Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 2, 2017, стр. 78-84.

НЕЧЕТКАЯ ОЦЕНКА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПО ВЫПУКЛЫМ ОБОЛОЧКАМ α-УРОВНЕЙ

В. Г. БАРДАХЧЯН, Р. А. ГЕВОРКЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *vardanbardakchyan@gmail.com*, *ruben_gevorgyan@yahoo.com*

Аннотация. В статье рассматривается метод построения оценки наименьших квадратов, когда наблюдения являются нечеткими числами. Хотя оценка может быть смещенной, предложенный метод обеспечивает состоятельность оценки.

MSC2010 number: 62J86, 62F86.

Ключевые слова: нечеткая регрессия; метод наименьших квадратов.

1. Постановка задачи

Основные виды регрессий с нечеткими числами или нечеткими наблюдениями описаны у Шапиро [1]. Формально их можно разделить на несколько групп: регрессия предложенная Танака, регрессия Клеминса и основанная на метрике регрессия Даймонда.

Настоящая работа посвящена последней модели. Интуитивная постановка задачи – найти такой вектор нечетких коэффициентов, для которого нечеткие наблюдения зависимой переменной для выбранной метрики будут как можно ближе к нечетким значениям линейной комбинации объясняющих переменных. Точнее нужно найти нечеткие коэффициенты $\tilde{b}$ такие, чтобы расстояние

$$D(\tilde{Y}, \tilde{b}_1\tilde{X}_1 + \tilde{b}_2\tilde{X}_2 + ... + \tilde{b}_k\tilde{X}_k) \tag{1.1}$$

было минимальным. Здесь $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_m)$ - вектор наблюдений объясняемой переменной, а $\tilde{X}_i = (\tilde{x}_{i1}, ..., \tilde{x}_{i,m})$ - вектор соответствующих объясняющих переменных. Элементы каждого из них нечеткие числа. Мы используем следующее определение нечеткого числа (см. [3], стр. 37-39).

Определение 1.1. *n- мерное нечеткое число - это нечеткое множество, с ограниченным носителем из $\mathbb{R}^{n-1}$ каждый α-уровень $A_\alpha = \{a \in R^{n-1},\ \mu_A(a) = \alpha\}$ которого является выпуклым множеством, и функция принадлежности*

$\mu_A(\cdot)$ является полунепрерывной сверху и принимает все значения из интервала $[0, 1]$.

Множество нечетких чисел является подмножеством банахово пространства всех замкнутых выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$(см. [3]). Для того, чтобы задать на нем метрику, используют тот факт, что все α-уровни функции принадлежности нечетких чисел представляют из себя замкнутые выпуклые множества и могут быть однозначно охарактеризованы своими опорными функциями. Часто берут следующую метрику (см. [2])

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left(n \int_0^1 \int_{S^{n-1}} (s_{\tilde{A}}(x, \alpha) - s_{\tilde{B}}(x, \alpha))^2 dx d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

где $s_{\tilde{A}}(\cdot, \alpha)$ опорная функция α-уровня нечеткого числа $\tilde{A}$, а S^k – единичная сфера в $\mathbb{R}^k$. И соответственно,

$$D(\tilde{Z}, \tilde{U}) = \sum_{j=1}^{m} d^2(\tilde{Z}_j, \tilde{U}_j). \tag{1.3}$$

для любых двух векторов из m нечетких чисел.

При классической регрессии требуется найти статистическую оценку соответствующих коэффициентов. В нашем случае оценка является нечеткой случайной величиной. И желательно выявить ее статистические свойства. То есть мы должны найти оценки случайных нечетких величин $\tilde{b}_j$, при том что $\tilde{Y}_i$ случайные, а $\tilde{X}_{i,j}$ детерминированные величины. Стоит отметить, что так как мы имеем дело с случайными величинами, то подразумевается некоторое вероятностное пространство $(\Omega, F, \mathbb{P})$.

