Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 4, 2017, стр. 3–11.

СВОЙСТВО ЕДИНСТВЕННОГО СЛЕДА n-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

В. С. АТАБЕКЯН, А. Л. ГЕВОРГЯН, Ш. А. СТЕПАНЯН

Ереванский государственный университет, Армения
Российско-Армянский университет
E-mails: *avarujan@ysu.am*; *amirjan.gevorgian@googlemail.com*; *shogh.stepanyan@gmail.com*

Аннотация. В работе доказывается единственность следа C^*-алгебр n-периодических произведений произвольных семейств групп без инволюций. Показано, что свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ и их группы автоморфизмов также обладают свойством единственного следа. Показано также, что любая счетная группа вкладывается в некоторую 3-порожденную группу со свойством единственного следа, а любая счетная периодическая группа ограниченного периода без инволюций вкладывается в некоторую 3-порожденную периодическую группу G ограниченного периода со свойством единственного следа. При этом в качестве группы G можно выбрать как простую, так и не простую группу.

MSC2010 number: 20F50, 20E06, 20F28, 22D25.

Ключевые слова:[1] периодическая группа; периодическое произведение групп; группа автоморфизмов; приведенная C*-алгебра группы.

1. Введение

Для заданной (дискретной) группы G обозначим через $l_2(G)$ гильбертово пространство всех функций $f : G \to \mathbb{C}$, для которых ряд $\sum\limits_{g\in G} |f(g)|^2$ сходится, а через $\mathcal{B}(l_2(G))$ обозначим C^*-алгебру всех ограниченных линейных операторов на $l_2(G)$. Пусть $\lambda_G : G \to \mathcal{B}(l_2(G))$ есть левое регулярное представление группы G, задаваемое формулой $(\lambda_G(g)(f))(s) = f(g^{-1}s)$ для всех $g, s \in G$. По определению, *приведенная C^*-алгебра группы G* есть замыкание линейной оболочки множества $\{\lambda_G(g)|g \in G\}$ относительно операторной нормы. Она обозначается через $C_{red}(G)$. Следом C^*-алгебры A называется любой положительный линейный функционал $T : A \to \mathbb{C}$ такой, что $T(1) = 1$ и $T(ab) = T(ba)$ для всех

[1]Исследования первого автора были проведены при поддержке Центра математических исследований при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта 10-3/1-41.
Исследования второго автора были проведены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 15T-1A258.

$a, b \in A$. Говорят, что группа G обладает свойством единственного следа, если ее C^*-алгебра $C_{red}(G)$ имеет единственный (т.е. только канонический) след.

В работе [1] Поуерсом была доказана, что свободная группа ранга 2 обладает свойством единственного следа. Вслед за этим разные авторы указали другие интересные классы групп, C^*-алгебры которых имеют единственный след. В работе [2] А. Ю. Ольшанский и Д. В. Осин доказали, что для достаточно больших нечетных n свободные бернсйдовы группы $B(m, n)$ периода n и ранга $m > 1$ обладают свойством единственного следа, а алгебра $C_{red}(B(m, n))$ является простой алгеброй. До недавних пор был открыт старый вопрос об эквивалентности следующих двух условий (см., например, [3], вопрос 4):

1) C^*-алгебра группы G имеет единственный след;

2) группа G имеет тривиальный аменабельный радикал.

Напомним, что аменабельным радикалом группы называется ее наибольшая аменабельная нормальная подгруппа. Как показал М.Дэй [4], любая группа обладает аменабельным радикалом.

В работе [5] на указанный вопрос был дан положительный ответ. А именно, было доказано, что аменабельный радикал группы G тривиален тогда и только тогда, когда C^*-алгебра $C_{red}(G)$ данной группы G имеет единственный след. Кроме того, в этой же работе [5] было дано еще одно доказательство единственности следа C^*-алгебр свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ достаточно большого нечетного периода. Доказана также простота алгебр $C_{red}(B(m, n))$ использующих некоторые свойства групп $B(m, n)$, указанные в работах [6] и [7]. Вопрос простоты C^*-алгебр n-периодических произведений исследован в [8].

