Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 2, 2017, стр. 65-77.

О РЕГУЛЯРНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ КОНУСАХ

Р. А. ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *khachatryan.rafik@gmail.com*

Аннотация. В статье приведено достаточное условие, при котором пересечение регулярных касательных конусов является касательным конусом. Построены регулярные касательные конусы и шатры для множеств, задаваемых локально липшицевыми функциями. Конусы описываются в терминах K-обобщенных производных.

MSC2010 number: 26E25; 49J52; 46J05.

Ключевые слова: субдифференциал; шатер; касательный конус.

1. Касательные конусы

В работах (см. [3], [5] - [7]) исследуются наиболее известные в литературе различные типы касательных конусов (контингентный, нижний, касательный конус Кларка) как для выпуклых, так и для невыпуклых множеств. Это вызвано тем, что если некоторый из этих типов конусов оказывается выпуклым, то это позволяет изучать невыпуклые экстремальные задачи методами выпуклого анализа [3, 5, 7].

В работе [6] Е. С. Половинкиным определены и изучены другие асимптотические касательные конусы к невыпуклым множествам. В частности, введено понятие регулярного касательного конуса, развивающее понятия шатра Болтянского [1, 2].

В настоящей статье с помощью понятия регулярного касательного конуса введено понятие K- обобщенной производной локально липшицевой функции. В этих терминах построены выпуклые касательные конусы к множествам, задаваемым ограничениями типа равенств и неравенств. Сформулированы необходимые условия экстремума в негладких экстремальных задачах.

В дальнейшем $< a, b >$ – скалярное произведение векторов $a, b \in R^n$. $A \overset{*}{-} B \equiv \{x \in R^n / x + B \subseteq A\}$– геометрическая разность множеств A и B (см. [4]).

В [4] (гл. 3, п. 24, лемма 24.3) доказано, что для всякого замкнутого конуса K множество $K \stackrel{\bullet}{-} K$ является его выпуклым замкнутым подконусом.

Определение 1.1. [6]. *Нижним касательным конусом ко множеству M в точке $x_0 \in M$ называется множество вида*

$$T_M(x_0) := \{\overline{x} \in R^n : \lim_{\lambda \downarrow 0} d(\overline{x}, \lambda^{-1}(M - x_0)) = 0\}.$$

Иными словами, $\overline{x} \in T_M(x_0)$ в том и только в том случае, если для любой последовательности положительных чисел $\{\lambda_k\}$, сходящиеся к нулю, найдется последовательность точек $\{\overline{x_k}\}$, сходящаяся к точке $\overline{x}$, и такая, что справедливо включение $x_0 + \lambda_k \overline{x_k} \in M$ для любого $k \in N$.

Определение 1.2 (6). *Пусть $f : R^n \to R-$ локально липшицевая функция и $M \equiv epi(f) = \{(\alpha, x) \in R^{n+1} / \alpha \geq f(x)\}$. Пусть $K \subseteq T_M(x_0, f(x_0))-$ выпуклый замкнутый конус, а $f'_K(x_0, \overline{x})-$ положительно однородная выпуклая функция, надграфиком которой является конус K. Функция $f'_K(x_0, \overline{x})$ называется обобщенной K- производной функции f в точке x_0 по направлениям, а K- субдифференциалом функции f в точке x_0 называется множество*

$$\partial_K f(x_0) \equiv \{x^* \in R^n : f'_K(x_0, \overline{x}) \geq < x^*, \overline{x} > \quad \forall \overline{x} \in R^n\}.$$

Если $K = T_M(x_0, f(x_0)) \stackrel{\bullet}{-} T_M(x_0, f(x_0))$, то обозначим $f'_K(x_0, \overline{x}) = f'_{AL}(x_0, \overline{x})$. Тогда $\partial_K f(x_0)$ называется нижним асимптотическим субдифференцилом функции f в точке x_0 и обозначается через $\partial_{AL} f(x_0)$ (см. [6]).