Даймонд в [2] доказал существование минимума (1.1), для (1.3). Однако процедура его нахождения в общем случае зависит от класса нечетких наблюдений, то есть от вида их функций принадлежности. Более того, при такой постановке задачи, труднее рассматривать статистические свойства оценки, так как надо предварительно специфицировать ошибки.

В данной статье мы предлагаем оценку, получаемую с помощью метода наименьших квадратов на значениях опорных функций по направлениям и конвексификацию комбинированных оценок (процедура описана далее). Мы также рассматриваем статистические свойства такой оценки.

2. Построение оценки и ее статистические свойства

Вместо того, чтобы минимизировать сумму квадратов разностей опорных функций по всем направлениям и по всем α-уровням, мы предлагаем провести обычную минимизацию по суммам квадратов ошибок по каждому направлению в отдельности, а именно построить оценку наименьших квадратов на каждом α-уровне, для каждого направления $x \in S^{n-1}$, для

$$\tilde{Y}_{x,\alpha} = \tilde{b}_{1,x,\alpha}\tilde{X}_{1,x,\alpha} + \ldots + \tilde{b}_{k,x,\alpha}\tilde{X}_{k,x,\alpha} + \tilde{\epsilon}_{x,\alpha} = \tilde{X}_{x,\alpha}\tilde{B}_{x,\alpha} + \tilde{\epsilon}_{x,\alpha} \tag{2.1}$$

Здесь каждый вектор является столбцом, а через $\tilde{A}_{x,\alpha}$ мы обозначили значение опорной функции по направлению $x \in S^{n-1}$ на α-уровне нечеткого числа $\tilde{A}$. А для нечеткого вектора $\tilde{C} = (\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m)$ под $\tilde{C}_{x,\alpha}$ будем понимать вектор $(\tilde{c}_{1,x,\alpha}, \ldots, \tilde{c}_{m,x,\alpha})$. ϵ_α -вектор гауссовских полей. Таким образом, полученная оценка будет оценкой значений опорных функций коэффициентов, и оценка наименьших квадратов будет иметь вид

$$\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha} = (\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha})^{-1}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{Y}_{x,\alpha} \tag{2.2}$$

Так как мы получаем оценку значений опорных функций (или, если брать по всем направлениям $x \in S^{n-1}$, оценку опорной функции), то для того чтобы мы смогли сделать обратную трансформацию для получения α-уровней коэффициентов, нам необходимо, чтобы оценка опорной функции представляла собой некую опорную функцию. Для этого необходимо и достаточно, чтобы эта функция была непрерывной, однородной первого порядка и выпуклой. Однородность первого порядка обеспечена тем, что мы действуем на единичной сфере, то есть $x \in S^{n-1}$. Но для того, чтобы сделать оценку выпуклой функцией, нам понадобится процедура конвексификации – то есть нахождение наиболее близкой к данной функции непрерывной выпуклой функции.

Предложение 2.1. *Если число наблюдений больше числа объясняющих переменных ($m>k$), то оценка (2.2) непрерывна по всем $n-1$ компонентам x.*

Действительно, оценка (2.2) непрерывна, так как она является некоторой комбинацией опорных функций, которые также непрерывны. А при условии $m > k$ оценка (2.2) существует.

Известно, что ближайшая выпуклая функция непрерывной функции f получается заменой участков вогнутости соответствующей гиперплоскостью. То есть, если на участке U функция вогнута, мы заменяем эту часть гиперплоскостью проходящей через $f(\partial U)$. Это можно сделать исходя из определения вогнутой функции.

Полученную таким образом функцию обозначим через $conv(f(x))$.

Замечание 2.1. *Отметим, что*

1) Такая процедура не меняет степень однородности, так как всякая гиперплоскость является однородной первой степени.

2) Новая оценка не нарушает непрерывности.

3)Функциональный вид данной процедуры зависит от вида начальной функции. Если начальная функция достаточно хороша (дифференцируема), то мы можем найти участки вогнутости и заменить гиперплоскостями.

4) Конвексификацию вектора будем понимать как конвексификацию каждой компоненты.