Целью настоящей заметки является доказательство единственности следа C^*-алгебр всех нетривиальных n-периодических произведений произвольных семейств групп без инволюций. Понятие периодического произведения данного периода n (т.е. n-периодического произведения) данного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ было введено в работе С.И.Адяна [9] (см. также [10]). Эта операция, обозначаемая через $\prod_{i\in I}{}^{n} G_i$, определяется на классе всех групп для каждого нечетного $n \geq 665$ как фактор группа свободного произведения заданного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ $F = \prod_{i\in I}{}^{*} G_i$ по специально выбранной нормальной подгруппе, которая задается некоторой системой определяющих соотношений вида $A^n = 1$ с применением сложной совместной индукции по натуральному параметру, называемому рангом (см. [11-12]). В работе [13] приведены различными интересные свойства n-периодических произведений. Поскольку свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ изоморфны n-периодическому произведению m циклических групп порядка n (см. [9, теорема 5]), то мы получаем существенное усиление результатов [2] и [5] о свойстве единственного следа свободных бернсайдовых групп. Показано, что группы автоморфизмов групп $B(m, n)$ также обладают свойством единственного следа. Кроме того, мы докажем, что любая счетная группа изоморфно вкладывается в некоторую 3-порожденную группу со свойством единственного следа, а любая счетная периодическая группа H ограниченного периода и без инволюций вкладывается в некоторую 3-порожденную периодическую группу G ограниченного периода со свойством единственного следа. При этом в качестве группы G можно выбрать как простую, так и не простую группу.

2. Формулировки результатов

Теорема 2.1. *n-периодическое произведение произвольного семейства групп без инволюций обладает свойством единственного следа при любом нечетном $n \geq 1003$.*

Как уже отметили выше справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *(см. [5, теорема 1.6] и [14, теорема 5.2]) Дискретная группа G обладает свойством единственного следа тогда и только тогда, когда ее аменабельный радикал тривиален.*

Поэтому теорема 2.1 эквивалентна следующему утверждению.

Теорема 2.2. *n-периодическое произведение произвольного семейства групп без инволюций имеет тривиальный аменабельный радикал при любом нечетном $n \geq 1003$.*

Следствие 2.1. *Свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ обладают свойством единственного следа при любом нечетном $n \geq 1003$ и для любого ранга $m > 1$.*

Теорема 2.3. *Группа автоморфизмов $Aut(F_m)$ свободной группы F_m и группа автоморфизмов $Aut(B(m,n))$ свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ обладает свойством единственного следа для любого ранга $m > 1$ и при любом нечетном $n \geq 1003$.*

Теорема 2.4. *Любая счетная группа изоморфно вкладывается в некоторую 3-порожденную группу со свойством единственного следа.*

Теорема 2.5. *Любая счетная периодическая группа H ограниченного периода и без инволюций можно вложить в некоторую 3-порожденную периодическую группу G ограниченного периода со свойством единственного следа. При этом в качестве группы G можно выбрать как простую, так и не простую группу.*

Теоремы 2.1 и 2.2 будут доказаны в разделе 3, а теоремы 2.3 – 2.5 будут доказаны в разделе 4.

3. Доказательство теорем 2.1 и 2.2

Поскольку теоремы 2.1 и 2.2 эквивалентны, то мы докажем только теорему 2.2.

Доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим n-периодическое произведение $G = \prod\limits_{i\in I}{}^{n} G_i$ произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ без инволюций и покажем, что ее аменабельный радикал тривиален.

В работе [15] было доказано, что n-периодическое произведение семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ без инволюций есть фактор группа F/M свободного произведения $F = \prod^*_{i\in I} G_i$ по нормальной подгруппе M, которая однозначно определяется следующими условиями:

a. подгруппа M имеет тривиальное пересечение со всеми компонентами G_i,

b. подгруппа M является нормальным замыканием некоторого множества $\mathcal{R}$ слов вида $C^n \in F$, причем, если элемент $X \in F$ не сопряжен в F/M никакому элементу из компонент G_i, то $X^n = 1$ в фактор групше F/M.

С помощью такого описания n-периодических произведений в работе [15] доказан также следующий результат.

Лемма 3.1. *(см.* [15, теорема 2]*) Пусть G есть n-периодическое произведение произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ без инволюций, где $n \geqslant 1003$ – произвольное нечетное число. Тогда каждая нециклическая подгруппа H группы G,* *которая не сопряжена никакой подгруппе компонент G_i, содержит подгруппу, изоморфную свободной периодической группе $B(2, n)$ ранга 2.*

Это утверждение мы используем для доказательства теоремы 2.2. Хорошо известно, что подгруппы аменабельных групп тоже аменабельны. Поэтому каждая нециклическая подгруппа H группы G, которая не сопряжена ни с какой подгрупой компонент G_i, является неаменабельной. Действительно, из леммы 3.1 следует, что H содержит подгрупу, изоморфную свободной периодической группе $B(2, n)$ ранга 2, а по классической теореме С. И. Адяна (см. [6, теорема 5]), группа $B(2, n)$ не аменабельна.