Определение 1.3. [8]. *Обобщенная производная Мишеля- Пено функции f по направлению $\overline{x}$, обозначаемая $f'_{MP}(x_0, \overline{x})$, определяется так:*

$$f'_{MP}(x_0, \overline{x}) = \sup_{w \in R^n} \{\limsup_{\lambda \downarrow 0}\} \frac{f(x_0 + \lambda(\overline{x} + w)) - f(x_0 + \lambda w)}{\lambda}\}.$$

Определение 1.4. [8]. *Субдифференциалом Мишеля-Пено для локально липшицевой функции f в точке x_0 называется множество*

$$\partial_{MP} f(x_0) = \{x^* \in R^n / f'_{MP}(x_0, \overline{x}) \geq < x^*, \overline{x} > \forall \overline{x} \in R^n\}.$$

Определение 1.5. [7]. *Пусть $f(x)-$ произвольная функция. Положим*

$$F(x_0, \overline{x}) = \lim_{\overline{y} \to \overline{x},\, \lambda \downarrow 0} sup \frac{f(x_0 + \lambda \overline{y}) - f(x_0)}{\lambda}.$$

Положительно однородная выпуклая, замкнутая по $\overline{x}$ функция $h(x_0, \overline{x})$ называется верхней выпуклой аппроксимацией функции f в точке x_0, если

$$h(x_0, \overline{x}) \geq F(x_0, \overline{x}),\ \overline{x} \in R^n.$$

Отметим, что обобщенная производная $f'_C(x_0, \overline{x})$ Ф. Кларка (см. [3], гл. 1, п.2.1) и производная $f'_{MP}(x_0, \overline{x})$ Мипеля- Пено являются верхними выпуклыми аппроксимациями локально липшицевой функции f в точке x_0.

Определение 1.6. [7]. *Выпуклый конус $K_M(x_0)$ называется конусом касательных направлений множества M в точке x_0, если из включения $\overline{x} \in K_M(x_0)$ следует, что существует такая функция $\varphi(\lambda)$, что*

$$x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi(\lambda) \in M$$

при достаточно малых $\lambda \geq 0$ и $\lambda^{-1}\varphi(\lambda) \to 0$, когда $\lambda \downarrow 0$.

Определение 1.7. [6]. *Выпуклый замкнутый конус $K \subseteq T_M(x_0)$ называется регулярным касательным конусом ко множеству M в точке x_0, если существуют числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и отображение $\varphi(\cdot,\cdot) : (0, \delta_1] \times (K \cap B_{\delta_2}(0)) \to R^n$ такие, что*

$$x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi(\lambda, \overline{x}) \in M\ \forall\lambda \in (0, \delta_1],\ \overline{x} \in K \bigcap B_{\delta_2}(0),$$

а для функции

$$\bar{\varphi}(\lambda) = \sup\{\lambda^{-1}\|\varphi(\lambda, \overline{x})\| : \overline{x} \in K \bigcap B_{\delta_2}(0)\}$$

справедливо равенство $\lim_{\lambda\downarrow 0} \bar{\varphi}(\lambda) = 0$. Кроме этого, если при любом $\lambda \in (0, \delta_1]$ отображение $\varphi(\lambda, \cdot)$ непрерывно на $K \cap B_{\delta_2}(0)$, то K называется непрерывным регулярным конусом.

Определение 1.8. [1]. *Выпуклый конус $K \subseteq T_M(x_0)$ называется шатром множества M в точке $x_0 \in M$, если существует отображение r, определенное в некоторой окрестности $B_\delta(0)$ нуля, такое, что*

$$x_0 + \overline{x} + r(\overline{x}) \in M,\ \textit{если}\ \overline{x} \in K \bigcap B_\delta(0)\ \textit{и}\ \frac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} \to 0\ \textit{при}\ \overline{x} \to 0.$$

Очевидно, что если $K-$ шатер, то он и регулярный касательный конус.

Предложение 1.1. *Пусть $f(x)$ – липшицевая функция в окрестности $B_\delta(x_0)$ точки x_0. Тогда существует такая непрерывная функция $r(\overline{x}) \geq 0$, определенная в окрестности $B_\delta(0)$ нуля такая, что*

$$f(x_0 + \overline{x}) \leq f(x_0) + f'_{AL}(x_0, \overline{x}) + r(\overline{x}) \ \ \forall \overline{x} \in B_\delta(0), \tag{1.1}$$

причем $\lim_{\overline{x} \to 0} \frac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} = 0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $f'_{AL}(x_0, \overline{x})$ является верхней выпуклой аппроксимацией функции $f(x)$ в точке x_0, поскольку тогда неравенство (1.1) непосредственно следует из леммы 3.5 [7](гл. 5, п.3). В [6] показано следующее представление:

$$f'_{AL}(x_0, \overline{x}) = \sup_{w \in R^n} \{f'_L(x_0, \overline{x} + w) - f'_L(x_0, w)\},$$

