Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 2, 2017, стр. 26-38.

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЯДОВ ФРАНКЛИНА

К. А. КЕРЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mail: *karenkeryan@ysu.am*

Аннотация. В работе доказывается теорема о восстановлении коэффициентов ряда Франклина по ее сумме при некотором условии на мажоранту 2^ν-частичных сумм ряда Франклина.

MSC2010 number: 42C10; 42C25.

Ключевые слова: Система Франклина; единственность; A-интеграл.

1. Введение

Из теории тригонометрических рядов хорошо известно, что из почти всюду сходимости тригонометрического ряда к нулю не следует, что все коэффициенты этого ряда равны нулю (см. [12]). Такая же ситуация имеет место для других классических систем, например для рядов по системам Хаара, Уолша, Франклина.

В работах [1], [3] впервые были рассмотрены вопросы единственности для почти всюду сходящихся или суммирующихся тригонометрических рядов. Понятно, что при этом были наложены дополнительные условия на ряд.

В работах [6], [7] получены теоремы восстановления коэффициентов рядов по системе Франклина по сумме ряда при условии что мажоранта частичных сумм $S^*(x)$ удовлетворяет условию

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda|\{x\in[0,1]; S^*(x)>\lambda\}| = 0.$$

Г. Г. Геворкяном [5], в частности, была получена аналогичная теорема для системы Хаара, а в [9] была доказана теорема восстановления для рядов по системе Хаара с мажорантой удовлетворяющей более слабому условию.

Основной целью этой работы является получение теоремы для рядов по системе Франклина типа теоремы полученной в [9]. Для формулировки полученных

---

[1] Исследования выполнены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 15T–1A006.

результатов дадим некоторые необходимые определения. Пусть $n = 2^k + i$, где $k \geq 0$ и $1 \leq i \leq 2^k$. Обозначим

$$s_{n,j} = \begin{cases} \frac{j}{2^{k+1}}, & \text{при} \quad 0 \leq j \leq 2i; \\ \frac{j-2i}{2^k}, & \text{при} \quad 2i+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Через S_n обозначим пространство функций, непрерывных и кусочно линейных на $[0;1]$ с узлами $\{s_{n,j}\}_{j=0}^n$, т.е. $f \in S_n$, если $f \in C[0;1]$ и линейна на каждом отрезке $[s_{n,j-1}; s_{n,j}]$, $j = 1, 2, \dots, n$. Ясно, что $\dim S_n = n + 1$ и множество $\{s_{n,j}\}_{j=0}^n$ получается добавлением точки $s_{n,2i-1}$ к множеству $\{s_{n-1,j}\}_{j=0}^{n-1}$. Поэтому, существует единственная, с точностью до знака, функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\|f_n\|_2 = 1$. Полагая $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$, $x \in [0;1]$, получим ортонормированную систему $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$, которая эквивалентным образом определена Ф. Франклином [11].

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n f_n(x)$. Обозначим

$$\sigma_\nu(x) := \sum_{n=0}^{2^\nu} a_n f_n(x), \quad \sigma^*(x) := \sup_\nu |\sigma_\nu(x)|.$$

Введем следующие обозначения: $t_j^\nu = \frac{j}{2^\nu}$, когда $0 \leq j \leq 2^\nu$, $t_{-1}^\nu = t_0^\nu = 0$ и $t_{2^\nu+1}^\nu = t_{2^\nu}^\nu = 1$. Положим $\Delta_j^\nu = [t_{j-1}^\nu; t_{j+1}^\nu]$ для $1 \leq j \leq 2^\nu$, и $N_j^\nu(t_i^\nu) = \delta_{ij}$ при $0 \leq i \leq 2^\nu$ и линейна на $[t_{i-1}^\nu; t_i^\nu]$ при $1 \leq i \leq 2^\nu$ для $j = 0, \dots, 2^\nu$. Через $M_j^\nu(x)$ обозначим

$$M_j^\nu(x) = \frac{N_j^\nu(x)}{\|N_j^\nu\|_1} = \frac{2}{t_{j+1}^\nu - t_{j-1}^\nu} N_j^\nu(x).$$

Ясно, что $\mathrm{supp M_j^\nu} = \mathrm{supp N_j^\nu} = \Delta_j^\nu$ и

$$\int_0^1 M_j^\nu(x)dx = 1. \tag{1.1}$$

Через $|A|$ обозначим меру Лебега множества A.

Пусть система функций $\{h_m(x)\}$ удовлетворяет следующим условиям.

Функции $h_m(x) : [0,1] \to R$ такие, что

$$0 \leq h_1(x) \leq h_2(x) \leq \dots \leq h_m(x) \leq \dots, \quad \lim_{m\to\infty} h_m(x) = \infty \tag{1.2}$$

и существуют двоичные точки $0 = t_{m,0} < t_{m,1} < \ldots < t_{m,n_m} = 1$, такие что интервалы $I_k^m = [t_{m,k-1}, t_{m,k})$, $k = 1, \dots, n_m$, двоичны, т.е.

$$t_{m,k} \in \left\{\frac{i}{2^j}; i, j \in \mathbb{Z}\right\} \text{ и } I_k^m \in \mathcal{D} := \left\{\left[\frac{i}{2^j}, \frac{i+1}{2^j}\right]; 0 \leq i \leq 2^j - 1, j \geq 0\right\},$$

и на этих интервалах функция $h_m(x)$ постоянна: $h_m(x) = \lambda_k^m$ для $x \in I_k^m$, $k = 1, \dots, n_m$.