Таким образом, в групе G аменабельными являются только аменабельные подгруппы компонент G_i или сопряженные им подгруппы группы G. Покажем, что ни одна нетривиальная подгруппа группы G, которая сопряжена какой-либо подгрупе H одной из компонент G_i не является нормальной подгрупой в G.

Лемма 3.2. *Любая подгруппа H компоненты G_i «антинормальна» при любом i, т.е. из $x \notin G_i$ следует $xHx^{-1} \cap H = 1$.*

Доказательство. Напомним, что согласно определению периодических произведений элементы всех компонент являются порождающими, т.е. имеют длину 1. Рассмотрим произвольный элемент xhx^{-1}, где $h \in H$ и $x \notin G_i$. Выбрав α достаточно большим, можем считать, что $x \in \mathscr{A}_\alpha \cap \mathscr{M}_\alpha$ и $xhx^{-1} \in \mathscr{R}_0$. Покажем, что слово xhx^{-1} является абсолютно приведенным словом.

Допустим, что при некотором β выполнено соотношение $xhx^{-1} \notin \mathscr{K}_\beta$. Выберем такое β минимальным. Тогда в силу [11, IV.1.19] найдется некоторое нормированное вхождение $V \in$ Норм$(\beta, xhx^{-1}, n - 217)$. Допустим, что $V = P * E * Q$. Можем считать, что $\beta \leq \alpha$. В силу леммы [11, IV, 1.18] неприводимые подслова x и x^{-1} не могут содержать более $(n+1)/2 + 42$ участков. Поэтому, элементарное слово E ранга β имеет вид $E = x_1 h x_2$, где выделена центральная буква h несократимого слова xhx^{-1}. При этом каждое из подслов x_1 и x_2 слова E содержит не более $(n+1)/2 + 42$ участков, а значит, и не менее $2p$ участков, так как $n - 217 - (n + 1/2 + 43) > 2p$. Эти вхождения элементарных $2p$-степеней x_1 и x_2 согласованы, так как вхождение V является их общим продолжением. Тогда в силу леммы [11, II, 5.17] подслова x_1 и x_2 родственны. Без ограничения общности, можем считать, что длина x_1 не больше длины x_2. Тогда x_1^{-1} будет началом

x_2. Это означает, что элементарные p-степени x_1^{-1} и x_2 тоже родственны, а это противоречит [11, II, 5.22]. Следовательно, имеем $xhx^{-1} \in \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} \mathscr{K}_i$.

Если теперь для некоторого $h_1 \in H$ имеет место равенство $h_1 = xhx^{-1}$ в G, то в силу [11, IV, 2.16] равенство $h_1 = xhx^{-1}$ справедливо также в свободном произведении семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$. Но это противоречит условию $x \notin G_i$. Лемма 3.2 доказана.

Из леммы 3.2 следует, что все подгруппы компонент G_i (и их сопряженные) не являются нормальными подгруппами в n-периодическом произведении G. Поэтому наибольшая аменабелная нормальная подгруппа группы G тривиальна, т. е. аменабельный радикал группы G тривиален. Теорема 2.2 доказана.

4. Доказательство теорем 2.3 – 2.5

Доказательство теоремы 2.3. Докажем, что группа $Aut(F_m)$ имеет тривиальный аменабельный радикал. Предположим, что A – аменабельный радикал группы $Aut(F_m)$ и A – нетривиальная подгруппа. Если α произвольный автоморфизм некоторой группы G, а i_g – внутренний автоморфизм элемента $g \in G$, то легко проверяемая формула $\alpha \circ i_g \circ \alpha^{-1} = i_{g^\alpha}$ показывает, что централизатор группы внутренних автоморфизмов произвольной группы с тривиальным центром также тривиален.