Верно также следующее утверждение,

Предложение 2.2. *Пусть* $A(x), B(x), A_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, *некоторые непрерывные функции, на* S^{n-1}.

1) $conv(A(x)) \leq A(x)$ *(для каждой x).*

2) $conv(A(x) + B(x)) \geq conv(A(x)) + conv(B(x))$.

3) Если функция $A(x)$ *выпукла, то* $conv(A(x)) = A(x)$.

4) Если $A_n(x) \to A(x)$ *п.в. и* $A(x)$ *выпукла, то* $conv(A_n(x)) \to A(x)$ *п.в.*

Пункты 1)-3) см. в [5], а четвертый можно доказать следующим образом. Множество точек, где $conv(A_n(x)) \not\to A(x)$ состоит из двух подмножеств. Это множество, где $A_n(x)$ не сходится к $A(x)$, и множество, где $A_n(x) \to A(x)$, но $A_n(x)$ там не выпуклые. Но по определению $conv(A_n(x))$ это наиболее близкие к $A_n(x)$ выпуклые функции. В данном случае, так как $A(x)$ выпуклая функция, и $A_n(x) \to A(x)$, то $A(x)$ и есть ближайшая выпуклая функция (на множестве где имеем точечную сходимость).

Замечание 2.2. *Вообще говоря, нельзя утверждать, что* $conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha})$ *не смещена. Если* $\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha}$ *не выпуклая, то оценка смещенная.*

Однако, наша оценка имеет другое очень важное статистическое свойство. Она состоятельна при некоторых условиях.

Теорема 2.1. *Пусть*

1) $\lim_{m\to\infty}(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha}) = \tilde{Q}_{x,\alpha}$, *где* $Q_{x,\alpha}$ *– некоторая* k*-мерная матрица, равномерно ограниченная по всем* x *и* α. *,*

2) $\epsilon_\alpha = (\epsilon_{1,\alpha}, ..., \epsilon_{m,\alpha}) \sim iidGF$ *(то есть ошибки – независимые и одинаково распределенные гауссовские поля), где* $\epsilon_{i,\alpha} = \{\epsilon_{i,x,\alpha}|x \in S^{n-1}\}$.

Тогда оценка

$$conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha}) \tag{2.3}$$

состоятельна по вероятности, почти для всех x.

Замечание 2.3. *Тут конвексификация производится только по* x *для каждого* $\omega \in \Omega$. *Также отметим, что условие 1 это стандартное требование при установке состоятельности регрессионных оценок, см. например* [6] *стр. 161-162.*

Доказательство. Из (2.1) и (2.2) имеем что,

$$\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha} = \tilde{B}_{x,\alpha} + (\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha})^{-1}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha}) &= conv(\tilde{B}_{x,\alpha} + (\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha})^{-1}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}) \geq conv(\tilde{B}_{x,\alpha}) + \\ &+ conv((\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha})^{-1}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}) = \\ &= \tilde{B}_{x,\alpha} + conv((\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha})^{-1}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}) \\ &= \tilde{B}_{x,\alpha} + conv\left(\left(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь предпоследнее равенство вытекает из того, что искомый $\tilde{B}_{x,\alpha}$ представляет собой вектор опорных функций искомых выпуклых множеств (α-уровней искомых нечетких чисел, коэффициентов), следовательно его компоненты также выпуклые функции, и можно использовать 3-ий пункт второго утверждения 2.

Заметим, что компоненты $\epsilon_{x,\alpha}$, представляют собой значения опорных функций гауссовских полей. Обозначим через η_α вектор их выпуклых оболочек (по x, естественно). Результат полученный Давидовым и Паулаускосом ([4]) позволяет утверждать, что $\text{plim}_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}\tilde{\eta}_{x,\alpha} = E_{x,\alpha}$ (сходится по вероятности), где E является замкнутым эллипсом. Отсюда следует что $\text{plim}_{m\to\infty}\frac{1}{m}\tilde{\eta}_{x,\alpha} = 0$ из чего следует, так как $\epsilon_\alpha \subset \eta_\alpha$, и из условия 1) теоремы, что

$$\text{plim}_{m\to\infty}\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha} = 0, \text{для всех } x \in S^{n-1}, \alpha \in [0,1]. \tag{2.6}$$

