Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 3, 2017, стр. 30-45.

О РЯДАХ ХААРА A–ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. НАВАСАРДЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *ggg@ysu.am*, *knavasard@ysu.am*

Аннотация. В работе найдено условие на последовательность натуральных чисел $\{q_n\}$, которое является необходимым и достаточным условием для того, чтобы из сходимости п.в. кубических частичных сумм $S_{q_n}(\mathbf{x})$ кратного ряда Хаара $\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ и условия $\liminf\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot mes\{\mathbf{x} : \sup\limits_n |S_{q_n}(\mathbf{x})| > \lambda\} = 0$, коэффициенты $a_{\mathbf{n}}$ однозначно определялись через сумму ряда. Получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ являлся бы рядом Фурье A–интегрируемой функции.

MSC2010 number: 42C10, 42C20.

Ключевые слова: Система Хаара; сходимость почти всюду; А–интегрирование.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются кратные и простые ряды Хаара, распределение мажоранты некоторых частичных сумм которых удовлетворяет условию, ранее возникающему в некоторых теоремах единственности п.в. сходящихся рядов Хаара.

Напомним, что система Хаара на $[0;1]$ определяется следующим образом (см. например [1]): $\chi_1(x) = 1$, а для $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, ..., 2^k$, $k = 0, 1, 2, ...$

$$\chi_n(x) = \chi_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & \text{если} \quad \frac{i-1}{2^k} < x < \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ -2^{\frac{k}{2}}, & \text{если} \quad \frac{2i-1}{2^{k+1}} < x < \frac{i}{2^k}, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin [\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}]. \end{cases}$$

Значения функций Хаара в точках разрыва для наших целей не существенны и мы их не приводим. Как обычно, положим $\Delta_n = \operatorname{supp}(\chi_n)$. Ясно, что если $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, ..., 2^k$, $k = 0, 1, 2, ...$, то $\Delta_n = [\frac{i-1}{2^k}; \frac{i}{2^k}]$.

---

[1]Настоящее исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта 10-3/1-41

Для $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \cdots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ ($\mathbb{N}$-множество натуральных чисел) и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in [0;1]^d$ обозначим $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \chi_{n_1}(x_1)\chi_{n_2}(x_2)\cdots\chi_{n_d}(x_d)$ и рассмотрим ряд

$$\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\chi_{n_1}(x_1)\chi_{n_2}(x_2)\cdots\chi_{n_d}(x_d).$$

Для натурального числа N через $S_N(\mathbf{x})$ обозначим кубические частичные суммы, т. е. $S_N(\mathbf{x}) = \sum\limits_{\mathbf{n}:\ n_i \le N} a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$.

Для функции $\varphi(x)$ и положительного числа λ через $[\varphi(x)]_\lambda$ будем обозначать следующую функцию

$$[\varphi(x)]_\lambda = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } |\varphi(x)| \le \lambda, \\ 0, & \text{если } |\varphi(x)| > \lambda. \end{cases}$$

В работе [2] Геворкяном была доказана следующая

Теорема 1.1. *([2]). Пусть кубические частичные суммы $S_k(\mathbf{x})$ кратного ряда $\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ почти всюду (п.в.) сходятся к $f(\mathbf{x})$ и для некоторой последовательности $\lambda_m \uparrow +\infty$ выполняется*

$$\lim_{m\to+\infty} \lambda_m \cdot mes\left\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : \quad \sup_k |S_k(\mathbf{x})| > \lambda_m\right\} = 0.$$

тогда для всех $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$

$$a_{\mathbf{n}} = \lim_{m\to\infty} \int_{[0;1]^d} [f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})]_{\lambda_m^{\mathbf{n}}}\, d\mathbf{x},$$

где $\lambda_m^{\mathbf{n}} = \lambda_m \|\chi_{\mathbf{n}}\|_\infty$.

Аналогичные вопросы для одномерного ряда по системе Хаара и по системе Прайса (обобщенной системе Хаара) были рассмотрены в работах Костина [3], [4], а для рядов по системе Франклина, в работах Геворкяна [5] и [6]. Впервые теоремы единственности для п.в. сходящихся рядов были рассмотрены в работах [7], [8]. В настоящей работе доказана следующая

Теорема 1.2. *Пусть $\{q_j\}$- некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение $\frac{q_{j+1}}{q_j}$ ограниченно, последовательность $S_{q_j}(\mathbf{x})$ п.в. сходится к некоторой функции $f(\mathbf{x})$ и для некоторой последовательности $\{\lambda_m\}$, $\lambda_m \to \infty$*

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m \cdot mes\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})| > \lambda_m\} = 0. \tag{1.1}$$

Тогда для всех $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ выполняются

$$a_{\mathbf{n}} = \lim_{m\to\infty} \int_{[0;1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Напомним,что функция $f(x)$ называется A-интегрируемой на множестве G, если $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot mes\{x \in G : \quad |f(x)| > \lambda\} = 0$ и существует предел

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_G [f(x)]_\lambda dx =: (A) \int_G f(x) dx.$$

Скажем, что ряд $\sum a_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ является рядом Фурье A–интегрируемой функции, если существует такая A интегрируемая функция f, определенная на $[0;1]^d$, что коэффициенты $a_{\mathbf{n}}$ определяются следующим образом:

$$a_{\mathbf{n}} = (A) \int_{[0;1]} f(\mathbf{x}) \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Из теоремы 1.2 немедленно следуют теоремы 1.3 и 1.4.