Кроме того выполнены следующие два условия:

$$\inf_{m,k} \int_{I_k^m} h_m(x)dx = \inf_{m,k} |I_k^m| \lambda_k^m > 0 \tag{1.3}$$

и

$$\sup_{m,k} \left(\frac{\lambda_k^m}{\lambda_{k-1}^m} + \frac{\lambda_{k-1}^m}{\lambda_k^m} \right) < +\infty. \tag{1.4}$$

Иначе говоря, для каждой функции $h_m(x)$ интервал $[0,1]$ можно раздробить на двоичные интервалы, на каждом из которых эта функция принимает значения эквивалентные значениям на соседних интервалах, а интегралы по этим интервалам больше некоторой положительной постоянной.

Оказывается, (см. лемму 2.2) что если функции h_m удовлетворяют условиям (1.2)-(1.4), то можно выбрать новые двоичные интервалы I_k^m, так что вместе с условиями (1.3), (1.4) удовлетворялось бы условие

$$\sup_{m,k} \left(\frac{|I_k^m|}{|I_{k-1}^m|} + \frac{|I_{k-1}^m|}{|I_k^m|} \right) < +\infty. \tag{1.5}$$

Теперь мы в состоянии сформулировать основной результат статьи.

Теорема 1.1. *Пусть последовательность функций $h_m(x)$ удовлетворяет условиям (1.2) – (1.4), последовательность $\sigma_\nu = \sum_{n=0}^{2^\nu} a_n f_n$ сходится по мере к функции f, а мажоранта σ^* частичных сумм σ_ν удовлетворяет следующему условию:*

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\{x\in[0,1];\ \sigma^*(x)>h_m(x)\}} h_m(x)dx = 0. \tag{1.6}$$

Тогда для всех $n \geq 0$ имеют место

$$a_n = \lim_{m\to\infty} \int_0^1 [f(x)]_{h_m(x)} f_n(x)dx, \tag{1.7}$$

где

$$[f(x)]_{\lambda(x)} = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq \lambda(x) \\ 0, & |f(x)| > \lambda(x). \end{cases}$$

2. Вспомогательные леммы.

Для доказательства теоремы 1.1 нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ и $h(x) = \lambda_k$ когда $x \in I_k := [t_{k-1}, t_k)$ и $I_k \in \mathcal{D}$ для $k = 1, \ldots, n$. Более того $\gamma > 0$ такая что*

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \leq \gamma, \text{ для } k = 1, \ldots, n-1. \tag{2.1}$$

Тогда существуют точки $0 = \widetilde{t}_0 < \widetilde{t}_1 < \ldots < \widetilde{t}_s = 1$, *такие что интервалы* $\widetilde{I}_l = [\widetilde{t}_{l-1}, \widetilde{t}_l) \in \mathcal{D}$, $l = 1, \ldots, s$, *функция* h *на этих интервалах постоянная:* $h(x) = \widetilde{\lambda}_l$ *для* $x \in \widetilde{I}_l$, $l = 1, \ldots, s$, *кроме того*

$$\frac{1}{2\gamma} \le \frac{|\widetilde{I}_l|}{|\widetilde{I}_{l+1}|} \le 2\gamma, \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{\gamma} \le \frac{\widetilde{\lambda}_l}{\widetilde{\lambda}_{l+1}} \le \gamma, \text{ для } l = 1, \ldots, s-1, \tag{2.3}$$

$$\min_l \int_{\widetilde{I}_l} h_m(x)dx = \min_k \int_{I_k} \widetilde{h}_m(x)dx > 0. \tag{2.4}$$

Из леммы 2.1 легко вывести следующую лемму.

Лемма 2.2. *Пусть функции* $h_m(x)$ *удовлетворяют условиям (1.2)-(1.4), тогда существуют двоичные точки* $0 = \widetilde{t}_{m,0} < \widetilde{t}_{m,1} < \ldots < \widetilde{t}_{m,\widetilde{n}_m} = 1$ *такие, что интервалы* $\widetilde{I}^m_k = [\widetilde{t}_{m,k-1}, \widetilde{t}_{m,k}) \in \mathcal{D}$, *двоичные для всех* $k = 1, \ldots, \widetilde{n}_m$ *и на этих интервалах функция* $h_m(x)$ *постоянная:* $h_m(x) = \widetilde{\lambda}^m_k$ *для* $x \in \widetilde{I}^m_k$, $k = 1, \ldots, \widetilde{n}_m$, *и условия (1.3), (1.4), а также (1.5) удовлетворены для интервалов* $\widetilde{I}^m_k$ *и значений* $\widetilde{\lambda}^m_k$.