Пусть $Inn(F_m)$ – группа внутренних автоморфизмов свободной группы F_m. С одной стороны, из тривиальности централизатора $C_{Aut(F_m)}(Inn(F_m))$ следует, что пересечение нормальных подгрупп $A \cap Inn(F_m)$ является нетривиальной аменабельной нормальной подгруппой в $Inn(F_m)$ (подгруппы аменабельных групп – аменабельны). С другой стороны, так как $Inn(F_m)$ изоморфна свободной группе F_m, то по теореме Нильсена–Шрейера нетривиальная нормальная подгруппа $A \cap Inn(F_m)$ изоморфна свободной группе некоторого ранга > 1. Согласно известной теореме фон Неймана о неаменабельности свободных групп ранга >1, группа $A \cap Inn(F_m)$ неаменабельна. Полученное пртиворечие доказывает, что аменабельный радикал A группы $Aut(F_m)$ тривиален.

Теперь докажем, что аменабельный радикал A группы $Aut(B(m, n))$ свободной бернсйдовой группы $B(m, n)$ тоже тривиален при нечетных $n \geq 1003$. Предположим, что A нетривиальная аменабельная нормальная подгруппа группы $Aut(B(m, n))$.

Прежде всего, напомним, что в силу теоремы [11, гл. VI, теорема 3.4] центр группы $B(m, n)$ тривиален для всех нечетных $n \geq 665$. Повторяя предыдущие рассуждения, мы придем к выводу, что пересечение

$$A \cap Inn(B(m, n)) = N$$

является нетривиальной аменабельной нормальной подгруппой в группе внутренних автоморфизмов $Inn(B(m, n))$. Докажем, что нормальная подгруппа N бесконечна.

Поскольку $Inn(B(m, n))$ и $B(m, n)$ изоморфны (в силу тривиальности центра $B(m, n)$), то можно считать, что N является нормальной подгруппой в $B(m, n)$. Ядро гомоморфизма $f : B(m, n) \to Aut(N)$ сопоставляющего каждому элементу $g \in B(m, n)$ ограничение на N внутреннего автоморфизма элемента g, совпадает с централизатором C подгрупы N в $B(m, n)$. Если бы N была бы конечной подгрупной, то конечным был бы и $Aut(N)$. По теореме [11, гл. VI, теорема 3.1] централизатор любого нетривиального элемента группы $B(m, n)$ – циклическая группа. Следовательно из конечности N вытекало бы также конечность централизатор C. Тогда и группа $B(m, n)$ была бы конечной, поскольку фактор группа $B(m, n)/C$ вкладывается в $Aut(N)$. Это противоречит теореме [11, гл. VI, теорема 1.5], согласно которой группа $B(m, n)$ бесконечна. Таким образом, нормальная подгруппа $N \lhd Inn(B(m, n))$ бесконечна и, в частности, не является циклической подгруппой.

Из изоморфности групп $Inn(B(m, n))$ и $B(m, n)$, в силу теоремы 1 работы [7], следует, что нециклическая подгруппа N содержит подгруппу изоморфную группе $B(2, n)$. Как уже отметили выше, в силу [6, теорема 5] группы $B(2, n)$ неаменабельны для всех нечетных $n \geq 665$. Тогда подгруппа N тоже неаменабельна, так как содержит неаменабельную подгруппу $B(2, n)$. Таким образом получается, что N и аменабельна и неаменабельна. Противоречие завершает доказательство теоремы 2.3.

Доказательство теоремы 2.4. Пусть G – произвольная счетная группа. В силу известной теоремы Г.Хигмана, Б.Ноймана и Х.Ноймана, группа G вкладывается в некоторую 2-порожденную группу Г. Рассмотрим свободное произведение $\Gamma * \mathbb{Z}$ бесконечной циклической группы $\mathbb{Z}$ на Г. Группа $\Gamma * \mathbb{Z}$ является 3-порожденной группой, содержащей изоморфную копию группы G. Любая нетривиальная нормальная подгруппа этого произведения содержит подгруппу изоморфную свободной группе ранга 2 (см., например, [16, следствие 3.6.3]) и поэтому не является аменабельной группой. Значит аменабельный радикал группы $\Gamma * \mathbb{Z}$ тривиален. Теорема 2.4 доказана.

Доказательство теоремы 2.5. Пусть G – произвольная счетная периодическая группа некоторого ограниченного периода k и без инволюций. Тогда k можно считать нечетным числом. Воспользуемся следующим результатом из [17].