Теорема 1.3. *Пусть $\{q_j\}$–некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение $\frac{q_{j+1}}{q_j}$ ограниченно, последовательность $S_{q_j}(\mathbf{x})$ п.в. сходится к некоторой п.в. конечной функции $f(\mathbf{x})$ и*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot mes \left\{ \mathbf{x} \in [0;1]^d : \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})| > \lambda \right\} = 0,$$

то все функции $f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$, $\quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, A–интегрируемы и

$$a_{\mathbf{n}} = (A) \int_{[0;1]^d} f(\mathbf{x}) \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

Теорема 1.4. *Пусть $\{q_j\}$–некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение $\frac{q_{j+1}}{q_j}$ ограниченно, последовательность $S_{q_j}(\mathbf{x})$ п.в. сходится к некоторой функции $f(\mathbf{x}) \in L^1[0;1]^d$ и для некоторой последовательности $\{\lambda_k\}$, $\quad \lambda_k \nearrow \infty$*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \cdot mes \left\{ \mathbf{x} \in [0;1]^d : \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})| > \lambda_k \right\} = 0.$$

Тогда

$$a_{\mathbf{n}} = \int_{[0;1]^d} f(\mathbf{x}) \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

Оказывается в теоремах 1.2–1.4 ограниченность отношения $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ существенно. Действительно, верно следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Пусть $\{q_n\}$- некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что $\sup \dfrac{q_{n+1}}{q_n} = +\infty$. Тогда существует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ такой, что*

1) $a_1 \neq 0, \qquad S_{q_n}(x) \to 0$ п.в., при $n \to \infty$,

2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot mes\{x \in [0;1] : \sup\limits_n |S_{q_n}(x)| > \lambda\} = 0.$

Напомним,что функция $f(x)$ называется A-интегрируемой на множестве G, если $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot mes\{x \in G : \quad |f(x)| > \lambda\} = 0$ и существует предел

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_G [f(x)]_\lambda dx =: (A) \int_G f(x)dx.$$

Скажем, что ряд $\sum a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ является рядом Фурье A–интегрируемой функции, если существует такая A интегрируемая функция f, определенная на $[0;1]^d$, что коэффициенты $a_{\mathbf{n}}$ определяются следующим образом:

$$a_{\mathbf{n}} = (A) \int_{[0;1]} f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Из теоремы 1.2 немедленно следуют теоремы 1.3 и 1.4.

Теорема 1.3. *Пусть $\{q_j\}$–некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение $\frac{q_{j+1}}{q_j}$ ограниченно, последовательность $S_{q_j}(\mathbf{x})$ п.в. сходится к некоторой п.в. конечной функции $f(\mathbf{x})$ и*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot mes \left\{ \mathbf{x} \in [0;1]^d : \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})| > \lambda \right\} = 0,$$

то все функции $f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$, $\quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, A–интегрируемы и

$$a_{\mathbf{n}} = (A) \int_{[0;1]^d} f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

Теорема 1.4. *Пусть $\{q_j\}$–некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение $\frac{q_{j+1}}{q_j}$ ограниченно, последовательность $S_{q_j}(\mathbf{x})$ п.в. сходится к некоторой функции $f(\mathbf{x}) \in L^1[0;1]^d$ и для некоторой последовательности $\{\lambda_k\}$, $\quad \lambda_k \nearrow \infty$*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \cdot mes \left\{ \mathbf{x} \in [0;1]^d : \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})| > \lambda_k \right\} = 0.$$

Тогда

$$a_{\mathbf{n}} = \int_{[0;1]^d} f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

Оказывается в теоремах 1.2–1.4 ограниченность отношения $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ существенно. Действительно, верно следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Пусть $\{q_n\}$- некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что $\sup \dfrac{q_{n+1}}{q_n} = +\infty$. Тогда существует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ такой, что*

1) $a_1 \neq 0, \qquad S_{q_n}(x) \to 0$ п.в., при $n \to \infty$,

2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot mes\{x \in [0;1] : \quad \sup\limits_n |S_{q_n}(x)| > \lambda\} = 0.$

Хорошо известно, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ является рядом Фурье интегрируемой функции, то, вообще говоря, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$, где $\varepsilon_n = \pm 1$, может не сходится в пространстве L^1. Известно, что (см. [1], [9] и [10]), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ безусловно сходится тогда и только тогда, когда

$$P(x) := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right\}^{1/2} \in L^1[0;1]$$

или

$$S^*(x) := \sup_N \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right| \in L^1[0;1].$$

В работе [2] доказано, что если выполняется условие

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot mes\{x: \quad S^*(x) > \lambda\} = 0, \tag{1.2}$$

то для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ является рядом Фурье некоторой A–интегрируемой функции. Здесь мы докажем обратное утверждение

Теорема 1.6. *Если для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд по системе Хаара $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ является рядом Фурье A–интегрируемой функции, то выполняется условие (1.2).*

Отметим, что (см. [2]) если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ является рядом Фурье A–интегрируемой функции, то мажоранта частичных сумм этого ряда может не удовлетворять условию (1.2). Следовательно, существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$, который является рядом Фурье A–интегрируемой функции, но при некоторых $\varepsilon_n = 0; 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ не является рядом Фурье A–интегрируемой функции.

Таким образом, получено необходимое и достаточное условие того, чтобы для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ являлся бы рядом Фурье A–интегрируемой функции.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.7. *Для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд по системе Хаара $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ будет рядом Фурье A–интегрируемой функции, тогда и только тогда, когда выполняется условие (1.2).*

2. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \cdots, n_d)$ некоторый элемент из $\mathbb{N}^d$, а число M выбрано так, чтобы

$$\frac{q_{j+1}}{q_j} \le M \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Нетрудно заметить, что для любого $k \ge 1$ функция $\sup\limits_{j \ge k} |S_{q_j}(\mathbf{x})|$ удовлетворяет условию (1.1) с теми же λ_m. Поэтому, без ограничения общности будем считать, что выполняется $n_i \le q_1$ для всех i, $i = 1, 2, \cdots, d$. Ясно, что

$$a_{\mathbf{n}} = \int_{[0;1]^d} S_{q_1}(\mathbf{x}) \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Delta_{\mathbf{n}}} S_{q_1}(\mathbf{x}) \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

где $\Delta_{\mathbf{n}} = \operatorname{supp}(\chi_{\mathbf{n}})$.