Замечание 2.1. *Из леммы 2.2 следует, что при доказательстве теоремы 1.1 мы можем считать, что условие (1.5) также выполнено.*

Доказательство леммы 2.1. Положим $c = \min_k \int_{I_k} h_m(x)dx = \min_k \lambda_k |I_k|$ и пусть $1 \le k_0 \le n$, такое что $\lambda_{k_0}|I_{k_0}| = c$. Из определения c следует, что для каждого i, $-k_0 + 1 \le i \le n - k_0$ существует целое $n_i \ge 0$ такое, что

$$2^{n_i} c \le \lambda_{k_0+i}|I_{k_0+i}| < 2^{n_i+1} c. \tag{2.5}$$

Отметим, что $n_0 = 0$. Положим

$$t_{i,j} = t_{k_0+i-1} + \frac{|I_{k_0+i}|}{2^{n_i}} \cdot j, \text{ для } j = 0, \ldots, 2^{n_i},$$

$$I_{i,j} = [t_{i,j-1}, t_{i,j}), \text{ и } \lambda_{i,j} = \lambda_i \text{ для } j = 1, \ldots, 2^{n_i},$$

Следовательно, имеем

$$\int_{I_{0,1}} h_m(x)dx = c \le \int_{I_{i,j}} h_m(x)dx = \lambda_{i,j}|I_{i,j}| < 2c. \tag{2.6}$$

Из определения c, $I_{i,j}$, (2.5) и (2.1) следует, что

$$|I_{i,j}| = |I_{i,1}| < \frac{2c}{\lambda_{k_0+i}} \le \frac{2c\gamma}{\lambda_{k_0+i-1}} \le 2\gamma |I_{i-1,2^{n_i-1}}|,$$

аналогично, получаем

$$|I_{i,j}| = |I_{i,1}| \geq \frac{c}{\lambda_{k_0+i}} \geq \frac{c}{\gamma\lambda_{k_0+i-1}} \geq \frac{1}{2\gamma}|I_{i-1,2^{n_{i-1}}}|.$$

Последние два неравенства означают, что соотношение длин интервалов $I_{i,j}$ с общим концом не более чем 2γ. Перенумеровав интервалы $\{I_{i,j}; -k_0+1 \leq i \leq n-k_0, 1 \leq j \leq 2^{n_i}\}$ в порядке возрастания левого конца получим интервалы $\widetilde{I}_l$, $l = 1, \ldots, \sum_{i=-k_0+1}^{n-k_0} 2^{n_i}$, которые удовлетворяют условию (2.2). Равенство (2.4) следует из (2.6). Из определения $\widetilde{I}_l$ следует, что h_m постоянна на каждом $\widetilde{I}_l$, и если обозначить соответствующие значения через $\widetilde{\lambda}_l$, то из (2.1) получим (2.3), так как $\frac{\widetilde{\lambda}_l}{\widetilde{\lambda}_{l+1}} = 1$ или существует такое k, что $\frac{\widetilde{\lambda}_l}{\widetilde{\lambda}_{l+1}} = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}$.

3. Доказательство теоремы 1.1.

При доказательстве мы будем в основном применять методы работ [8] и [9]. Достаточно доказать, что для любых ν_0, j_0 имеет место следующее соотношение

$$(\sigma_{\nu_0}, M_{j_0}^{\nu_0}) = \lim_{m\to\infty}\int_0^1 [f(x)]_{h_m(x)} M_{j_0}^{\nu_0}(x)dx. \tag{3.1}$$

Действительно, для любого $n \geq 0$ существует целое k такое, что $n \leq 2^k$, следовательно $f_n \in S_{2^k}$, поэтому существуют числа $\alpha_i, i = 0, \ldots, 2^k$ такие, что $f_n = \sum_{i=0}^{2^k} \alpha_i M_i^k$, откуда, применяя (3.1), получим

$$a_n = \left(\sum_{i=0}^{2^k} a_i f_i, f_n\right) = \sum_{i=0}^{2^k} \alpha_i(\sigma_k, M_i^k) = \sum_{i=0}^{2^k} \alpha_i \lim_{m\to\infty}\int_0^1 [f(x)]_{h_m(x)} M_i^k(x)dx$$

$$= \lim_{m\to\infty}\int_0^1 [f(x)]_{h_m(x)} \sum_{i=0}^{2^k} \alpha_i M_i^k(x)dx = \lim_{m\to\infty}\int_0^1 [f(x)]_{h_m(x)} f_n(x)dx.$$

Из условий (1.4) и (1.5) вытекает, что существует $\gamma > 0$ такая, что

$$\frac{\lambda_k^m}{\gamma} \leq \lambda_{k+1}^m \leq \gamma\lambda_k^m \quad \text{и} \quad \frac{|I_k^m|}{\gamma} \leq |I_{k+1}^m| \leq \gamma|I_k^m|. \tag{3.2}$$

Обозначим $\varepsilon_0 = \inf_{m,k}\int_{I_k^m} h_m(x)dx = \inf_{m,k}\lambda_k^m|I_k^m|$, и

$$E_m = \left\{x \in \mathrm{supp} M_{j_0}^{\nu_0}; \sigma^*(x) \geq h_m(x)\right\}. \tag{3.3}$$

Зафиксируем ν_0, j_0 и $\varepsilon \leq \varepsilon_0/(16\gamma)$. Из (1.6) следует, что существует m_0 такое, что для $m \geq m_0$ имеет место

$$\int_{E_m} h_m(x)dx < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Так как $(h_m(x))^{-1} \to 0$, и для каждого x последовательность $(h_m(x))^{-1}$ убывающая, следовательно $(h_m(x))^{-1} \rightrightarrows 0$ на $[0,1]$, поэтому для каждого M существует m_1 такое что для $m \geq m_1$ имеем $h_m(x) \geq M$ для любого $x \in [0,1]$. Взяв $M = 2^{\nu_0+4}\varepsilon$, отсюда и из (3.4) получим, что для $m \geq \max(m_0, m_1) =: m_2$ имеет место

$$M|E_m| \leq \int_{E_m} h_m(x)dx < \varepsilon,$$

откуда получим для $m \geq m_2$ следующее неравенство

$$|E_m| < \frac{1}{16 \cdot 2^{\nu_0}} = \frac{1}{16}|A|, \text{ для любого } A \in \mathcal{D}_{\nu_0}, \tag{3.5}$$

