, the n-th function from the system has knots $t_0, \dots, t_n$. The main result of this paper is that the Gibbs phenomenon for Fourier series by general Franklin systems occurs for almost all points of $[0,1]$.

Список литературы

[1] Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Ann. **100**, 522 – 528 (1928).

[2] S. V. Bochkarev, "Some inequalities for the Franklin series", Anal. Math. **1**, 249 – 257 (1975).

[3] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., **23**, 141 – 157 (1963).

[4] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin systems in $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$", Studia math., **164**, 161 – 204 (2004).

[5] Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Физматгиз, Москва (1961).

[6] А. М. Зубакин, "Явление Гиббса для мультипикативных систем типа Уолша и типа Виленкина-Джафарли", Сиб. мат. журн., **12**, но. 1, 147 – 157 (1971).

[7] Л. А. Балашов, В. А. Скворцов, "Константы Гиббса для частичных сумм рядов Фурье-Уолша и их $(C,1)$-средних", Тр. МИАН СССР, **164**, 37 – 48 (1983).

[8] О. Г. Саргсян, "О сходимости и явлении Гиббса рядов Франклина", Изв., НАН Армении, матем., **31**, но. 1, 61 – 84 (1996).

[9] Г. Г. Геворкян, "Об абсолютной сходимости рядов по общей системе Франклина", Изв. НАН Армении, матем., **49**, но. 2, 3 – 22 (2014).

[10] Г. Г. Геворкян, "О рядах по системе Франклина", Analysis Mathematica, **16**, 87 – 114 (1990).

[11] Г. Г. Геворкян, К. А. Керян, "Об одном обобщении общей системы Франклина на $\mathbb{R}$", Изв. НАН Армении, математика, **49**, но. 6, 29 – 42 (2014).

[12] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), **374**, 1 – 59 (1998).

Поступила 27 мая 2016