Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 3, 2017, стр. 3-15.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

С. И. АДЯН, В. С. АТАБЕКЯН

Ереванский государственный университет, Армения[1]
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва[2]
E-mails: *sia@mi.ras.ru*; *avarujan@ysu.am*

Аннотация. В работе дается обзор результатов, относящихся к n-периодическим произведениям групп, которые были получены в последние годы авторами данной статьи, а также результаты других авторов в этом направлении. Эти операции были введены С.И.Адяном в 1976 году для решения известной проблемы А.И. Мальцева. Было установлено, что периодические произведения являются ассоциативными, точными, наследственными по подгруппам а также обладают другими важными свойствами, такими как хопфовость, C^*-простота, равномерная неаменабельность, SQ-универсальность и т.д. Было также установлено, что n-периодические произведения групп можно однозначно охарактеризовать с помощью некоторых конкретных и просто формулируемых свойств, что позволяет на n-периодические произведения разных семейств групп распространить многие полученные ранее результаты о свободных периодических группах $B(m, n)$. В частности, в статье дается описание конечных подгрупп n-периодических произведений, анализируется и обобщается полученное ранее С. И. Адяном критерий простоты периодических произведений.

MSC2010 number: 20F50; 20F05; 20E06; 20F28; 22D25

Ключевые слова: Периодическая группа, n-периодическое произведение, автоморфизм, подгруппа, равномерная неаменабельность, C^*-простая группа.

1. Введение

Понятие *периодического произведения периода n* для данного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$, обозначаемое через $\prod_{i\in I}^{n} G_i$, было введено С. И. Адяном в работе [1] (см. также [2]). Создание этих произведений позволило решить известную проблему А. И. Мальцева о существовании операции умножения групп, отличной от классических операций свободного и прямого произведений и удовлетворяющей всем известным свойствам этих операций.

---

[1]Исследование В. С. Атабекяна выполнено за счет гранта ГК МОН РА и РФФИ РФ в рамках совместных научных программ 15RF-054 и 15-51-05012-Арм_а

[2]Разделы 1-5 статьи выполнены С. И. Адяном, а разделы 6-9 – В. С. Атабекяном. Исследование С. И. Адяна выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект номер 16-11-10252) в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Периодическое произведение данного периода n определяется для каждого нечетного $n \geq 665$ на основе теории Новикова-Адяна, которая подробно изложена в монографии [3] (см. также [4]). Для произвольного данного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ произведение $G = \prod_{i \in I}^{\mathbf{n}} G_i$ определяется как фактор группа свободного произведения этого семейства по системе определяющих соотношений вида $A^n = 1$, которые определяются сложной совместной индукцией по натуральному параметру, называемому *рангом.*

Эти операции умножения групп обладают основными свойствами классических операций свободного и прямого произведения групп (см. [1]): они являются точными, ассоциативными и наследственными по подгруппам. В связи с проблемой поставленной А. И. Мальцевым, последнее свойство получило название постулат Мальцева. Свойство наследственности по подгруппам означает, что подгруппы H_i компонент G_i n-периодического произведения $G = \prod_{i \in I}^{\mathbf{n}} G_i$ порождают в G свое n-периодическое произведение. Точнее, тождественные вложения $H_i \rightarrowtail G_i$ продолжаются до вложения их n-периодического произведения $H = \prod_{i \in I}^{\mathbf{n}} H_i$ в группу $G = \prod_{i \in I}^{\mathbf{n}} G_i$.

2. Критерий простоты и его обобщение

Конструкция n-периодического произведения нечетного периода n обладает также следующим важным свойством условной периодичности, которое можно рассматривать как естественный аналог тождества коммутации элементов из разных компонент в прямых произведениях групп:

Предложение 2.1. (см. [1, Теорема 2]) *Если исходные группы G_i не содержат инволюций, то операция умножения групп $\prod_{i \in I}^{\mathbf{n}} G_i$ может быть построена так, чтобы в ней для любого элемента x, который не сопряжен никакому элементу исходных компонент, выполнялось равенство $x^n = 1$.*

На основе этого свойства в работе [5] С. И. Адяном был доказан следующий критерий простоты n-периодических произведений групп.