где

$$\mathcal{D}_\nu = \left\{ \left[\frac{i}{2^\nu}, \frac{i+1}{2^\nu}\right]; 0 \leq i \leq 2^\nu - 1 \right\}.$$

Зафиксируем $m \geq m_2$. Докажем, что

$$|E_m \cap I_k^m| < \frac{|I_k^m|}{8} \text{ для любого } k = 1, \dots, n_m. \tag{3.6}$$

В противном случае существует k_0, такое что $|E_m \cap I_{k_0}^m| \geq |I_{k_0}^m|/8$, откуда получаем

$$\varepsilon_0 < \lambda_{k_0}^m |I_{k_0}^m| \leq 8\lambda_{k_0}^m |E_m \cap I_{k_0}^m| \leq 8 \int_{E_m} h_m(x)dx \leq 8\varepsilon < \varepsilon_0,$$

т.е. пришли к противоречию.

Для любого $J \in \mathcal{D}$, который можно представить в виде объединения $\cup_{k=l}^j I_k^m$, из (3.6) будем иметь $|J \cap E_m| = \sum_{k=l}^j |I_k^m \cap E_m| \leq 2^{-3} \sum_{k=l}^j |I_k^m| = 2^{-3}|J|$, т.е.

$$|J \cap E_m| \leq \frac{|J|}{8}, \text{ для любого } J = \cup_{k=l}^j I_k^m \in \mathcal{D}. \tag{3.7}$$

Ясно, что

$$\text{если } J \in \mathcal{D} \text{ и } J \supset I_{k_0}^m, \text{ то } J = \cup_{k=l}^j I_k^m \text{ для некоторых } l \leq k_0 \leq j. \tag{3.8}$$

Для $\nu \geq \nu_0$ обозначим

$$\Omega_\nu = \left\{ A : A \in \mathcal{D}_\nu \text{ и } A \subset \operatorname{supp} M_{j_0}^{\nu_0} \right\}.$$

Пусть ν_1-наименьшее натуральное число для которого существует интервал $A \in \Omega_{\nu_1}$ удовлетворяющий условию $|A \cap E_m| > \frac{1}{8}|A|$. Из (3.5) следует, что $\nu_1 > \nu_0$. Теперь для $\nu \geq \nu_0$ по индукции определим семейства Ω_ν^1 и Ω_ν^2. Для $\nu = \nu_0$ положим

$$\Omega_{\nu_0}^1 = \left\{ A \in \Omega_{\nu_0} : |A \cap E_m| > \frac{1}{8}|A| \right\}, \quad Q_{\nu_0} = \bigcup_{A \in \Omega_{\nu_0}^1} A,$$

и

$$\Omega^2_{\nu_0} = \{A \in \Omega_{\nu_0} : A \not\subset Q_{\nu_0}\}, \quad P_{\nu_0} = \bigcup_{A \in \Omega^2_{\nu_0}} A.$$

Из того, что $\nu_1 > \nu_0$, следует, что $Q_{\nu_0} = \emptyset$ и

$$P_{\nu_0} = \mathrm{supp} M^{\nu_0}_{j_0}. \tag{3.9}$$

Допуская, что определены $\Omega^1_{\nu'}$, $\Omega^2_{\nu'}$ и $Q_{\nu'}$, для $\nu' < \nu$, определим семейства Ω^1_ν и Ω^2_ν следующим образом:

$$\Omega^1_\nu = \left\{ A \in \Omega_\nu : |A \cap E_m| > \frac{1}{8}|A| \ \text{ и } \ A \not\subset \bigcup_{\nu' < \nu} Q_{\nu'} \right\}, \tag{3.10}$$

где

$$Q_\nu = \bigcup_{A \in \Omega^1_\nu} A, \quad \Omega^2_\nu = \left\{ A \in \Omega_\nu : A \not\subset \bigcup_{\nu' \le \nu} Q_{\nu'} \right\}.$$

Положим также $P_\nu = \bigcup_{A \in \Omega^2_\nu} A$. Выше определенные семейства Ω^1_ν, Ω^2_ν и множества Q_ν, P_ν обладают следующими свойствами: $\Omega^1_\nu \subset \Omega_\nu$, $\Omega^2_\nu \subset \Omega_\nu$,

$$\mathrm{supp} M^{\nu_0}_{j_0} = P_\nu \bigcup \left(\bigcup_{\nu' \le \nu} Q_{\nu'} \right), \quad P_\nu \bigcap \left(\bigcup_{\nu' \le \nu} Q_{\nu'} \right) = \emptyset, \tag{3.11}$$

и

$$Q_{\nu'} \bigcap Q_{\nu''} = \emptyset, \ \text{ если } \ \nu' \ne \nu''. \tag{3.12}$$

Из (3.10) и (3.12) следует, что

$$\left| \bigcup_{\nu' \le \nu} Q_{\nu'} \right| < 8|E_m| \ \text{ для любого } \ \nu. \tag{3.13}$$

Теперь докажем, что

$$\text{для каждого } A \in \Omega^1_\nu, \nu \ge \nu_0 \text{ существует } k \ \text{ такое что } \ A \subset I^m_k. \tag{3.14}$$

В противном случае существовало бы k_0 такой что $A \supset I^m_{k_0}$, следовательно из (3.8) получим, что $A = \cup^j_{k=l} I^m_k$ для некоторых $l \le k_0 \le j$. Следовательно из (3.7) получим $|A \cap E_m| < 2^{-3}|A|$, что противоречит условию $A \in \Omega^1_\nu$.