Напомним, что двоичный параллелепипед $\Delta \subset [0;1]^d$ называется параллелепипедом постоянства для $S_j(\mathbf{x})$, если $S_j(\mathbf{x})$ постоянная на Δ и непостоянная на любом двоичном параллелепипеде Δ', который содержит Δ. Ясно, что если $\Delta \subset [0;1]^d$–параллелепипед постоянства для $S_j(\mathbf{x})$, то

$$\int_{\Delta} S_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Delta} S_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{для любого } i > j. \tag{2.2}$$

Допустим $\Delta_{\mathbf{n}} = \bigcup\limits_{k=1}^{r} I_k$, где I_k параллелепипеды постоянства для $S_{q_1}(x)$, входящие в $\Delta_{\mathbf{n}}$. Очевидно, что на I_k функция $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ постоянная, (принимает значения $\pm\|\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\|_\infty$), которую обозначим через $\chi_{\mathbf{n}}(I_k)$. Тогда

$$a_{\mathbf{n}} = \sum_{k=1}^{r} \chi_{\mathbf{n}}(I_k) \int_{I_k} S_{q_1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{2.3}$$

Для каждого k, $(k = 1, 2, \cdots, r)$ и числа $m \in \mathbb{N}$ обозначим

$$S^*(\mathbf{x}) = \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})|, \qquad E_m^k = \{\mathbf{x} \in I_k : \quad S^*(\mathbf{x}) > \lambda_m\}.$$

Пусть ε-произвольное положительное число, удовлетворяющее условию

$$\varepsilon < 2^{-d(M+1)} \tag{2.4}$$

Выберем натуральное число m настолько большим, чтобы $\lambda_m > 1$ и (см. (1.1))

$$\lambda_m \cdot mes(E_m^k) < \varepsilon \cdot mes(I_k), \quad (k = 1, 2, \cdots, r). \tag{2.5}$$

Поскольку $S_{q_j}(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})$ п.в., при $j \to \infty$, то для этого m можно найти $p_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы для всех k, $(k = 1, 2, \cdots, r)$

$$mes\{\mathbf{x} \in I_k : \quad |S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| > \varepsilon\} < \frac{\varepsilon}{\lambda_m} \cdot mes(I_k). \tag{2.6}$$

Заметим, что для всех $\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{n}}$ выполняется неравенство $|S_{q_2}(\mathbf{x})| \le \lambda_m$. Действительно, допустим $\Delta \subset I_k$ – некоторый параллелепипед постоянства для $S_{q_2}(\mathbf{x})$ и на нем выполняется неравенство $|S_{q_2}(\mathbf{x})| > \lambda_m$, тогда из определения множества E_m^k, следует, что $\Delta \subset E_m^k$, откуда, с учетом (2.1), получаем

$$mes(E_m^k) \ge mes(\Delta) \ge 2^{-d(M+1)} mes(I_k) > \varepsilon \cdot mes(I_k),$$

которое противоречит условию (2.5). Пусть $I_k = \bigcup\limits_i \Delta_{k,i}^2$, где $\{\Delta_{k,i}^2\}$-параллелепипеды постоянства для $S_{q_2}(\mathbf{x})$, входящие в I_k. Параллелепипед $\Delta_{k,i}^2$ назовем параллелепипедом первого рода, если выполняется неравенство $|S_{q_3}(\mathbf{x})| \le \lambda_m$ для $\mathbf{x} \in \Delta_{k,i}^2$. В противном случае $\Delta_{k,i}^2$ назовем параллелепипедом второго рода. Обозначим

$$\Gamma_2' = \{i : \ \Delta_{k,i}^2\text{–параллелепипед первого рода}\},$$

$$\Gamma_2'' = \{i : \Delta_{k,i}^2\text{-параллелепипед второго рода}\}.$$

Ясно, что $I_k = \left(\bigcup_{i\in\Gamma_2'} \Delta_{k,i}^2\right) \bigcup \left(\bigcup_{i\in\Gamma_2''} \Delta_{k,i}^2\right)$. Допустим уже определены параллелепипеды $\{\Delta_{k,i}^2\}, \{\Delta_{k,i}^3\}, \cdots, \{\Delta_{k,i}^{p-1}\}$ и множества $\Gamma_2', \Gamma_2'', \cdots, \Gamma_{p-1}', \Gamma_{p-1}''$ и I_k представляется в виде

$$I_k = \Big(\bigcup_{s=2}^{p-1} \Big(\bigcup_{i\in\Gamma_s''} \Delta_{k,i}^s\Big)\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\Gamma_{p-1}'} \Delta_{k,i}^{p-1}\Big).$$

Представим $\bigcup\limits_{i\in\Gamma_{p-1}'} \Delta_{k,i}^{p-1}$ в виде объединения $\bigcup\limits_j \Delta_{k,j}^p$, где $\{\Delta_{k,j}^p\}$-являются параллелепипедами постоянства для $S_{q_p}(\mathbf{x})$. Параллелепипед $\Delta_{k,j}^p$ назовем параллелепипедом первого рода, если для $\mathbf{x} \in \Delta_{k,j}^p$ выполняется неравенство $|S_{q_{p+1}}(\mathbf{x})| \le \lambda_m$, в противном случае $\Delta_{k,j}^p$ назовем параллелепипедом второго рода. Обозначим

$$\Gamma_p' = \{i : \ \Delta_{k,i}^p\text{–параллелепипед первого рода}\},$$

$$\Gamma_p'' = \{i : \Delta_{k,i}^p\text{-параллелепипед второго рода}\}.$$

Таким образом, по индукции будем определять параллелепипеды $\{\Delta_{k,i}^2\}$, $\{\Delta_{k,i}^3\}$, $\cdots$, $\{\Delta_{k,i}^{p_0}\}$ и множества $\Gamma_2', \Gamma_2'', \cdots, \Gamma_{p_0}', \Gamma_{p_0}''$. Ясно, что

$$I_k = \Big(\bigcup_{s=2}^{p_0} \Big(\bigcup_{i\in\Gamma_s''} \Delta_{k,i}^s\Big)\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\Gamma_{p_0}'} \Delta_{k,i}^{p_0}\Big).$$