где

$$f'_L(x_0, u) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)}{\lambda}.$$

Отсюда получим

$$\limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda \overline{x}) - f(x_0)}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\overline{y} \to \overline{x},\ \lambda \downarrow 0} sup \frac{f(x_0 + \lambda \overline{y}) - f(x_0)}{\lambda} = F(x_0, \overline{x}) \leq f'_{AL}(x_0, \overline{x}) = h(x_0, \overline{x}).$$

Предложение 1.2. [6] *(см. теорема 25.2, гл. 3, п. 25). Пусть $f(x)$ липшицева функция в некоторой окрестности $B_\delta(0)$ точки x_0, а $f'_K(x_0, \overline{x})$ – некоторая ее обобщенная K- производная в точке x_0.*
Тогда

(1) *существует функция $r(\cdot, \cdot) : (0, \delta] \times B_1(0) \to R_+$ такая, что*

$$f(x_0 + \lambda \overline{x}) \leq f(x_0) + \lambda f'_K(x_0, \overline{x}) + r(\lambda, \overline{x}) \ \ \forall \overline{x} \in B_1(0), \ \lambda \in (0, \delta]. \tag{1.2}$$

(2) *При фиксированном $\lambda \in (0, \delta]$ функция $r(\lambda, \cdot)$ непрерывна на $B_1(0)$.*

(3) *Для функции $\tilde{r}(\lambda) = \sup\{\lambda^{-1} r(\lambda, \overline{x}) : \overline{x} \in B_1(0)\}$ справедливо равенство* $\lim_{\lambda \downarrow 0} \tilde{r}(\lambda) = 0$.

Теорема 1.1. *Пусть x_0 – точка минимума локально липшицевой функции $f(x)$ на множестве M. Пусть $\partial_K f(x_0)$ – K- субдифференциал функции f, а $K_M(x_0)$ –*

выпуклый конус касательных направлений для M *в точке* x_0. *Тогда*

$$\partial_K f(x_0) \bigcap K_M^*(x_0) \neq \emptyset,$$

где $K_M^*(x_0) = \{x^* \in R^n :< x^*, \overline{x} >\geq 0 \; \forall \overline{x} \in K_M(x_0)\}$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда согласно теореме отделимости выпуклых множеств существует вектор $e \neq 0$, $\|e\| < 1$ такой, что

$$f'_K(x_0, e) < 0, \;\; e \in K_M(x_0).$$

Тогда существует функция $\varphi(\lambda, e) = o(\lambda)$ такая, что

$$x_0 + \lambda e + \varphi(\lambda, e) \in M \text{ при малых } \lambda > 0.$$

Так как существует число $C > 0$ такое, что

$$\|f'_K(x_0, \overline{x})\| \leq C\|\overline{x}\| \;\; \forall \overline{x} \in R^n,$$

то в силу неравенства (1.2), для достаточно малых $\lambda > 0$ имеем

$$f(x_0 + \lambda e + \varphi(\lambda, e)) \leq f(x_0) + \lambda[f'_K(x_0, e + \frac{\varphi(\lambda, e)}{\lambda}) + \frac{r(\lambda, e + \frac{\varphi(\lambda, e)}{\lambda})}{\lambda}] \leq$$

$$\leq f(x_0) + \lambda[f'_K(x_0, e) + \frac{C\|\varphi(\lambda, e)\|}{\lambda} + \sup_{u \in B_1(0)} \frac{r(\lambda, u)}{\lambda}] < f(x_0).$$

Это противоречие, поскольку x_0– точка минимума функции f на M. □

В дальнейшем нам понадобиться следующий результат.

Предложение 1.3. [10]. *Пусть* $a : R^n \to 2^{R^m}$ *многозначное отображение, графиком которого является такой выпуклый замкнутый конус, что* $dom(a) = R^n$. *Тогда существует положительно однородное и липшицевое отображение* $P : R^n \to R^m$ *такое, что* $P(x) \in a(x) \;\; \forall x \in R^n$.

2. Пересечение регулярных касательных конусов

Теорема 2.1. *(о пересечении регулярных касательных конусов). Пусть выпуклые замкнутые конусы* K_1 *и* K_2 *являются непрерывными регулярными конусами касательных направлений соответственно для множеств* $M_1 \subseteq R^n$ *и* $M_2 \subseteq R^n$ *в точке* $x_0 \in M_1 \cap M_2$. *Предположим также, что* $K_1 - K_2 = R^n$. *Тогда конус* $Q \equiv K_1 \cap K_2$ *является регулярным касательным конусом к множеству* $M \equiv M_1 \cap M_2$ *в точке* x_0.