На самом деле это означает сходимость по мере на $S^{n-1} \times \Omega$ для пар (x, ω). Отсюда имеем, что существует подпоследовательность $\{m_l\}$ такая, что $\lim_{l\to\infty} \frac{1}{m_l} \tilde{X}^T_{x,\alpha} \tilde{\epsilon}_{x,\alpha} = 0$ для п.в. $(x, \omega) \in S^{n-1} \times \Omega$.

Из условий теоремы, вышесказанного и 4-ого пункта 2-го утверждения следует, что для п.в $x \in S^{n-1}$,

$$\lim_{l\to\infty} conv\left(\left(\frac{1}{m_l}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{1}{m_l}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}\right)\right) = 0,$$

и следовательно

$$\text{plim}_{l\to\infty}\, conv\left(\left(\frac{1}{m_l}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{1}{m_l}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}\right)\right) = 0 \tag{2.7}$$

для почти всех $x \in S^{n-1}$.

Из (2.5) и (2.7) вытекает, что

$$\text{plim}_{m\to\infty} conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha}) \geq \tilde{B}_{x,\alpha} \tag{2.8}$$

для почти всех $x \in S^{n-1}$.

С другой стороны, согласно пункту 1) утверждения 2,

$$\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha} \geq conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha}) \tag{2.9}$$

и согласно (2.4),

$$\tilde{B}_{x,\alpha} + \left(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{X}_{x,\alpha}\right)^{-1}\left(\frac{1}{m}\tilde{X}^T_{x,\alpha}\tilde{\epsilon}_{x,\alpha}\right) \geq conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha})$$

Отсюда при $m \to \infty$, и с учетом (2.6) и (2.8) получим, что

$$\tilde{B}_{x,\alpha} \geq \text{plim}\, conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha}) \geq \tilde{B}_{x,\alpha}$$

Следовательно

$$\text{plim}\, conv(\hat{\tilde{B}}_{x,\alpha}) = \tilde{B}_{x,\alpha}$$

для почти всех $x \in S^{n-1}$. Теорема доказана. □

Далее, уже имея оценку (2.3), можно получить саму оценку для коэффициентов ((2.3) оценка для опорных функций) путем реверсии (см. [5], стр. 113-115). То есть если обозначим $\delta_{i,\alpha}(a) = \sup_{x\in S^{n-1}}(x \cdot a - conv(\hat{\tilde{b}}_{i,x,\alpha}))$, то наша оценка α-уровня будет иметь вид

$$\hat{\tilde{b}}_{i,\alpha} = \{a \in R^{n-1} : \delta_{i,\alpha}(a) = 0\},$$

где $x \cdot a$ – скалярное произведение.

Abstract. In the article the method for construction of least square estimator is considered, when observations are fuzzy numbers. The estimator is biased in general, while the proposed method guarantees the consistency of it.

Список литературы

[1] A. Shapiro, Fuzzy Regression Models, 2006, Proceedings of Actuaries Research Conference (ARC), Instituto Tecnologico Autonomo de Mexico (ITAM), Mexico, Society of Actuaries, IL, August 11 - 13 (2005).

[2] Ph. Diamond, "Fuzzy least squares", Information sciences, **46**, no. 3, 141 – 157 (1988).

[3] Ph. Diamond, P. Kloeden, "Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications", World Scientific (1994).

[4] Y. Davidov, V. Paulauscas, "On the asymptotic form of convex hulls of Gaussian random fields", Central European Journal of Mathematics, **12**, no. 5, 711 – 720 (2014).

[5] R. Rockafellar, Convex Analysis", Princeton University Press (1970).

[6] Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий, Эконометрика: Начальный курс, Изд. "Дело", Москва (2004).

Поступила 20 декабря 2016