Из определения следует, что если для некоторого $p \in \{2, 3, \cdots, p_0\}$, $\Delta_{k,i}^p$ является параллелепипедом второго рода, то некоторое подмножество параллелепипеда $\Delta_{k,i}^p$ (некоторый параллелепипед постоянства для $S_{q_{p+1}}(\mathbf{x})$), мера которого не меньше чем $\frac{1}{2^{d(M+1)}}$ часть меры множества $\Delta^p_{k,i}$, является подмножеством множества E^k_m. Поэтому

$$\text{(2.7)} \qquad mes(\bigcup_{s=2}^{p_0}(\bigcup_{i\in\Gamma''_s}\Delta^s_{k,i})) \le 2^{d(M+1)}\cdot mes(E^k_m).$$

Ясно также, что для всех $p\in\{2,3,\cdots,p_0\}$ и для любого i выполняется неравенство

$$\text{(2.8)} \qquad |S_{q_p}(\mathbf{x})| \le \lambda_m, \quad \text{для всех } \mathbf{x}\in\Delta^p_{k,i}.$$

Обозначим

$$G_{k1} = \left\{\mathbf{x}\in\cup_{i\in\Gamma'_{p_0}}\Delta^{p_0}_{k,i}:\ |S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \le \varepsilon\right\},$$

$$G_{k2} = \left\{\mathbf{x}\in\cup_{i\in\Gamma'_{p_0}}\Delta^{p_0}_{k,i}:\ |S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| > \varepsilon\right\}.$$

Очевидно, что для всех k, $1\le k\le r$,

$$\left|\int_{I_k} S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}d\mathbf{x}\right| \le \left|\sum_{s=2}^{p_0}\sum_{i\in\Gamma''_s}\int_{\Delta^s_{k,i}} S_{q_{p_0}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right| + \left|\sum_{s=2}^{p_0}\sum_{i\in\Gamma''_s}\int_{\Delta^s_{k,i}}[f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}d\mathbf{x}\right|$$

$$\text{(2.9)} \qquad + \int_{G_{k1}}|S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}|d\mathbf{x} + \int_{G_{k2}}|S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}|d\mathbf{x}.$$

Из (2.7), (2.5), (2.8) и (2.2), следует, что

$$\text{(2.10)} \quad \sum_{s=2}^{p_0}\sum_{i\in\Gamma''_s}\int_{\Delta^s_{k,i}}|[f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}|d\mathbf{x} \le \lambda_m 2^{d(M+1)}\cdot mes(E^k_m) \le 2^{d(M+1)}\varepsilon\cdot mes(I_k),$$

$$\text{(2.11)} \quad \left|\sum_{s=2}^{p_0}\sum_{i\in\Gamma''_s}\int_{\Delta^s_{k,i}} S_{q_{p_0}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right| = \left|\sum_{s=2}^{p_0}\sum_{i\in\Gamma''_s}\int_{\Delta^s_{k,i}} S_{q_s}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right| \le 2^{d(M+1)}\varepsilon\cdot mes(I_k).$$

Очевидно, что предпоследнее слагаемое в (2.9) не больше чем $\varepsilon\cdot mes(I_k)$. Для последнего слагаемого в (2.9), с учетом (2.8) и (2.6), получаем

$$\text{(2.12)} \qquad \int_{G_{k2}}|S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}|d\mathbf{x} \le 2\lambda_m\frac{\varepsilon}{\lambda_m}\cdot mes(I_k) \le 2\varepsilon\cdot mes(I_k).$$

Учитывая также (2.3) и (2.2), из (2.9)-(2.12) получаем

$$|a_{\mathbf{n}} - \int_{[0;1]^d}[f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}| = |\sum_{k=1}^{r}\chi_{\mathbf{n}}(I_k)\int_{I_k}(S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m})d\mathbf{x}|$$

$$\le \|\chi_{\mathbf{n}}\|_\infty\sum_{k=1}^{r}\varepsilon\cdot mes(I_k)(2^{d(M+1)+1}+3) \le \|\chi_{\mathbf{n}}\|_\infty\cdot mes(\Delta_{\mathbf{n}})2^{d(M+1)+2}\varepsilon.$$

Теорема 1.2 доказана.

Для доказательства теоремы 1.5 нам нужен следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть* $\{q_n\}$ *подпоследовательность натуральных чисел, с условием* $\sup\limits_n \frac{q_{n+1}}{q_n} = +\infty$, *а* $F(x)$–*некоторая неотрицательная функция, определенная на* $[0;1]$, *и* $E = supp(F)$ *является конечным объединением непересекающихся двоичных интервалов, на каждом из которых* $F(x)$–*постоянная. Тогда для любых* $\varepsilon, \delta > 0$ *и* $N_0 \in \mathbb{N}$ *существует полином* $P(x) = \sum\limits_{k=N_0}^{M} a_k\chi_k(x)$ *такое, что*

1) $supp(P) \subset E$,

2) $\min\{P(x) + F(x) : \quad P(x) + F(x) \neq 0\} > \max F(x)$,

3) $mes(supp(P + F)) \leq \delta$,

4) *для всех* $\lambda > \max F(x)$ *выполняется неравенство*

$$\lambda \cdot mes\{x : \quad \max_{n: q_n \leq M} \left|F(x) + \sum_{k=N_0}^{q_n} a_k\chi_k(x)\right| > \lambda\} < \varepsilon,$$

5)*для каждого* $x \in [0;1]$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *с условием* $N_0 \leq q_n \leq M$, *либо* $\sum\limits_{k=N_0}^{q_n} a_k\chi_k(x) = 0$ *либо* $\sum\limits_{k=N_0}^{q_n} a_k\chi_k(x) = P(x)$.