Доказательство. Сначала покажем, что существуют положительно однородные и липшицевые отображения $P_1 : R^n \to K_1$, $P_2 : R^n \to K_2$ такие, что для любого $x \in R^n$ имеет место равенство

$$x = P_1(x) - P_2(x) \tag{2.1}$$

Положим

$$a(x) := \{y \in K_1 : (y - x) \in K_2\}.$$

Поскольку $R^n = K_1 - K_2$, то график многозначного отображения a является выпуклый замкнутый конус и $dom(a) = R^n$. Поэтому, согласно предложению 1.3 существует положительно однородное и липшицевое отображение $P_1 : R^n \longrightarrow K_1$ такое, что

$$P_1(x) \in a(x), \ \|P_1(x)\| \le C_1\|x\|, \quad x \in R^n,$$

где C_1- некоторое число. Положим $P_2(x) = P_1(x) - x$ и заметим, что

$$P_2(x) \in K_2, \ \|P_2(x)\| \le (C_1 + 1)\|x\| \le C_2\|\overline{x}\| \ \forall x \in R^n,$$

где $C_2 = C_1 + 1$. Поскольку K_1 и K_2 являются непрерывными регулярными конусами, то существуют такие отображения

$$\Psi_i(\lambda, \overline{x}) = x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi_i(\lambda, \overline{x}), \quad i = 1, 2, \tag{2.2}$$

что $\Psi_i(\lambda, \overline{x}) \in M_i \ \forall \overline{x} \in Q \cap B_1(0)$, $\lambda \in (0, 1]$, где φ_i $(i = 1, 2)$ удовлетворяют условиям определения непрерывного регулярного конуса 1.5. Не нарушая общности, предположим также, что для обоих конусов (см. определении 1.7) $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Теперь при фиксированном $\overline{x} \in Q$ рассмотрим систему уравнений, записав ее в векторной форме:

$$g(\overline{x}, \lambda, y) = \Psi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y}{\lambda})) - \Psi_2(\lambda, \overline{x} + P_2(\frac{y}{\lambda})) = 0. \tag{2.3}$$

Используя (2.2), уравнение (2.3) можно переписать в виде:

$$g(\overline{x}, \lambda, y) = y + \varphi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y}{\lambda})) - \varphi_2(\lambda, \overline{x} + P_2(\frac{y}{\lambda})) = 0.$$

Фиксируем $\overline{x} \in Q$ и рассмотрим на шаре $\|y\| \le \lambda/(2C_2)$ отображение

$$\Phi(\overline{x}, \lambda, y) \equiv \varphi_2(\lambda, \overline{x} + P_2(\frac{y}{\lambda})) - \varphi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y}{\lambda})).$$

При любых фиксированных λ и $\overline{x}$ отображение $\Phi(\overline{x}, \lambda, \cdot)$ является непрерывным оператором, поскольку таковым являются отображения $\varphi_1(\lambda, \cdot),\ \varphi_2(\lambda, \cdot),\ P_1,\ P_2$.

Покажем, что при достаточно малых λ отображение $\Phi(\overline{x}, \lambda, \cdot)$ имеет неподвижную точку на некотором шаре с центром в точке ноль. Пусть теперь $\|\overline{x}\| \le 1/2$ и $\|y\| \le \lambda/(2C_2)$. Тогда

$$\|\overline{x} + P_i\left(\frac{y}{\lambda}\right)\| \le 1, \quad i = 1, 2.$$

Поэтому имеем

$$\frac{\|\varphi_2(\lambda, \overline{x} + P_2(\frac{y}{\lambda})) - \varphi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y}{\lambda}))\|}{\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2}} \le$$

$$\le \frac{\|\varphi_2(\lambda, \overline{x} + P_2(\frac{y}{\lambda}))\|}{\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2}} + \frac{\|\varphi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y}{\lambda}))\|}{\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2}} \le$$

$$\le \sup_{u \in Q \cap B_1(0)} \frac{\|\varphi_1(\lambda, u)\|}{\lambda} + \sup_{u \in Q \cap B_1(0)} \frac{\|\varphi_2(\lambda, u)\|}{\lambda} = \tilde{\varphi_1}(\lambda) + \tilde{\varphi_2}(\lambda) \equiv \tilde{q}(\lambda).$$