Теорема 2.1. (см. [5, Теорема 1]) *Периодическое произведение данного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$, не содержащих инволюцию, является простой группой в том и только том случае, если $G_i^n = G_i$ для каждого множителя G_i этого произведения.*

Критерий простоты позволил указать новые серии конечно порожденных бесконечных простых групп в многообразиях периодических групп нечетного составного периода nk, где $k > 1$ и $n \geq 665$ (см. [5, Теорема 2]). Таким образом, был получен положительный ответ на вопрос, поставленный в известной монографии Ханны Нейман: *Может ли многообразие, отличное от многообразия всех групп, содержать бесконечное множество неизоморфных (нециклических) простых групп?*

Спектром данной периодической группы называется множество порядков всех нетривиальных элементов этой группы. В работе [5] доказана также

Теорема 2.2. *Для всякого множества M нечетных простых чисел, содержащего хотя бы одно число $p > 665$, можно построить счетную периодическую простую группу H , для которой M является спектром. Если при этом множество M конечно, то построенная группа H имеет конечное число порождающих и ограниченную экспоненту.*

Отсюда также следует существование континуума различных счетных простых периодических групп.

В совместной работе авторов [6] получено естественное обобщение критерия простоты (см. теорему 2.1 выше).

Теорема 2.3. *(см. [6, Теорема 2]) Любая нетривиальная нормальная подгруппа n-периодического произведения $G = \prod_{i \in I}^{n} G_i$ содержит подгруппу G^n.*

Из него непосредственно вытекает

Следствие 2.1. *n-периодическое произведение $G = \prod_{i \in I}^{n} G_i$ является простой группой тогда и только тогда, когда $G = G^n$.*

3. О хопфовости периодических произведений

Группа называется хопфовой, если всякий ее эпиморфизм на себя является автоморфизмом. Согласно известной теореме Мальцева (1958) все конечно порожденные финитно аппроксимируемые группы хопфовы. Примеры относительно свободных (разрешимых) не финитно аппроксимируемых хопфовых групп впервые были построены Ю. Г. Клейманом в 1982г. Вопрос о том являются ли хопфовыми свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ нечетного периода $n \geq 665$ пока остается открытым.

Существуют примеры бесконечных, конечно порожденных финитно аппроксимируемых, а следовательно и хопфовых, периодических групп (Голод, 1964г., Григорчук, 1984 г.), но эти группы не удовлетворяют какому либо тождеству вида $x^n = 1$. Нами получен положительный ответ на более общий вопрос о том, существуют ли не простые, не финитно аппроксимируемые, конечно порожденные хопфовы группы, удовлетворяющие тождеству вида $x^n = 1$?

Теорема 3.1. (см. [6, Теорема 4]) *Если в n-периодическом произведении $G = \prod_{i\in I}^{n} G_i$ групп без инволюций хотя бы в одном из множителей не выполняется тождество $x^n = 1$, то G является хопфовой группой.*

С помощью теоремы 3.1 удается построить примеры не простых и не финитно аппроксимируемых хопфовых групп ограниченного периода.

Следствие 3.1. (см. [6, Следствие 3]) *Если нечетное число $n \geq 665$ является собственным делителем числа $r = kn$, то n-периодическое произведение конечного числа циклических групп периода r есть не простая хопфова группа, которая не финитно аппроксимируема.*

4. Наследуемо факторизуемые множители периодических произведений

В работе [6] выявлено еще одно интересное свойство нормальных подгрупп n-периодических произведений групп. Допустим, что некоторая подгруппа H группы G обладает вполне естественным свойством подгрупп: заданную конгруэнцию на данной подгруппе H можно продолжить до некоторой конгруэнции на всей группе G. Это означает, что фактор группа подгруппы H группы G естественным образом вкладывается в некоторую фактор группу всей группы G.

Определение 4.1. *Нормальную подгруппу N_H подгруппы H группы G назовем наследуемо нормальной подгруппой, если существует нормальная подгруппа N_G группы G такая, что $H \cap N_G = N_H$.*

Если любая нормальная подгруппа данной подгруппы H группы G является наследуемо нормальной, то подгруппа H называется *наследуемо факторизуемой.* Понятие $H\Phi$-подгруппы было введено Б.Нейманом в 1954 г., где указанные подгруппы были названы *E-подгруппами.* (В литературе встречаются также и другие названия для этого понятия: *CEP-подгруппа* и *Q-подгруппа*).