Доказательство леммы 2.1. Пусть $E = \operatorname{supp}(F)$ является конечным объединением непересекающихся двоичных интервалов, длина которых больше чем h, а $\gamma := \max\limits_{x\in[0;1]} F(x)$. Выберем натуральное число d так, чтобы выполнялись условия

$$2^d > N_0, \qquad \frac{1}{2^d} < \min\left\{\delta;\ \frac{h}{2};\ \frac{\varepsilon}{2\gamma}\right\}. \tag{2.13}$$

Из последнего неравенства следует, что множество E можно представить в виде объединения непересекающихся двоичных интервалов, длины 2^{-d}:

$$E = \bigcup_{k=1}^{m} I_k, \quad \text{где} \quad I_k = \left[\frac{\alpha_k}{2^d}; \frac{\alpha_k + 1}{2^d}\right]. \tag{2.14}$$

Пусть $\gamma_k := F(I_k)$–значение функции F на множестве I_k. Выберем натуральные числа r_k, $\quad k = 1, 2, \cdots, m$, так, чтобы выполнялись условия

$$\gamma_1 \cdot 2^{r_1} > \gamma, \tag{2.15}$$

$$r_k > r_{k-1}, \qquad \gamma_k \cdot 2^{r_k} > \gamma_{k-1} \cdot 2^{r_{k-1}}, \qquad k = 2, 3, \cdots, m. \tag{2.16}$$

Поскольку $\sup\limits_n \frac{q_{n+1}}{q_n} = +\infty$, то из последовательности $\{q_n\}$ можно выбрать числа $q_{n_1}, q_{n_2}, \cdots, q_{n_m}$, удовлетворяющие условиям

$$2^d < q_{n_1} < q_{n_2} < \cdots < q_{n_m}, \tag{2.17}$$

$$\frac{q_{n_k+1}}{q_{n_k}} > 2^{r_k+2} \qquad k = 1, 2, \cdots, m.$$

Из последнего неравенства следует, что для каждого k, $(k = 1, 2, \cdots, m)$, существует натуральное число i_k такое, что $q_{n_k} < 2^{i_k}$ и $2^{i_k+r_k} < q_{n_k+1}$.

Ясно, что (см. (2.14) и (2.17)) каждый интервал I_k, $(k = 1, 2, \cdots, m)$, можно представить в виде объединения непересекающихся двоичных интервалов длины 2^{-i_k}:

$$I_k = \bigcup_{s\in\Lambda_k} J_s^{(k)} = \bigcup_{s\in\Lambda_k} \left[\frac{l_s}{2^{i_k}}; \frac{l_s+1}{2^{i_k}}\right]$$

Пусть n натуральное число и $1 \le i \le 2^n$, обозначим $\tilde{\chi}_i^{(n)}(x) := 2^{-n/2}\chi_i^{(n)}(x)$ (функция Хаара, нормированная в L_∞). Рассмотрим полиномы по системе Хаара

$$P_k(x) = \sum_{s\in\Lambda_k} \sum_{j=0}^{r_k-1} 2^j \tilde{\chi}_{2^j l_s+1}^{(i_k+j)}(x) \qquad k = 1, 2, \cdots, m.$$

Ясно, что

$$\mathbb{1}_{I_k}(x) + P_k(x) = \begin{cases} 2^{r_k}, & \text{если } x \in E_k \subset I_k, \\ 0, & \text{если } x \in [0;1] \setminus E_k, \end{cases} \tag{2.18}$$

где $\mathbb{1}_{I_k}$–характеристическая функция множества I_k, а E_k является конечным объединением двоичных интервалов и

$$mes(E_k) = \sum_{s\in\Lambda_k} \frac{1}{2^{r_k}} \cdot mes(J_s^{(k)}) = \frac{1}{2^{r_k}} mes(I_k) = \frac{1}{2^{d+r_k}}. \tag{2.19}$$

Обозначим

$$P(x) = \sum_{k=N_0}^{M} a_k\chi_k(x) \equiv \sum_{k=1}^{m} \gamma_k P_k(x). \tag{2.20}$$

Утверждения 1) и 5) леммы 2.1, непосредственно, следуют из (2.14), (2.18) и (2.20).

Из определения чисел γ_k, $(\gamma_k = F(I_k))$ (2.18) и (2.20) получаем, что

$$F(x) + P(x) = \begin{cases} \gamma_k 2^{r_k}, & \text{если } x \in E_k, \quad k = 1, 2, \cdots, m, \\ 0, & \text{если } x \in [0;1] \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{m} E_k\right). \end{cases} \tag{2.21}$$

Комбинируя последнее равенство с (2.15) и (2.16) получаем утверждение 2) леммы 2.1. Из (2.21), (2.19), (2.13) и первого неравенства (2.16) следует, что

$$mes(\mathrm{supp}(F+P)) = \sum_{k=1}^{m} mes(E_k) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^{d+r_k}} \le \frac{2}{2^{d+r_1}} \le \frac{1}{2^d} \le \delta.$$

Приступим к доказательству утверждения 4) леммы 2.1. При $\lambda \ge \gamma_m 2^{r_m}$ множество $\{x : F(x)+P(x) > \lambda\} = \emptyset$ (см. (2.16) и (2.21)) и утверждение 4) очевидно. Допустим λ некоторое число из промежутка $(\gamma; \gamma_m 2^{r_m})$, тогда для некоторого числа

s $(s = 1, 2, \cdots, m)$ выполняется неравенство $\gamma_{s-1}2^{r_{s-1}} \le \lambda < \gamma_s 2^{r_s}$ $\quad (\gamma_0 2^{n_0} := \gamma)$, следовательно из (2.21), (2.15) и (2.16) получаем

$$mes\{x: \max_{n: q_n \le M} |F(x) + \sum_{k=N_0}^{q_n} a_k \chi_k(x)| > \lambda\} = mes\left(\bigcup_{k=s}^{m} E_k\right) = \sum_{k=s}^{m} \frac{1}{2^{d+r_k}} < \frac{2}{2^{d+r_s}}.$$

Комбинируя последнее неравенство с (2.13), получаем

$$\lambda \cdot mes\{x: \max_{n: q_n \le M} |F(x) + \sum_{k=N_0}^{q_n} a_k \chi_k(x)| > \lambda\} < \frac{2\lambda}{2^{d+r_s}} \le \frac{2\gamma_s 2^{r_s}}{2^{d+r_s}} \le \frac{\varepsilon\gamma_s}{\gamma} \le \varepsilon.$$