Обозначим (напомним, что $\Delta^\nu_j = (t^\nu_{j-1}, t^\nu_{j+1})$)

$$\mathbf{J}_\nu = \left\{ j : \Delta^\nu_j \cap Q_\nu \ne \emptyset \ \text{ и } \ \Delta^\nu_j \subset P_{\nu-1} \right\}. \tag{3.15}$$

Докажем, что

$$|\sigma_\nu(x)| \le 2h_m(x) \text{ для } x \in \Delta^\nu_j, \ j \in \mathbf{J}_\nu \tag{3.16}$$

Пусть A та половинка Δ_j^ν, которая принадлежит Ω_ν^1. Тогда, применяя (3.14), получим что $A \subset I_l^m$ для некоторого l. Докажем, что

$$\Delta_j^\nu \subset I_k^m \cup I_{k+1}^m \text{ для } k = l-1 \text{ или } l. \tag{3.17}$$

Предположим противоположное: рассмотрим случай $\Delta_j^\nu \supset I_{l+1}^m$ (аналогично рассматривается случай $\Delta_j^\nu \supset I_{l-1}^m$). Заметим, что из (3.2) следует $2|A| = |\Delta_j^\nu| > |I_{l+1}^m| \geq |I_l^m|/\gamma$, откуда получим

$$\varepsilon_0 \leq |I_l^m|\lambda_l^m < 2\gamma|A|\lambda_l^m \leq 16\gamma|A \cap E_m|\lambda_l^m \leq 16\gamma \int_{E_m} h_m(x)dx < 16\gamma\varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

что невозможно.

Пусть Δ_1 и Δ_2 соответственно левая и правая половинки интервала Δ_j^ν. Из (3.17) следует, что существуют l_1, l_2 такие, что $\Delta_1 \subset I_{l_1}^m$ и $\Delta_2 \subset I_{l_2}^m$. Ясно, что $|l_1 - l_2| \leq 1$. Следовательно

$$h_m(x) = \lambda_{l_j}^m \text{ для } x \in \Delta_j, j = 1, 2. \tag{3.18}$$

Так как $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Delta_j^\nu \subset P_{\nu-1}$ (напомним, что $j \in \mathbf{J}_\nu$), следовательно существуют $\widetilde{\Delta}_1, \widetilde{\Delta}_2 \in \mathcal{D}_{\nu-1}$ так что $\Delta_i \subset \widetilde{\Delta}_i \subset P_{\nu-1}$ для $i = 1, 2$, откуда получим

$$|\Delta_i \cap E_m| \leq |\widetilde{\Delta}_i \cap E_m| \leq \frac{1}{8 \cdot 2^{\nu-1}} = \frac{|\Delta_i|}{4} \text{ для } i = 1, 2. \tag{3.19}$$

Докажем (3.16) для $x \in \Delta_1$. Неравенство (3.16) для $x \in \Delta_2$ доказывается аналогично.

Учитывая линейность функции σ_ν на $\Delta_1 = [\alpha, \beta]$, получим, что множество

$$I := \{t \in \Delta_1 : |\sigma_\nu(t)| < \lambda_{l_1}^m\}$$

является интервалом. Из (3.18) и (3.19) следует, что

$$|I| = |\{t \in \Delta_1 : |\sigma_\nu(t)| \leq h_m(t)\}| \geq |\Delta_1 \cap E_m^c| \geq \frac{3}{4}|\Delta_1|. \tag{3.20}$$

Поэтому, принимая во внимание линейность функции σ_ν и (3.19), получим

$$|\sigma_\nu'(t)| < \frac{2\lambda_{l_1}^m}{\frac{3}{4}(\beta - \alpha)} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\lambda_{l_1}^m}{\beta - \alpha}. \tag{3.21}$$

С учетом (3.20) получим, что точка α удалена от $I =: [a; b]$ меньше чем $\frac{\beta - \alpha}{4}$. Следовательно, из (3.21) получим

$$|\sigma_\nu(\alpha)| < \lambda_{l_1}^m + \frac{8}{3} \cdot \frac{\lambda_{l_1}^m}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\beta - \alpha}{4} < 2\lambda_{l_1}^m.$$

Аналогично получается, что $|\sigma_\nu(\beta)| < 2\lambda_{l_1}^m$. Отсюда и из линейности функции σ_ν на $[\alpha; \beta]$, применяя (3.18), получим, что $|\sigma_\nu(t)| < 2h_m(t)$, $t \in [\alpha; \beta] = \Delta_1$. Неравенство (3.16) доказано.