Из определения 1.5, следует, что $\tilde{q}(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$. Таким образом, доказано, что

$$\|\Phi(\overline{x}, \lambda, y)\| \le \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2}.$$

Положим

$$\tau(\lambda) = inf\{\tau > 0 : \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \tau^2} \le \tau\}.$$

Так как при достаточно малых $\lambda > 0$ имеет место неравенство

$$\tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2} = \sqrt{2}\lambda\tilde{q}(\lambda) \le \lambda \quad \text{то} \quad \tau(\lambda) \le \lambda.$$

По определению точной нижней грани для каждого λ существует $\tau^*(\lambda)$ такое, что

$$\tau(\lambda) \le \tau^*(\lambda) \le \tau(\lambda) + \lambda^2,\ \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + (\tau^*(\lambda))^2} \le \tau^*(\lambda). \tag{2.4}$$

Покажем, что $\frac{\tau^*(\lambda)}{\lambda} \to 0$ при $\lambda \to 0$.

Так как $\tau(\lambda) \le \lambda$ и $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \le \alpha + \beta,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$, то из определения $\tau(\lambda)$ получаем

$$\tau(\lambda) - \lambda^2 \le \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + (\tau(\lambda) - \lambda^2)^2} \le \tilde{q}(\lambda)(\lambda + \mid \tau(\lambda) - \lambda^2 \mid) \le 3\lambda\tilde{q}(\lambda).$$

Поэтому $\frac{\tau(\lambda)}{\lambda} \to 0$ при $\lambda \to 0$.

Но тогда из (2.4) следует, что $\frac{\tau^*(\lambda)}{\lambda} \to 0$ при $\lambda \to 0$. Теперь, если $\|y\| \leq \tau^*(\lambda) \leq \lambda/(2C_2)$, то согласно неравенству (2.4) имеем

$$\|\Phi(\overline{x}, \lambda, y)\| \leq \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2} \leq \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + (\tau^*(\lambda))^2} \leq \tau^*(\lambda).$$

Таким образом, непрерывное отображение $\Phi(\overline{x}, \lambda, \cdot)$ отображает шар $\|y\| \leq \tau^*(\lambda)$ в себя. Значит, по теореме Брауера отображение $\Phi(\overline{x}, \lambda, \cdot)$ имеет неподвижную точку в этом шаре, т.е. существует отображение $y(\lambda, \overline{x})$ такое, что

$$\Phi(\overline{x}, \lambda, y(\lambda, \overline{x})) = y(\lambda, \overline{x}), \;\; \|y(\lambda, \overline{x})\| \leq \tau^*(\lambda).$$

Следовательно,

$$\sup_{u \in Q \cap B_{1/2}(0)} \frac{\|y(\lambda, u)\|}{\lambda} \to 0 \text{ при } \lambda \to 0.$$

Таким образом, $\Phi(\overline{x}, \lambda, y(\lambda, \overline{x})) = y(\lambda, \overline{x})$. Окончательно из (2.3) получим, что для $\overline{x} \in Q$, $\|\overline{x}\| \leq 1/2$ и для достаточно малых $\lambda > 0$ имеет место равенство

$$x_0 + \lambda\overline{x} + P_1(y(\lambda, \overline{x})) + \varphi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y(\lambda, \overline{x})}{\lambda})) =$$

$$= x_0 + \lambda\overline{x} + P_2(y(\lambda, \overline{x})) + \varphi_2(\lambda, \overline{x} + P_2(\frac{y(\lambda, \overline{x})}{\lambda})).$$

Поскольку K_1, K_2- выпуклые конусы, то для малых $\lambda > 0$,

$$(\overline{x} + P_1\left(\frac{y(\lambda, \overline{x})}{\lambda}\right)) \in K_1 \bigcap B_1(0), \; (\overline{x} + P_2(\frac{y(\lambda, \overline{x})}{\lambda})) \in K_2 \bigcap B_1(0).$$

Поэтому, для малых $\lambda > 0$ имеем

$$x_0 + \lambda\overline{x} + P_1(y(\lambda, \overline{x})) + \varphi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y(\lambda, \overline{x})}{\lambda})) =$$

$$= x_0 + \lambda\overline{x} + P_2(y(\lambda, \overline{x})) + \varphi_2(\lambda, \overline{x} + P_2(\frac{y(\lambda, \overline{x})}{\lambda})) \in M_1 \bigcap M_2.$$