Лемма 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.5. Пусть последовательность $\{q_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.5, а $F_0(x) \equiv 1$ при $x \in E_0 := [0; 1]$. Применяя лемму 2.1 для функции $F_0(x)$ и чисел $\varepsilon_1 = \delta_1 = 2^{-1}$, $N_0 = 2$ получаем полином по системе Хаара

$$P_1(x) = \sum_{k=N_0}^{N_1 - 1} a_k \chi_k(x)$$

удовлетворяющий утверждениям 1)–5) леммы 2.1. Обозначим $F_1(x) := F_0(x) + P_1(x)$ и $E_1 := \text{supp}(F_1)$. Ясно, что $mes(E_1) < 2^{-1}$. Допустим, что для чисел $i = 1, 2, \cdots, m-1$ уже определены полиномы $P_i(x) = \sum\limits_{k=N_{i-1}}^{N_i - 1} a_k \chi_k(x)$, функции $F_i(x) := F_{i-1}(x) + P_i(x)$ и множества $E_i := \text{supp}(F_i)$ такие, что E_i можно представить в виде объединения двоичных интервалов, на каждом из которых функция $F_i(x)$ постоянная. Пусть $\Gamma_{m-1} := \max\limits_{x} F_{m-1}(x)$.

Применяя лемму 2.1 для функции $F_{m-1}(x)$, чисел $\varepsilon_m = 2^{-m}$, $\delta_m = \dfrac{1}{2^m \Gamma_{m-1}}$ и N_{m-1} получаем полином по системе Хаара

$$P_m(x) = \sum_{k=N_{m-1}}^{N_m - 1} a_k \chi_k(x)$$

удовлетворяющий условиям:

$A)$ $\text{supp}(P_m) \subset E_{m-1}$,

$B)$ $\min\limits_{x}\{F_m(x): \quad F_m(x) \ne 0\} > \Gamma_{m-1}$, где $F_m(x) := F_{m-1}(x) + P_m(x)$,

$C)$ $mes(E_m) \le \dfrac{1}{2^m \Gamma_{m-1}}$, где $E_m := \text{supp}(F_m)$,

$D)$ для всех $\lambda > \Gamma_{m-1}$ выполняется неравенство

$$\lambda \cdot mes\{x: \max_{n: N_{m-1} \le q_n < N_m} |F_{m-1}(x) + \sum_{k=N_{m-1}}^{q_n} a_k \chi_k(x)| > \lambda\} < 2^{-m},$$

E) для каждого $x \in [0;1]$ и натурального числа n, с условием $N_{m-1} \le q_n < N_m$, либо $\sum_{k=N_{m-1}}^{q_n} a_k\chi_k(x) = 0$ либо $\sum_{k=N_{m-1}}^{q_n} a_k\chi_k(x) = P_m(x)$.

Следовательно, по индукции, построим последовательности полиномов $\{P_m(x)\}$, функций $\{F_m(x)\}$, множеств $\{E_m\}$ и чисел $\{\Gamma_m\}$, удовлетворяющие условиям $A) - E)$. Из A) и C) следует, что $F_m(x) \to 0$ п.в. на $[0;1]$.

Рассмотрим ряд

$$1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k\chi_k(x) \equiv F_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x). \tag{2.22}$$

Ясно, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$1 + \sum_{k=2}^{N_m-1} a_k\chi_k(x) = F_m(x),$$

поэтому, частичные суммы $S_{q_n}(x)$ ряда (2.22) удовлетворяют следующему условию (см. E)): Для каждого натурального числа n, если $q_n \in [N_{m-1}; N_m)$, то для каждого $x \in [0;1]$ функция $S_{q_n}(x)$ совпадает либо с $F_m(x)$ либо с $F_{m-1}(x)$. Следовательно

$$S_{q_n}(x) \to 0 \quad \text{п.в. на } [0;1], \text{ при } n \to \infty.$$

Пусть λ некоторое положительное число, больше 1. Тогда для некоторого натурального числа m выполняется неравенство $\Gamma_{m-1} < \lambda \le \Gamma_m$. Учитывая A), B) и E) получаем, что

$$\left\{x: \quad \sup_n |S_{q_n}(x)| > \lambda\right\} = \left\{x: \max_{n: N_{m-1} \le n < N_m} |S_{q_n}(x)| > \lambda\right\} \cup E_{m+1}.$$

Комбинируя последнее равенство с C) и D), получаем

$$\lambda \cdot mes\{x: \quad \sup_n |S_{q_n}(x)| > \lambda\} \le 2^{-m} + \frac{\lambda}{2^{m+1}\Gamma_m} < 2^{-(m-1)}.$$

Теорема 1.5 доказана.

Для доказательства теоремы 1.6 нам нужно следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть* $\sup_N \left|\sum_{n=N_0}^{N} a_n\chi_n(x)\right| > M$ *на некотором множестве* E *положительной меры. Тогда для любого* $\alpha \in (0;1)$ *существуют* $N_1 \in \mathbb{N}$ *и* $\varepsilon_n \in \{0;1\}$ *такие, что*

$$mes\left\{x \in E: \quad \left|\sum_{n=N_0}^{N_1} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)\right| > M\right\} > \alpha \cdot mes(E).$$

Доказательство леммы 2.2. Пусть i_1 – наименьшее натуральное число, для которого существует двоично иррациональное число $x_1 \in E$, с условием $|\sum\limits_{n=N_0}^{i_1} a_n\chi_n(x_1)| > M$. Обозначим через Δ'_1 тот интервал постоянства функции $\chi_{i_1}(x)$, который содержит точку x_1. Ясно, что

$$\left|\sum_{n=N_0}^{i_1} a_n\chi_n(x)\right| > M \qquad \text{для всех } x \in \Delta'_1.$$