Центр любой группы является $H\Phi$-подгруппой, любая простая подгруппа данной группы – $H\Phi$-подгруппа, любой ретракт H данной группы G – $H\Phi$-подгруппа. В абсолютно свободной группе F_2 ранга 2 с порождающими a, b подгруппа порожденная элементами $[a, b^{2i-1}ab^{-(2i-1)}]$, $(i = 1, 2, ...)$ является $H\Phi$-подгруппой, изоморфной свободной группе F_∞ бесконечного ранга (Б. Нейман, 1959 г.). Одним из важных результатов об $H\Phi$-подгруппах является результат А.Ю.Ольшанского (1991 г.) о том, что произвольная неэлементарная гиперболическая группа содержит $H\Phi$-подгруппу, изоморфную абсолютно свободной группе F_∞ бесконечного ранга.

Из определений прямого и свободного произведения непосредственно следует, что произвольная группа G_1 является $H\Phi$-подгруппой как прямого произведения $G_1 \times G_2$, так и свободного произведения $G_1 * G_2$ групп G_1 и G_2. Справедлива следующая

Теорема 4.1. *(см. [6, Теорема 1]) Нетривиальная нормальная подгруппа N_{G_i} множителя G_i нетривиального n-периодического произведения $\prod\limits_{i\in I}^{n} G_i$ является наследуемо нормальной подгруппой группы G_i в том и только том случае, если N_{G_i} содержит все n-ые степени элементов G_i.*

Следствие 4.1. *Множитель G_1 n-периодического произведения является наследуемо факторизуемой подгруппой тогда и только тогда, когда любая нетривиальная нормальная подгруппа N_{G_1} группы G_1 содержит подгруппу G_1^n.*

Еще один важный результат об $H\Phi$-подгруппах свободных бернсайдовых групп изложен ниже (см. теорему 6.2).

5. Характеристические свойства периодических произведений

В основополагающей работе [1] доказано, что свободное произведение $F = \prod_{i\in I}^{*} G_i$ содержит некоторую нормальную подгруппу N, фактор группа F/N по которой названа n-периодическим произведением семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$, которая удовлетворяет следующим условиям: **a.** Подгруппа N имеет тривиальное пересечение со всеми компонентами G_i, **b.** Подгруппа N является нормальным замыканием некоторого множества слов вида $C^n \in F$ и, если элемент $X \in M$ не сопряжен в F/N никакому элементу из компонент G_i, то $X^n = 1$ в фактор группе F/N.

На самом деле, приведенные выше свойства n-периодических произведений являются *характеристическими* в том смысле, что верна следующая теорема единственности.

Теорема 5.1. (см. [8, Теорема 1]) *Пусть число $n \geq 665$ нечетно и множители $\{G_i\}_{i\in I}$ не содержат инволюций. Тогда свободное произведение $F = \prod_{i\in I}^{*} G_i$ содержит* **единственную** *нормальную подгруппу M, удовлетворяющую условиям:*

a. *Подгруппа M имеет тривиальное пересечение со всеми компонентами G_i.*

b. *Подгруппа M является нормальным замыканием некоторого множества слов вида $C^n \in F$ и, если элемент $X \in M$ не сопряжен в F/M никакому элементу из компонент G_i, то $X^n = 1$ в фактор группе F/M.*

6. Вложение свободных бернсайдовых групп в периодические произведения

Укажем важное приложение теоремы 5.1, показывающее, что подгруппы n-периодических произведений достаточно "большие".

Напомним, что *свободной бернсайдовой группой* $B(m,n)$ периода n и ранга m называется группа со следующим заданием:

$$B(m,n) = \langle a_1, a_2 ..., a_m \mid x^n = 1\rangle,$$

где x пробегает множество всех слов в групповом алфавите $\{a_1, ..., a_m\}$. Хорошо известно, что для любого нечетного $n \geq 665$ и $m > 1$ группа $B(m,n)$ бесконечна и даже имеет показательный рост.