Положим

$$\varphi(\lambda, \overline{x}) = P_1(y(\lambda, \overline{x})) + \varphi_1(\lambda, \overline{x} + P_1(\frac{y(\lambda, \overline{x})}{\lambda})).$$

Очевидно, что

$$\sup_{u \in Q \cap B_{1/2}(0)} \frac{\|\varphi(\lambda, u)\|}{\lambda} \to 0 \text{ при } \lambda \to 0,$$

и если $\overline{x} \in Q \bigcap B_{1/2}(0)$, то для достаточно малых $\lambda > 0$ справедливо включение

$$x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi(\lambda, \overline{x}) \in M. \qquad \square$$

Замечание 2.1. *Функция $\varphi(\lambda, \cdot)$ может не быть непрерывной, и поэтому Q, вообще говоря, не есть непрерывный регулярный касательный конус к M в точке x_0.*

Замечание 2.2. *В [9] построен пример двух замкнутых множеств $M_1 \subseteq R^4$ и $M_2 \subseteq R^4$ и касательных конусов K_1, K_2, таких, что*
1. конус K_1 является шатром к M_1 в точке $0 \in M_1$;
2. K_2 является конусом Кларка для M_2 в точке $0 \in M_2$;
3. $K_1 \bigcap K_2 \neq \{0\}\}$, $K_1 - K_2 = R^4$.
Но $M_1 \bigcap M_2 = \{0\}$.

Это означает, что пересечение двух нижних касательных конусов к двум разным множествам в одной общей точке этих множеств может и не быть нижним касательным конусом пересечения множеств в этой точке.

Теперь построим регулярные конусы касательных направлений и шатры ко множеству вида $M = \{x \in R^n : g(x) \leq 0\}$.

Теорема 2.2. *Пусть $g(x)$– локально липшицева функция и для точки x_0 выполнены следующие условия: $g(x_0) = 0$ и $0 \notin \partial_K g(x_0)$. Положим*

$$P_M(x_0) = \{\overline{x} \in R^n : g'_K(x_0, \overline{x}) \leq 0\}.$$

Тогда выпуклый конус $P_M(x_0)$ является регулярным конусом касательных направлений ко множеству M в точке x_0.

Доказательство. Поскольку $0 \notin \partial_K g(x_0)$, то существует вектор w такой, что $g'_K(x_0, w) < 0$. Не нарушая общности, предположим, что $g'_K(x_0, w) = -1$. Пусть $\gamma > 0$. В силу неравенства 1.2, если $\overline{x} \in P_\Omega(x_0)$, $\|\overline{x}\| \leq 1/2$, $\gamma \leq \|w\|\lambda/2$, то для достаточно малых $\lambda > 0$ имеем

$$g(x_0 + \lambda(\overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w)) \leq g(x_0) + \lambda g'_K(x_0, \overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w) + r(\lambda, \overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w) \leq$$

$$\leq -\gamma + r(\lambda, \overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w).$$

Для фиксированных $\overline{x}$ и λ функцию $f(\overline{x}, \lambda, \gamma) = r(\lambda, \overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w)$ непрерывна по γ. Покажем, что она имеет неподвижную точку на некотором отрезке $[0, \nu(\lambda)]$, где

$\nu(\lambda) = o(\lambda)$ при $\lambda \to 0$. Имеем $\|\overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w\| \le 1$. Поэтому

$$\frac{r(\lambda, \overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w)}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}} \le \frac{r(\lambda, \overline{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w)}{\lambda} \le \sup_{u \in B_1(0)} \frac{r(\lambda, u)}{\lambda} \equiv \tilde{r}(\lambda) \to 0.$$

Отсюда

$$0 \le f(\overline{x}, \lambda, \gamma) \le \tilde{r}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}.$$

Теперь, проводя доказательство аналогично теореме 2.1, получаем, что существует функция $\gamma(\lambda, \overline{x})$ такая, что $f(\overline{x}, \lambda, \gamma(\lambda, \overline{x})) = \gamma(\lambda, \overline{x})$, причем

$$\sup_{u \in P_\Omega(x_0) \cap B_{1/2}(0)} \frac{\|\gamma(\lambda, u)\|}{\lambda} = o(\lambda).$$

Значит, $g(x_0 + \lambda\overline{x} + \gamma(\lambda, \overline{x})w) \le 0$. Положим $\varphi(\lambda, \overline{x}) = \gamma(\lambda, \overline{x})w$. Ясно, что

$$\sup_{u \in P_\Omega(x_0) \cap B_{1/2}(0)} \frac{\|\varphi(\lambda, u)\|}{\lambda} = o(\lambda).$$

Теорема 2.2 доказана.