Лемма 4.1. *([17, следстие 3.2]) Для каждого нечетного $n \geq 1003$ любая счетная группа периода n вкладывается в некоторую 2-порожденную группу периода n.*

В силу леммы 4.1, группа G вкладывается в некоторую 2-порожденную группу Γ периода n, где $n \geq 1003$ произвольное нечетное число, которое делится на k. Рассмотрим n-периодическое произведение $\Gamma \overset{n}{*} \mathbb{Z}_s$ циклической группы $\mathbb{Z}_s$ произвольного нечетного периода s на Γ. Это произведение является 3-порожденной группой, которая содержит изоморфную копию группы Γ в силу точности операции n-периодического произведения (см. [9, теорема 3]). Следовательно и группа G вкладывается в $\Gamma \overset{n}{*} \mathbb{Z}_s$. По теореме 2.1 группа $\Gamma \overset{n}{*} \mathbb{Z}_s$ обладает свойством единственного следа. Остается воспользоваться критерием простоты периодических произведений, доказанным С.И.Адяном в работе [18]. Согласно этому критерию группа $\Gamma \overset{n}{*} \mathbb{Z}_s$ проста тогда и только тогда, когда числа s и n взаимно просты. Теорема 2.5 доказана.

Abstract. In this paper we prove the unique trace property of C^*-algebras of n-periodic products of arbitrary family of groups without involutions. We show that the free Burnside groups $B(m,n)$ and their automorphism groups also possess the unique trace property. Also, we show that every countable group is embedded into some 3-generated group with the unique trace property, while every countable periodic group of bounded period and without involutions is embedded into some 3-generated periodic group G of bounded period with the unique trace property. Moreover, as a group G can be chosen both simple and not simple group.

Список литературы

[1] R. T. Powers, "Simplicity of the C^*-algebra associated with the free group on two generators", Duke Math. J., **42**, 151 – 156 (1975).

[2] A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin, "C^*-simple groups without free subgroups", Groups, geometry and dynamics, 8:3, 933 – 983 (2014).

[3] P. de la Harpe, "On simplicity of reduced C^*-algebras of groups", Bull. Lond. Math. Soc., 39:1, 1 – 26 (2007).

[4] M. M. Day, "Amenable semigroups", Illinois J. Math., **1**, 509 – 544 (1957).

[5] E. Breuillard, M. Kalantar, M. Kennedy, N. Ozawa, "C*-simplicity and the unique trace property for discrete groups", ArXiv:1410.2518, 1 – 20 (2014).

[6] С. И. Адян, "Случайные блуждания на свободных периодических группах", Изв. АН СССР, Сер. матем., 46:6, 1139 – 1149 (1982).

[7] В. С. Атабекян, "О подгруппах свободных бернсайдовых групп нечетного периода $n \geq 1003$", Изв. РАН. Сер. матем., 73:5, 3 – 36 (2009).

[8] С. И. Адян, В. С. Атабекян, "C^*-простота n-периодических произведений", Матем. заметки, 99:5, 643 – 648 (2016).

[9] С. И. Адян, "Периодические произведения групп", Тр. МИАН СССР, **142**, 3 – 21 (1976).

[10] С. И. Адян, Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева. Матем. заметки, 88:6, 803–810 (2010).

[11] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и тождества в группах. Наука, М., 1975.

[12] С. И. Адян, "Новые оценки нечетных периодов бесконечных бернсайдовых групп", Тр. МИАН, **289**, 41 – 82 (2015).

[13] С. И. Адян, В.С. Атабекян, "Периодические произведения групп", Известия НАН Армении, Серия Математика, т. 52(3), 3–15 (2017).

[14] Uffe Haagerup, "A new look at C*-simplicity and the unique trace property of a group", ArXiv:1509.05880 (2015).

[15] С. И. Адян, В. С. Атабекян, "Характеристические свойства и равномерная неаменабельность n-периодических произведений групп", Изв. РАН. Сер. матем., **79**:6, 3 – 18 (2015).

[16] Ю. В. Тишин, "Нормальные подгруппы свободных конструкций", Матем. сб., **126**(168):3, 377 – 396 (1985).

[17] В. С. Атабекян, "О нормальных подгруппах в периодических произведениях С. И. Адяна", Тр. МИАН, **274**, 15 – 31 (2011).

[18] С. И. Адян, "О простоте периодических произведений групп", Докл. АН СССР, 241:4, 745 – 748 (1978).

Поступила 2 марта 2016