Теорема 6.1. (см. [8, Теорема 2]) *Всякая нециклическая подгруппа n-периодического произведения групп без инволюций, которая не сопряжена с какой либо подгруппой групп G_i, содержит подгруппу, изоморфную свободной бернсайдовой группе $B(2,n)$ ранга 2.*

Следствие 6.1. *Для любого нечетного $n \geqslant 1003$ каждая нециклическая конечная подгруппа n-периодического произведения произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ без инволюций сопряжена некоторой подгруппе из H_i одного из компонент G_i.*

В связи с теоремой 6.1 отметим, что существует интересное сходство централизаторов циклических подгрупп свободных бернсайдовых групп, n-периодических произведений и свободных групп бесконечно базируемых многообразий С.И.Адяна (см. [9]).

Следующая теорема доказана в работе [12].

Теорема 6.2. *(см. [12, Теорема 3]) Для каждого нечетного $n \geq 1003$ любая нециклическая подгруппа свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ содержит НФ-подгруппу группы $B(m, n)$, изоморфную группе $B(\infty, n)$.*

Из этого, в частности, следует, что любая нециклическая подгруппа H группы $B(m, n)$ SQ-универсальна в многообразии $\mathcal{B}_n$ всех групп периода n, т.е. всякая счетная группа из многообразия $\mathcal{B}_n$ изоморфно вложима в некоторую фактор группу подгруппы H (см. также [13]).

Кроме того, получается, что каждая счетная группа периода n вкладывается в некоторую 2-порожденную группу периода n (см. также [14, Теорема 35.4]).

7. Равномерная неаменабельность периодических произведений

Приведенная выше теорема единственности (теорема 5.1) позволяет также исследовать равномерную неаменабельность периодических произведений. Группа G называется *аменабельной*, если существует конечно-аддитивная мера μ, определенная на множестве всех подмножеств группы G, которая инвариантна относительно левых сдвигов и $\mu(G) = 1$. Как показано Дж. фон Нейманом, класс аменабельных групп замкнут относительно операций взятия подгруппы, фактор группы, индуктивного предела, расширения. Все конечные группы, все конечно порожденные разрешимые группы аменабельны. С другой стороны, любая группа, содержащая свободную подгруппу ранга 2 — неаменабельна.

В работе С. И. Адяна [7] впервые было доказано, что для всех нечетных $n \geq 665$ и $m > 1$ группы $B(m, n)$ неаменабельны и случайные блуждания на них не возвратны (решение известной проблемы Кестена). Это были первые примеры неаменабельных групп, удовлетворяющих нетривиальному тождеству и, тем самым, не содержащие свободных подгрупп.

Аменабельные группы описываются также с помощью, так называемой, константы Фелнера группы. *Константой Фелнера группы G относительно конечного порождающего множества S* называется число

$$Fol_S(G) \rightleftharpoons \inf_A \frac{|\partial_S(A)|}{|A\,|},$$

где инфимум берется по всем конечным непустым подмножествам $A \subset G$ и

$$\partial_S(A) = \{a \in A \mid ax \notin A \text{ для некоторого } x \in S^{\pm 1}\}.$$

Известно, что группа аменабельна тогда и только тогда, когда $Fol_S(G) = 0$ для некоторого (следовательно, для каждого) конечного порождающего множества S.

Группа G называется равномерно неаменабельной группой, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $Fol_S(G) > \varepsilon$ для любого конечного порождающего множества S.

В 2009 г. (см. [10], [11]) было доказано, что для каждого нечетного числа $n \geqslant 1003$ любая конечно порожденная нециклическая подгруппа H свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ – равномерно неаменабельная группа. В частности, для любого $m \geqslant 2$ и нечетного $n \geqslant 1003$ свободная бернсайдова группа $B(m,n)$, не только не аменабельна, но и равномерно неаменабельна.

Естественным обобщением последних результатов является следующее утверждение.