Следствие 2.1. *Пусть существуют векторы e_1 и e_2 такие, что*

(2.5).
$$g'_K(x_0, e_1) < 0, \ (-g)'_K(x_0, e_2) < 0$$

Тогда выпуклый конус $K_\Omega(x_0) = \{\overline{x} \in R^n : g'_K(x_0, \overline{x}) \le 0, \ (-g)'_K(x_0, \overline{x}) \le 0\}$ является регулярным конусом касательных направлений для множества $\Omega = \{x \in R^n : g(x) = 0\}$ в точке x_0.

Доказательство. По теореме 2.2 существуют число $\delta > 0$ и отображения $\varphi_1(\lambda, \overline{x})$, $\varphi_2(\lambda, \overline{x})$, удовлетворяющие условиям определения 1.5 и такие, что для $\overline{x} \in K_\Omega(x_0) \bigcap B_\delta(0)$ и малых $\lambda > 0$ имеют место следующие неравенства:

$$g(x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi_1(\lambda, \overline{x})) \le 0, \ g(x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi_2(\lambda, \overline{x})) \ge 0.$$

Отсюда найдется такое число $\theta(\lambda) \in [0, 1]$, что

$$g(x_0 + \lambda\overline{x} + \theta(\lambda)\varphi_1(\lambda, \overline{x}) + (1 - \theta(\lambda))\varphi_2(\lambda, \overline{x})) = 0.$$

Положив $\varphi(\lambda, \overline{x}) = \theta(\lambda)\varphi_1(\lambda, \overline{x}) + (1-\theta(\lambda))\varphi_2(\lambda, \overline{x})$, получим $g(x_0 + \lambda\overline{x} + \varphi(\lambda, \overline{x})) = 0$, а также

$$\sup_{u \in K_\Omega(x_0) \cap B_\delta(0)} \frac{\|\varphi(\lambda, u)\|}{\lambda} \equiv \tilde{\varphi}(\lambda) \to 0 \text{ при } \lambda \to 0. \qquad \square$$

Замечание 2.3. *Если* $g'_K(x_0, \overline{x}) = g'_{MP}(x_0, \overline{x})$, *то известно* [8], *что*

$$g'_{MP}(x_0, -\overline{x}) = (-g)'_{MP}(x_0, \overline{x}).$$

Тогда в (2.5) можно выбрать $e_2 = -e_1$. В этом случае подпространство

$$K_\Omega(x_0) = \{\overline{x} \in R^n : g'_{MP}(x_0, \overline{x}) \le 0,\ g'_{MP}(x_0, -\overline{x}) \le 0\}$$

является регулярным касательным конусом к Ω в точке x_0. Аналогично, используя неравенство (1.1), можно доказать следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть $g-$ локально липшицева функция и для точки x_0 выполнены условия $g(x_0) = 0$, $0 \notin \partial_{AL} g(x_0)$. Тогда выпуклый конус*

$$P_M(x_0) = \{\overline{x} \in R^n : g'_{AL}(x_0, \overline{x}) \le 0\}$$

является шатром к множеству $M = \{x \in R^n : g(x) \le 0\}$ в точке x_0.

3. Необходимое условие минимума в терминах K-субдифференциалов

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$f_0(x) \to min,\ x \in \bigcap_{i=1}^{k} M_i, \tag{3.1}$$

где $M_i = \{x \in R^n : f_i(x) \le 0\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, а f_i $(i = 1, \ldots, k)$ - локально липшицевы функции.

Теорема 3.1. *Пусть x_0- решение задачи (3.1). Тогда существуют числа $\lambda_0 \ge 0, \lambda_i \ge 0$, $i \in I(x_0) \equiv \{i \in [1;k] : f_i(x_0) = 0\}$ не равные одновременно нулю, такие, что*

$$0 \in \lambda_0 \partial_K f_0(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i \partial_K f_i(x_0),$$

где ∂_K- знак K- субдифференциала.