Аналогично неравенству (3.16) доказывается, что

$$|\sigma_\nu(x)| \le 2h_m(x) \text{ для } x \in \Delta_j^\nu \subset P_\nu. \tag{3.22}$$

Теперь по индукции определим разложения ψ_n для $M_{j_0}^{\nu_0}$, удовлетворяющие условиям:

$$M_{j_0}^{\nu_0} = \psi_n = \sum_{\nu \le n} \sum_{j \in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n M_j^\nu + \sum_{j:\Delta_j^n \subset P_n} \alpha_j^n M_j^n, \tag{3.23}$$

$$\sum_{\nu \le n} \sum_{j \in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n + \sum_{j:\Delta_j^n \subset P_n} \alpha_j^n = 1, \ \ \alpha_{\nu,j}^n \ge 0, \ \ \alpha_j^n \ge 0. \tag{3.24}$$

Так как $P_{\nu_0} = \operatorname{supp} M_{j_0}^{\nu_0}$ (см. (3.9)), поэтому положим $\psi_{\nu_0} = M_{j_0}^{\nu_0}$. Очевидно ψ_{ν_0} удовлетворяет условиям (3.23) и (3.24).

Допуская, что определено ψ_n, удовлетворяющее условиям (3.23), (3.24), определим ψ_{n+1}. Для j, с условием $\Delta_j^n \subset P_n$, имеем

$$M_j^n(x) = \sum_{v=0}^{2^{n+1}} M_j^n(t_v^{n+1}) N_v^{n+1}(x) = \sum_{v:\Delta_v^{n+1} \subset \operatorname{supp} M_j^n} \beta_v M_v^{n+1}(x), \ \ \text{с} \ \ \beta_v \ge 0. \tag{3.25}$$

Заметим, что если $\Delta_j^n \subset P_n$ и $\Delta_v^{n+1} \subset \operatorname{supp} M_j^n = \Delta_j^n$, то либо $\Delta_v^{n+1} \cap Q_{n+1} \ne \emptyset$, и поэтому $v \in \mathbf{J}_{n+1}$, либо $\Delta_v^{n+1} \subset P_{n+1}$. Следовательно, подставляя (3.25) в (3.23), и группируя подобные члены (одно и тоже Δ_v^{n+1} может входить в разные суммы (3.25)), получим

$$M_{j_0}^{\nu_0} = \psi_{n+1} = \sum_{\nu \le n+1} \sum_{j \in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^{n+1} M_j^\nu + \sum_{j:\Delta_j^{n+1} \subset P_{n+1}} \alpha_j^{n+1} M_j^{n+1}. \tag{3.26}$$

Неотрицательность коэффициентов $\alpha_{\nu,j}^{n+1}$, α_j^{n+1} в (3.26) следует из неотрицательности коэффициентов в (3.25) и (3.23). Учитывая, что интегралы от всех функций M_j^ν равны единице (см. (1.1)), из (3.26) получим

$$\sum_{\nu \le n+1} \sum_{j \in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^{n+1} + \sum_{j:\Delta_j^{n+1} \subset P_{n+1}} \alpha_j^{n+1} = 1.$$

Итак, доказали возможность представления (3.23), с коэффициентами (3.24). Следовательно, для любого n имеем

$$(\sigma_n, M_{j_0}^{\nu_0}) = \sum_{\nu \le n} \sum_{j \in \mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n (\sigma_n, M_j^\nu) + \sum_{j:\Delta_j^n \subset P_n} \alpha_j^n (\sigma_n, M_j^n), \tag{3.27}$$

Отметим, что если $\nu_0 \le \nu \le n$ и $p > 2^\nu$, то $(f_p, M_j^\nu) = 0$. Поэтому

$$(\sigma_n, M_j^\nu) = \sum_{p=0}^{2^n} a_p (f_p, M_j^\nu) = \sum_{p=0}^{2^\nu} a_p (f_p, M_j^\nu) = (\sigma_\nu, M_j^\nu). \tag{3.28}$$

Следовательно, с учетом (3.27), получим

$$(\sigma_{\nu_0}, M_{j_0}^{\nu_0}) - \int_0^1 [f(t)]_{h_m(t)} M_{j_0}^{\nu_0}(t)dt = (\sigma_n, M_{j_0}^{\nu_0}) - ([f]_{h_m}, M_{j_0}^{\nu_0})$$

$$= \sum_{\nu\le n}\sum_{j\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n(\sigma_n - [f]_{h_m}, M_j^\nu) + \sum_{j:\Delta_j^n\subset P_n} \alpha_j^n(\sigma_n - [f]_{h_m}, M_j^n) =: I_n^1 + I_n^2. \tag{3.29}$$

Сначала оценим I_n^1. Из (3.28) и (3.16) следует

$$|I_n^1| = |\sum_{\nu\le n}\sum_{j\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n(\sigma_\nu - [f]_{h_m}, M_j^\nu)| \le \sum_{\nu\le n}\sum_{j\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n(|\sigma_\nu| + h_m, M_j^\nu)$$

$$\le 3\sum_{\nu\le n}\sum_{j\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n(h_m, M_j^\nu) = 3(h_m, \sum_{\nu\le n}\sum_{j\in\mathbf{J}_\nu} \alpha_{\nu,j}^n M_j^\nu).$$

Из (3.23) и (3.24) вытекает, что $\sum_{\nu\le n}\sum_{j\in\mathbf{J}_\nu}\alpha_{\nu,j}^n M_j^\nu \le M_{j_0}^{\nu_0}$, следовательно

$$|I_n^1| \le 3\int_{\bigcup\limits_{\nu\le n}\bigcup\limits_{j\in\mathbf{J}_\nu}\Delta_j^\nu} h_m(t)M_{j_0}^{\nu_0}(t)dt. \tag{3.30}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{J}_\nu^1 := \{j\in\mathbf{J}_\nu : \exists k \text{ s.t. } \Delta_j^\nu \subset I_k^m\},\ \ \mathbf{J}_\nu^2 := \mathbf{J}_\nu \setminus \mathbf{J}_\nu^1,$$

$$A_n := \bigcup_{\nu\le n}\bigcup_{j\in\mathbf{J}_\nu^1}\Delta_j^\nu,\ \ B_n := \bigcup_{\nu\le n}\bigcup_{j\in\mathbf{J}_\nu^2}\Delta_j^\nu.$$