Теорема 7.1. (см. [8, Теорема 3]) *Всякая конечно порожденная подгруппа n-периодического произведения $\prod_{i\in I}^{n} G_i$, которая не сопряжена ни с какой подгруппой групп G_i, является равномерно неаменабельной группой.*

Следствие 7.1. *Если нечетное число $n \geq 1003$ является собственным делителем числа r, то n-периодическое произведение конечного числа циклических групп периода r есть не простая, хопфова, не финитно аппроксимириемая и равномерно неаменабельная группа периода r.*

Следствие 7.2. *Если нечетное число $n \geq 1003$ взаимно просто с числом r, то n-периодическое произведение конечного числа циклических групп периода r есть простая равномерно неаменабельная группа периода nr.*

В частности, 1003-периодическое произведение двух циклических групп порядка 3 равномерно неаменабельная простая группа в которой выполняется тождество $x^{3009} = 1$.

8. О C^*-ПРОСТОТЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Для заданной группы G обозначим через $l_2(G)$ гильбертово пространство всех функций $f : G \to \mathbb{C}$, для которых ряд $\sum\limits_{g \in G} |f(g)|^2$ сходится, а через $\mathcal{B}(l_2(G))$ обозначим C^*-алгебру всех ограниченных линейных операторов на $l_2(G)$.

Пусть $\lambda_G : G \to \mathcal{B}(l_2(G))$ есть левое регулярное представление группы G (т.е. $(\lambda_G(g)(f))(s) = f(g^{-1}s))$ для всех $g, s \in G$. *Приведенной C^*-алгеброй группы G* называется замыкание линейной оболочки множества $\{\lambda_G(g) | g \in G\}$ относительно операторной нормы. Она обозначается $C_{red}(G)$.

Определение 8.1. *Группа G называется C^*-простой группой, если алгебра $C_{red}(G)$ проста, т.е. не содержит собственных нетривиальных двусторонних идеалов.*

Следом C^*-алгебры A называется любой положительный линейный функционал $T : A \to \mathbb{C}$ такой, что $T(1) = 1$ и $T(ab) = T(ba)$ для всех $a, b \in A$. Говорят, что группа G обладает свойством единственного следа, если ее C^*-алгебра $C_{red}(G)$ имеет единственный (т.е. только канонический) след. В 1975 году Поуерс доказал, что свободная группа ранга 2 обладает свойством единственного следа. Вслед за этим разные авторы указали другие интересные классы групп, C^*-алгебры которых имеют единственный след.

Определение 8.2. *Наибольшая аменабельная нормальная подгруппа группы называется ее аменабельным радикалом.*

Как доказал М. Дэй (1957 г.), любая группа обладает аменабельным радикалом. В 2014 г. в работе [16] было доказано, что аменабельный радикал группы G тривиален тогда и только тогда, когда C^*-алгебра $C_{red}(G)$ данной группы G имеет единственный след. Кроме того, в [16]) было доказано, что дискретная группа со счетным количеством аменабельных подгрупп является C^*-простой группой тогда и только тогда, когда ее аменабельный радикал тривиален.

В работе [15] были поставлены следующие вопросы.

Вопрос. (a) Существуют ли не тривиальные C^*-простые группы без нециклических свободных подгрупп?

(b) Являются ли свободные бернсайдовы группы C^*-простыми для достаточно большого нечетного периода и ранга >1?

Ответы на эти вопросы легко вытекают из нижеследующей теоремы.

Теорема 8.1. *(см. [17, Теорема 1]) n-Периодическое произведение не более чем счетного семейства произвольных конечных или счетных групп без инволюций, каждый из которых содержит лишь счетное количество аменабельных подгрупп является C^*-простой группой при любом нечетном $n \geq 1003$.*

Следствие 8.1. *n-Периодическое произведение не более, чем счетного семейства произвольных конечных групп без инволюций является C^*-простой группой при любом нечетном $n \geq 1003$.*

Следствие 8.2. *n-Периодическое произведение счетного семейства произвольных циклических групп без инволюций является C^*-простой группой при любом нечетном $n \geq 1003$.*

Следствие 8.3. *Свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ является C^*-простой группой при любом нечетном $n \geq 1003$.*

Последнее следствие для значительно больших нечетных значений n ранее было доказано в работе А.Ю.Ольшанского и Д. В. Осина [18]. С использованием n-периодических произведений специальных групп в [17] была доказана следующая теорема.