Допустим уже определены возрастающие натуральные числа $i_1, i_2, \cdots, i_{p-1}$ и непересекающиеся множества $\Delta'_1, \Delta'_2, \cdots, \Delta'_{p-1}$. Пусть i_p–наименьшее натуральное число, для которого существует двоично иррациональная точка $x_p \in E \setminus \cup_{k=1}^{p-1}\Delta'_k$, удовлетворяющая условию $|\sum\limits_{n=N_0}^{i_p} a_n\chi_n(x_p)| > M$. Допустим Δ'_p–тот интервал постоянства функции $\chi_{i_p}(x)$ который содержит точку x_p. Ясно, что

$$\left|\sum_{n=N_0}^{i_p} a_n\chi_n(x)\right| > M \qquad \text{для всех } x \in \Delta'_p. \tag{2.23}$$

Так, по индукции, определим числа $\{i_k\}$ и множества $\{\Delta'_k\}$, удовлетворяющие условию (2.23). Причем, если при некотором p, $mes(E \setminus \cup_{k=1}^{p-1}\Delta'_k) = 0$, то на этом шаге выбор чисел i_k и множеств Δ'_k останавливается. В любом случае, из построения следует, что

$$\Delta'_i \cap \Delta'_j = \emptyset \quad (i \neq j) \qquad \text{и} \qquad E \subset \bigcup_k \Delta'_k.$$

Выберем натуральное число p_0 так, чтобы для множества $E_1 = \cup_{k=1}^{p_0}\Delta'_k$ выполнялось $mes(E_1 \cap E) > \alpha \cdot mes(E)$. Положим

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad \Delta_n := \mathrm{supp}(\chi_n) \subset E_1 \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из (2.23) и определения множества E_1 следует, что

$$\left|\sum_{n=N_0}^{i_{p_0}} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)\right| > M \qquad \text{для всех} \quad x \in E_1.$$

Лемма 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.6. Теорему 1.6 докажем от противного. Допустим для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ сходится п. в. к некоторой A–интегрируемой функции, но для некоторого положительного числа δ выполняется неравенство

$$\limsup_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot mes\,\{x \in [0;1] : \quad S^*(x) > \lambda\} \geq 2\delta > 0. \tag{2.24}$$

где $S^*(x) := \sup_N \left|\sum_{n=1}^N a_n\chi_n(x)\right|$. Рассмотрим 2 случая.

1°. Пусть $S^*(x) < +\infty$ п. в.

Для каждого k положим $E_k := \{x \in [0;1] : \quad S^*(x) > \lambda_k\}$, где возрастающая последовательность $\{\lambda_k\}$ будет определена ниже по индукции. Очевидно, что $E_k \subset E_{k-1}$ и E_k можно представить в виде объединения двоичных интервалов. Допустим $E_k = \cup_m I_{k,m}$ и $E'_k := \cup_m I'_{k,m}$, где $I_{k,m}$ и $I'_{k,m}$–двоичные интервалы такие, что $I_{k,m} \subset I'_{k,m}, \quad mes(I'_{k,m}) = 2 \cdot mes(I_{k,m})$ и, кроме того, $I'_{k,m} \not\subset E_k$.

Возьмем число λ_1 так, чтобы $\lambda_1 \cdot mes(E_1) > \delta$ (см. (2.24)). Согласно лемме 2.2, существуют $N_1 \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_n = 0; 1$ такие, что для функции $\varphi_1(x) := \sum_{n=1}^{N_1} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ выполнятся неравенство

$$mes\{x \in E_1 : \quad |\varphi_1(x)| > \lambda_1\} > \frac{mes(E_1)}{2}. \tag{2.25}$$

Допустим, что уже определены числа λ_i и функции $\varphi_i(x) = \sum_{n=N_{i-1}+1}^{N_i} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$, $i = 1; 2; \cdots; k-1$. Пусть $M_{k-1} = \max_x \sum_{n=1}^{N_{k-1}} |a_n\chi_n(x)|$. Выберем число λ_k такое, чтобы выполнялись неравенства (см. (2.24))

$$\lambda_k > 2(M_{k-1} + \lambda_{k-1}), \tag{2.26}$$

$$mes(E_k) < \frac{mes(E_{k-1})}{16} \quad \text{и} \quad \lambda_k \cdot mes(E_k) > \delta. \tag{2.27}$$

Заметим, что

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{n=1 \\ \Delta_n \not\subset E'_{k-1}}}^{N} a_n\chi_n(x) \right| \le \lambda_{k-1} \quad \text{для всех } x \in [0;1]. \tag{2.28}$$

Действительно, если бы для некоторого $x_1 \in [0;1]$ в (2.28) выполнялось обратное неравенство, то это означало бы, что $x_1 \in E_{k-1}$, т.е. $x_1 \in I_{k-1,m}$, для некоторого m. Но для всех N сумма $\sum_{\substack{n=1 \\ \Delta_n \not\subset E'_{k-1}}}^{N} a_n\chi_n(x)$ постоянна на интервале $I'_{k-1,m}$, значит $\sup_N \left| \sum_{\substack{n=1 \\ \Delta_n \not\subset E'_{k-1}}}^{N} a_n\chi_n(x) \right| > \lambda_{k-1}$ для всех $x \in I'_{k-1,m}$, которое невозможно, поскольку $I'_{k-1,m} \not\subset E_{k-1}$.

Из (2.26), (2.28) и определения числа M_{k-1} следует, что для всех $x \in E_k$ выполняется неравенство

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{n=N_{k-1}+1 \\ \Delta_n \subset E'_{k-1}}}^{N} a_n \chi_n(x) \right| \geq S^*(x) - M_{k-1} - \sup_N \left| \sum_{\substack{n=1 \\ \Delta_n \not\subset E'_{k-1}}}^{N} a_n \chi_n(x) \right| \geq$$

$$\geq \lambda_k - M_{k-1} - \lambda_{k-1} > \frac{\lambda_k}{2}.$$

Отсюда, с применением леммы 2.2 , получаем числа $N_k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_n = 0; 1$ такие, что для функции $\varphi_k(x) := \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ выполняется неравенство

$$mes\{x \in [0;1] : \quad \varphi_k(x) > \lambda_k/2\} > \frac{mes(E_k)}{2}. \tag{2.29}$$