Поэтому, применяя (3.30), получим

$$|I_n^1| \le 3\left(\int_{A_n} h_m(t)M_{j_0}^{\nu_0}(t)dt + \int_{B_n} h_m(t)M_{j_0}^{\nu_0}(t)dt\right)$$

$$\le C\left(\int_{A_n} h_m(t)dt + \int_{B_n} h_m(t)dt\right) =: C(I_n^3 + I_n^4). \tag{3.31}$$

Из (3.17) следует, что для каждого $j\in\mathbf{J}_\nu^2$ существует k такое, что $\Delta_j^\nu \subset I_k^m \cup I_{k+1}^m$, а из определения Q_ν, Ω_ν^1 получим, что для каждого k существует не более одной пары $(\nu(k), j(k))$ для которой $j(k)\in\mathbf{J}_\nu^2$ и $\Delta_{j(k)}^{\nu(k)} \subset I_k^m\cup I_{k+1}^m$. Следовательно из (3.2) получим

$$I_n^4 \le \sum_{k=1}^{n_m}(\lambda_k^m + \lambda_{k+1}^m)|\Delta_{j(k)}^{\nu(k)}| \le (\gamma+1)\sum_{k=1}^{n_m}\lambda_k^m|\Delta_{j(k)}^{\nu(k)}|.$$

Также заметим, что из определения Q_ν следует

$$|\Delta_{j(k)}^{\nu(k)}| \le 2|Q_{\nu(k)}\cap(I_k^m\cup I_{k+1}^m)| \le 2|\bigcup_{\nu\le n} Q_\nu \cap (I_k^m \cup I_{k+1}^m)|.$$

Объединяя последние два неравенства с (3.2) получим

$$I_n^4 \le 2(\gamma+1)\left(\sum_{k=1}^{n_m}\lambda_k^m\left|\bigcup_{\nu\le n}Q_\nu\cap I_k^m\right| + \gamma\sum_{k=1}^{n_m}\lambda_{k+1}^m\left|\bigcup_{\nu\le n}Q_\nu\cap I_{k+1}^m\right|\right)$$

$$= 2(\gamma+1)^2\sum_{k=1}^{n_m}\lambda_k^m\left|\bigcup_{\nu\le n}Q_\nu\cap I_k^m\right| =: 2(\gamma+1)^2 I_n^5. \tag{3.32}$$

Воспользовавшись (3.14) и определением Q_ν для I_n^5 получим следующую оценку

$$I_n^5 \le 8\sum_{k=1}^{n_m}\lambda_k^m\left|E_m\cap\left(\bigcup_{\nu\le n}Q_\nu\right)\cap I_k^m\right| \le \tag{3.33}$$

$$\le 8\sum_{k=1}^{n_m}\lambda_k^m\left|E_m\cap I_k^m\right| = 8\int_{E_m}h_m(t)dt < 8\varepsilon.$$

Оценим I_n^3. Для $j\in\mathbf{J}_\nu^1$ имеем $\Delta_j^\nu\subset I_k^m$ при некотором k, откуда $|\Delta_j^\nu|\le 2|\Delta_j^\nu\cap Q_\nu|$, поэтому $|A_n\cap I_k^m|\le 2|\bigcup\limits_{\nu\le n}Q_\nu\cap I_k^m|$. Из последней оценки вытекает

$$I_n^3 = \int_{A_n}h_m(t)dt = \sum_{k=1}^{n_m}\lambda_k^m|A_n\cap I_k^m| \le 2\sum_{k=1}^{n_m}\lambda_k^m\left|\bigcup_{\nu\le n}Q_\nu\cap I_k^m\right| = 2I_n^5.$$

Объединяя последнее неравенство с (3.31) – (3.33) получим

$$|I_n^1| \le C_\gamma\varepsilon. \tag{3.34}$$

Перейдем к оцениванию I_n^2. Из (3.23) и (3.24) вытекает, что $\sum_{j:\Delta_j^n\subset P_n}\alpha_j^n M_j^n \le M_{j_0}^{\nu_0}$, следовательно

$$|I_n^2| \le (|\sigma_n - [f]_{h_m}|, \sum_{j:\Delta_j^n\subset P_n}\alpha_j^n M_j^n) \le \int_{\bigcup\limits_{j:\Delta_j^n\subset P_n}\Delta_j^n}|\sigma_n(t)-[f(t)]_{h_m(t)}|\cdot M_{j_0}^{\nu_0}(t)dt$$

$$\le C\int_{\bigcup\limits_{j:\Delta_j^n\subset P_n}\Delta_j^n}|\sigma_n(t)-[f(t)]_{h_m(t)}|dt. \tag{3.35}$$