Доказательство. Предположим противное:

$$0 \notin \lambda_0 \partial_K f_0(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i \partial_K f_i(x_0).$$

Это означает, что существует такой вектор e, что для любых λ_0, λ_i чисел, из которых не все равны нулю, выполняется неравенство

$$\lambda_0 f'_{0K}(x_0, e) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i f'_{iK}(x_0, e) < 0.$$

Отсюда следует, что $f'_{0K}(x_0, e) < 0$, $f'_{iK}(x_0, e) < 0$, $i \in I(x_0)$. Согласно предложению 1.2, существуют функции $r_i(\lambda, \overline{x})$ такие, что

$$f_i(x_0 + \lambda\overline{x}) \leq f_i(x_0) + \lambda f'_{iK}(x_0, \overline{x}) + r_i(\lambda, \overline{x}),$$

причем $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} r_i(\lambda, \overline{x}) = 0$, $\forall \overline{x} \in B_1(0)$. Следовательно для достаточно малых $\lambda > 0$ $f_0(x_0 + \lambda e) < f_0(x_0)$, $f_i(x_0 + \lambda e) < f_i(x_0) = 0$, $i \in I(x_0)$. Таким образом при малых $\lambda > 0$ точка $x_0 + \lambda e$ удовлетворяет всем ограничениям, так как в силу непрерывности $f_i(x)$ для достаточно малых $\lambda > 0$ $f_i(x_0 + \lambda e) < 0$, $i \notin I(x_0)$, а также $f_0(x_0 + \lambda e) < f_0(x_0)$. Это противоречит тому, что x_0- решение задачи. □

Теорема 3.2. *Пусть x_0- точка минимума локально липшицевой функции f на множестве $\Omega = \{x \in R^n : g(x) = 0\}$. Пусть выполнены предположения следствия 2.1. Тогда*

$$0 \in \partial_K f(x_0) + cl\{con\partial_K g(x_0) + con\partial_K(-g)(x_0)\}. \tag{3.1}$$

Здесь $cl\{M\}-$ замыкание множества $M \subseteq R^n$.

Доказательство. Согласно следствию 2.1 $K_\Omega(x_0)$ является конусом касательных направлений к множеству M в точке x_0. Поэтому, в силу теоремы 1.1 имеем

$$\partial_K f(x_0) \bigcap K^*_\Omega(x_0) \neq \emptyset. \tag{3.2}$$

Поскольку $K^*_\Omega = cl\{con\partial_K g(x_0) + con\partial_K(-g)(x_0)\}$, то из (3.2) немедленно следует включение (3.1). □

Следствие 3.1. *Если $\partial_K g(x_0) \equiv \partial_{MP} g(x_0)$ и $\partial_K f(x_0) \equiv \partial_{AL} f(x_0)$, то $K^*_\Omega(x_0) = cl\{con\partial_{MP} g(x_0) - con\partial_{MP} g(x_0)\} \equiv Lin\partial_{MP} g(x_0)$, а необходимое условие (3.1) принимает следующий вид $0 \in \partial_{AL} f(x_0) + Lin\partial_{MP} g(x_0)$.*

Abstract. The paper contains a sufficient condition for an intersection of regular tangent cones to be a tangent cone. Regular tangent cones and tents for sets given

by locally Lipschitz functions are constructed. The cones are described in terms of generalized K-derivatives.

Список литературы

[1] В. Г. Болтянский, Оптимальное Управление Дискретными Системами, М. Наука (1973).

[2] В. Г. Болтянский, "Метод шатров в теории экстремальных задач", Успехи мат. наук, **30**, но. 3, 3 – 55 (1975).

[3] Ф. Кларк, Оптимизация и негладкий анализ, Мир, М. (1988).

[4] Е. С. Половинкин, Элементы Теории Многозначных Отображений, М. Изд-во МФТИ (1982).

[5] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, Элементы Выпуклого и Сильно Выпуклого Анализа, Физматлит, М. (2004).

[6] Е. С. Половинкин, Многозначный Анализ и Дифференциальные Включения, М., Физматлит (2014).

[7] Б. Н. Пшеничный, Выпуклий Анализ и Экстремальные Задачи, М., Наука (1980).

[8] P. Michel, J.- P. Penot, "Calcul sous-differentiel pour les functions lipschitziennes et non lipschitziennes", C. R. Acad. Sc. Paris. Ser.I, **291**, 269 – 272 (1984).

[9] A. Bressan, "On the intersection of a Clarke cone with a Boltianskii cone", SIAM J. Cotrol Optim., **45**, no. 6, 2054 – 2064 (2007).

[10] R. A. Khachatryan, "On set-valued mappings with starlike graphs", Journal of Contenporary Matematical Analysis, **47**, no. 1, 28 – 44 (2012).

Поступила 29 января 2016