Теорема 8.2. *(см. [17, Теорема 2]) Для каждого нечетного $n \geq 1003$ существует континуум неизоморфных не простых 3-порожденных групп, в которых выполняется тождество $x^n = 1$.*

Относительно вопроса единственности следа в работе [19] получен также следующий результат.

Теорема 8.3. *(см. [19, Теорема 3]) Группы автоморфизмов $Aut(F_m)$ свободных групп F_m, а также группы автоморфизмов $Aut(B(m, n))$ свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ обладают свойством единственного следа для любого ранга $m > 1$ и при любом нечетном $n \geq 1003$.*

С помощью конструкций n-периодических произведений доказывается следующая теорема о вложении групп.

Теорема 8.4. *(см. [19, Теорема 4]) Любая счетная группа изоморфно вкладывается в некоторую 3-порожденную группу со свойством единственного следа.*

9. Об автоморфизмах периодических произведений

Автоморфизм φ группы G называется *нормальным автоморфизмом*, если $\varphi(H) = H$ для любой нормальной подгруппы H группы G. Очевидно, любой внутренний автоморфизм произвольной группы является ее нормальным автоморфизмом. М. В. Нещадим в [20] доказал, что каждый нормальный автоморфизм свободного произведения нетривиальных групп – внутренний. Аналогичные утверждения были доказаны в разные годы для различных интересных классов групп.

Отметим важный результат о том, что для нечетных $n \geq 1003$ все нормальные автоморфизмы нециклических свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ являются внутренними (см. [21] – [23]). Этот результат распространяется на некоторые n-периодические произведения.

Теорема 9.1. *(см. [25, Теорема 1]) Любой нормальный автоморфизм n-периодического произведения циклических групп порядка r, где r делит n, является внутренним.*

Однако, как показывает следующий результат из [24], аналог результата Нещадима не верен для n-периодических произведений в общем случае.

Теорема 9.2. *(см. [24, Теорема 1]) Пусть G произвольная группа без инволюций, обладающая автоморфизмом порядка 2. Тогда если для некоторого нечетного числа $n \geq 665$ группа G совпадает со своей подгруппой G^n, то n-периодическое произведение $G \overset{n}{*} G$ обладает внешним нормальным автоморфизмом.*

Имеет место также следующее утверждение.

Теорема 9.3. *(см. [26, Теорема 1]) Любой расщепляющий автоморфизм n-периодического произведения циклических групп порядка r, где r делит n, является внутренним, если порядок этого автоморфизма есть степень простого числа.*

Напомним, что автоморфизм φ группы G называется *расщепляющим автоморфизмом периода n*, если $\varphi^n = 1$ и $g\, g^{\varphi} g^{\varphi^2} \cdots g^{\varphi^{n-1}} = 1$ для любого элемента $g \in G$. Следует также отметить, что последняя теорема 9.3 обобщает некоторые результаты работ [27] и [28].

Abstract. In this paper we provide an overview of the results relating to the n-periodic products of groups that have been obtained in recent years by the authors of the present paper, as well as some results obtained by other authors in this direction. The periodic products were introduced by S. I. Adian in 1976 to solve the Maltsev's well-known problem. It was shown that the periodic products are exact, associative and hereditary for subgroups. They also possess some other important properties such as the Hopf property, the C^*-simplicity, the uniform non-amenability, the SQ-universality, etc. It was proved that the n-periodic products of groups can uniquely be characterized by means of certain quite specific and simply formulated properties. These properties allow to extend to n-periodic products of various families of groups a number of results previously obtained for free periodic groups $B(m, n)$. In particular, we describe the finite subgroups of n-periodic products, Also, we analyze and extend the simplicity criterion of n-periodic products obtained previously by S. I. Adian.

Список литературы

[1] С. И. Адян, "Периодические произведения групп", Тр. МИАН СССР, **142**, 3 – 21 (1976).

[2] С. И. Адян, "Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева", Матем. заметки, **88:6**, 803 – 810 (2010).

[3] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и Тождества в Группах, Наука, М. (1975).

[4] С. И. Адян, "Новые оценки нечетных периодов бесконечных бернсайдовых групп", Тр. МИАН, **289**, МАИК, М., 41 – 82 (2015).