Ясно, что

$$\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset E'_{k-1} \quad \text{и} \quad mes(\operatorname{supp}(\varphi_k)) \leq mes(E'_{k-1}) \leq 2 \cdot mes(E_{k-1}). \tag{2.30}$$

Так, по индукции, будем определять числа $\{\lambda_k\}$, множества E_k, E'_k и функции $\varphi_k(x)$, удовлетворяющие условиям (2.26), (2.27), (2.29) и (2.30).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n a_n \chi_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_{2k-1}+1}^{N_{2k}} \varepsilon_n a_n \chi_n(x).$$

Из (2.30) и (2.27) следует, что этот ряд п. в. сходится к некоторой функции $f(x)$. Из определения чисел M_k и (2.26) следует, что для всех натуральных $k > 1$

$$\left\{x : \ |f(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{4}\right\} \supset \left\{x : \ |\varphi_{2k}(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{4} + M_{2k-2}\right\} \setminus \bigcup_{n=k+1}^{\infty} \operatorname{supp}(\varphi_{2n}(x)) \supset$$

$$\supset \left\{x : \ |\varphi_{2k}(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{2}\right\} \setminus \bigcup_{n=k+1}^{\infty} \operatorname{supp}(\varphi_{2n}(x)).$$

Поэтому, учитывая также (2.29), (2.30) и (2.27) получаем,что

$$mes\left\{x : \ |f(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{4}\right\} \geq \frac{mes(E_{2k})}{2} - \frac{mes(E_{2k})}{4} \geq \frac{mes(E_{2k})}{4}.$$

Комбинируя последнее неравенство с вторым неравенством (2.27), получим

$$\lambda_{2k} \cdot mes\left\{x : \ |f(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{4}\right\} \geq \frac{\lambda_{2k} \cdot mes(E_{2k})}{4} > \frac{\delta}{4} > 0,$$

которое означает, что $f(x)$ не является A-интегрируемой функцией, вопреки нашему предположению. Тем самым теорема 1.6 в случае 1°. доказана.

2°. Пусть, теперь множество $B := \{x: \quad S^*(x) = +\infty\}$ имеет положительную меру. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем двоичный интервал I_k так, чтобы

$$I_k \cap (\cup_{j=1}^{k-1} I_j) = \emptyset, \quad mes(I_k \cap B) > 0,9 \cdot mes(I_k) \quad \text{и} \quad mes(I_k) < \frac{mes(B)}{2^k}. \tag{2.31}$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n:\Delta_n \subset I_k} a_n \chi_n(x)$. Ясно, что во всех точках $x \in I_k \cap B$ выполняется $\sup\limits_N \left| \sum\limits_{n:n\le N, \Delta_n \subset I_k} a_n \chi_n(x) \right| = +\infty$, поэтому, применяя лемму 2.2 получаем полином $\varphi_k(x) := \sum_{n:\Delta_n \subset I_k} \varepsilon_n^{(k)} a_n \chi_n(x)$, (с некоторого номера все $\varepsilon_n^{(k)}$ равны нулю), удовлетворяющий условию

$$mes\left\{x \in I_k: \quad |\varphi_k(x)| > \frac{1}{|I_k|}\right\} > 0,8 \cdot mes(I_k). \tag{2.32}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n:\Delta_n \subset I_k} \varepsilon_n^{(k)} a_n \chi_n(x).$$

Заметим, что ряд, стоящей в правой части сходится, поскольку $I_k \cap I_j = \emptyset$ при $k \neq j$ и, для каждого x, конечное число слагаемых отличны от нуля в точке x. Очевидно, что (см. (2.32))

$$mes\left\{x: \quad |f(x)| > \frac{1}{|I_k|}\right\} \geq mes\left\{x: \quad |\varphi_k(x)| > \frac{1}{|I_k|}\right\} > 0,8 \cdot mes(I_k),$$

т.е. $f(x)$ не является A–интегрируемой, так как из (2.31) имеем, что $mes(I_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Теорема 1.6 доказана.

Abstract. In this paper we obtain a necessary and sufficient condition on the sequence of natural numbers $\{q_n\}$ such that the almost everywhere convergence of the cubic partial sums $S_{q_n}(\mathbf{x})$ of the multiple Haar series $\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ and the condition $\liminf\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda \cdot mes\{\mathbf{x} : \sup\limits_n |S_{q_n}(\mathbf{x})| > \lambda\} = 0$, imply that the coefficients $a_{\mathbf{n}}$ can be uniquely determined by the sum of the series. Also, we have obtained a necessary and sufficient condition for the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ with an arbitrary bounded sequence $\{\varepsilon_n\}$ to be a Fourier-Haar series of an A-integrable function.

Список литературы

[1] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, АФЦ (1999).

[2] Г. Г. Геворкян, "О единственности аддитивных функций двоичных кубов и рядов по системе Хаара", Изв. НАН Армении, Серия Математика, **30**, но. 5, 7 – 21 (1995).

[3] В. В. Костин, "К вопросу о восстановлении коэффициентов рядов по некоторым ортогональным системам функций", Мат. Заметки, **73**, но. 5, 704 – 723 (2003).

[4] В. В. Костин, "Обобщение теоремы Л. А. Балашова о подрядах ряда Фурье–Хаара", Мат. Заметки, textbf76, но. 5, 740 – 747 (2004).

[5] Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, **46**, но. 2, 51 – 58 (1989).

[6] Г. Г. Геворкян, "Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина", Мат. Заметки, **59**, но. 4, 521 – 545 (1996).

[7] А. Б. Александров, "Об *A*-интегрируемости граничных значений гармонических функций", Мат. Заметки, **30**, 59 – 72 (1981).

[8] Г. Г. Геворкян, "О единственности тригонометрических рядов, Мат. Сборник, **180**, но. 11, 1462 – 1474 (1989).

[9] D. L. Burkholder, R. F. Gundy, "Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales", Acta Math., **124**, 249 – 304 (1970).

[10] B. Davis, "On the integrability of the martingale square function", Israel J. Math., **8**, 187 – 190 (1970).

Поступила 11 марта 2016