Введем следующие обозначения

$$C_n = \bigcup_{j:\Delta_j^n\subset P_n}\Delta_j^n\cap E_m,\quad D_n = \bigcup_{j:\Delta_j^n\subset P_n}\Delta_j^n\cap E_m^c\cap\{t;|\sigma_n(t)-f(t)|\le\varepsilon\}$$

$$F_n = \bigcup_{j:\Delta_j^n\subset P_n}\Delta_j^n\cap E_m^c\cap\{t;|\sigma_n(t)-f(t)|>\varepsilon\}.$$

Ясно, что $C_n \cup D_n \cup F_n = \bigcup_{j:\Delta_j^n \subset P_n} \Delta_j^n$, а также $|f(t)| \le h_m(t)$ для п.в. $x \in D_n \cup F_n \subset E_m^c$, что вместе с неравенством (3.35) дает оценку

$$|I_n^2| \le C\left(\int_{C_n} |\sigma_n(t) - [f(t)]_{h_m(t)}|dt + \int_{D_n} |\sigma_n(t) - f(t)|dt + \int_{F_n} |\sigma_n(t) - f(t)|dt\right)$$

$$=: C(I_n^6 + I_n^7 + I_n^8). \tag{3.36}$$

Для $t \in C_n$ из (3.22) имеем $|\sigma_n(t) - [f(t)]_{h_m(t)}| \le |\sigma_n(t)| + |[f(t)]_{h_m(t)}| \le 3h_m(t)$, откуда получим

$$I_n^6 \le 3\int_{C_n} h_m(t)dt \le 3\int_{E_m} h_m(t)dt \le 3\varepsilon. \tag{3.37}$$

Из определения множества D_n следует, что $|\sigma_n(t) - f(t)| \le \varepsilon$ для $t \in D_n$, поэтому

$$I_n^7 \le \int_{D_n} \varepsilon dt \le \varepsilon. \tag{3.38}$$

Так как σ_n сходится по мере к f, следовательно существует такое n, что

$$|\{t; |\sigma_n(t) - f(t)| > \varepsilon\}| < \frac{\varepsilon}{\max\{h_m(t); t \in [0,1]\}}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $|\sigma_n(t) - f(t)| \le |\sigma_n(t)| + |f(t)| \le 2h_m(t)$ для п.в. $t \in F_n \subset E_m^c$, получим

$$I_n^8 \le \int_{F_n} 2h_m(t)dt \le 2\max\{h_m(t); t \in [0,1]\} \cdot |\{t; |\sigma_n(t) - f(t)| > \varepsilon\}| < 2\varepsilon. \tag{3.39}$$

Из неравенств (3.36)-(3.39) следует, что $|I_n^2| \le 6\varepsilon$, которое вместе с (3.29), (3.34) влечет за собой

$$|(\sigma_{\nu_0}, M_{j_0}^{\nu_0}) - \int_0^1 [f(t)]_{h_m(t)} M_{j_0}^{\nu_0}(t)dt| \le C_\gamma \varepsilon.$$

Равенство (3.1), и вместе с ним и теорема доказаны.

Работа была выполнена летом 2016 г. во время визита автора в Бостонский Университет, США. Автор благодарен факультету Математики и Статистики Бостонского университет за гостеприимство и хорошие условия для работы.

Abstract. In this paper we prove a theorem on restoration of coefficients of Franklin series by means of its sum under some condition on 2^ν-majorant of partial sums of the series.

Список литературы

[1] А. Б. Александров, "Об A-интегрируемости граничных значений гармонических функций", Матем. заметки, **30**, но. 1, 59 – 72 (1981).

[2] С. М. Галстян, "О единственности аддитивных функций сегмента и тригонометрических рядов", Матем. заметки, **56**, но. 4, 38 – 47 (1994).

[3] Г. Г. Геворкян, "О единственности тригонометрических рядов", Матем. сб., **180**, но. 11, 1462 – 1474 (1989).

[4] Г. Г. Геворкян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", Матем. сб., **184**, но. 11, 93 – 130 (1993).

[5] Г. Г. Геворкян, "О единственности двоичных кубов и рядов по системе Хаара", Изв. НАН Армении, Матем., **30**, но. 5, 7 – 21 (1995).

[6] Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по системе Франклина", Матем. заметки, **46**, но. 2, 51 – 58 (1989).

[7] Г. Г. Геворкян, М. П. Погосян, "О восстановлении коэффициентов ряда Франклина с "хорошой" мажорантой частичных сумм", Изв. НАН Армении, Матем., в печати.

[8] Г. Г. Геворкян, "Теорема единственности для кратных рядов Франклина", Матем. заметки, **101**, но. 2, 199 – 210 (2017).

[9] К. А. Керян, "Одна теорема единственности аддитивных функций и ее приложения к некоторым ортогональным рядам", Матем. заметки, **97**, но. 3, 382 – 396 (2015).

[10] В. В. Костин, "К вопросу о восстановления коэффициентов рядов по некоторым ортогональным системам функций", Матем. заметки, **73**, но. 5, 704 – 723 (2003).

[11] Ph. Franklin, "A set of continuos orthogonal functions", Math. Ann. **100**, 522 – 528 (1928).

[12] D. Menshoff, "Sur l'unicité du développement trigonométrique", Comptes Ren. Acad. Sci., Paris, **163**, 433 – 436 (1916).

[13] K. Yoneda, "On generalized A-integrals. I", Proc. Japan Acad., **45**, no. 3, (1969).

[14] K. Yoneda, "On generalized A-integrals. II", Math. Japon., **18**, no. 2 (1973).

Поступила 20 августа 2016