[5] С. И. Адян, "О простоте периодических произведений групп", Докл. АН СССР, **241:4**, 745 – 748 (1978).

[6] С. И. Адян, В. С. Атабекян, "О хопфовости n-периодических произведений групп", Математические заметки, **95**, но. 4, 483 – 491 (2014).

[7] С. И. Адян, "Случайные блуждания на свободных периодических группах", Изв. АН СССР. Сер. матем., **46**, но. 6, 1139 – 1149 (1982).

[8] С. И. Адян, В. С. Атабекян, "Характеристические свойства и равномерная неаменабельность n-периодических произведений групп", Изв. РАН. Сер. матем., **79**, но. 6, 3 – 18 (2015).

[9] С. И. Адян, В. С. Атабекян, О свободных группах бесконечно базируемых многообразий С.И.Адяна. Изв. РАН. Сер. матем., **81**, но. 5 (2017).

[10] В. С. Атабекян, "Равномерная неаменабельность подгрупп свободных бернсайдовых групп нечетного периода", Матем. заметки, **85**, но. 4, 516 – 523 (2009).

[11] В. С. Атабекян, "О мономорфизмах свободных бернсайдовых групп", Матем. заметки, **86**, но. 4, 483 – 490 (2009).

[12] В. С. Атабекян, О нормальных подгруппах в периодических произведениях С. И. Адяна, Тр. МИАН, **274**, 15 – 31 (2011).

[13] S. V. Ivanov, "On subgroups of free Burnside groups of large odd exponent", Illinois J. Math., **47**, no. 1-2, 299 – 304 (2003).

[14] A. Yu. Olshanskii, The Geometry of Defning Relations in Groups,. Kluwer Academic Publishers (1991).

[15] P. de la Harpe, "On simplicity of reduced C^*-algebras of groups", Bull. Lond. Math. Soc., **39**, no. 1, 1 – 26 (2007).

[16] E. Breuillard, M. Kalantar, M. Kennedy, N. Ozawa, "C^*-simplicity and the unique trace property for discrete groups", ArXiv:1410.2518, 1 – 20 (2014).

[17] С. И. Адян, В. С. Атабекян, "$C*$-простота n-периодических произведений", Матем. заметки, **99**, no. 5, 643 – 648 (2016).

[18] A. Yu. Olshanskii, D. V. Osin, "C*-simple groups without free subgroups", Groups Geom. Dyn., **8**, no. 3, 933 – 983 (2014).

[19] В. С. Атабекян, А. Л. Геворгян, Ш. А. Степанян, "Свойство единственного следа n-периодических произведений групп", Известия НАН Армении, Математика, **52**, no. 5, (2017).

[20] М. В. Нещадим, "Свободное произведение групп не имеет внешних нормальных автоморфизмов", Алгебра и логика, **35**, no. 5, 562 – 566 (1996).

[21] В. С. Атабекян, "Нормальные автоморфизмы свободных берисайдовых групп", Изв. РАН. Сер. матем., **75**, no. 2, 3 – 18 (2011).

[22] V. S. Atabekyan, "Non-ϕ-admissible normal subgroups of free Burnside groups", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **45**, no. 2, 112 – 122 (2010).

[23] E. A. Cherepanov, "Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents", Internat. J. Algebra Comput, **16**, no. 5, 839 – 847 (2006).

[24] V. S. Atabekyan, A. L. Gevorgyan, "On outer normal automorphisms of periodic products of groups", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **46**, no. 6, 289 –292 (2011).

[25] A. L. Gevorgyan, "On automorphisms of periodic products of groups", Proceedings of the YSU, Physics and Mathematics, no. 2, 3 – 9 (2012).

[26] A. L. Gevorgyan, Sh. A. Stepanyan, "On automorphisms of some periodic products of groups", Proceedings of the YSU, Physics and Mathematics, no. 2, 7 – 10 (2015).

[27] V. S. Atabekyan, "Splitting automorphisms of free Burnside groups", Sb. Math., **204**, no. 2, 182 – 189 (2013).

[28] V. S. Atabekyan, "Splitting automorphisms of order p^k of free Burnside groups are inner", Math. Notes, **95**, no. 5, 586 – 589 (2014).

Поступила 15 сентября 2016