Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 1, 2017, стр. 47-58.

О ЛОКАЛЬНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАЖОРАНТЫ ЧАСТИЧНЫХ СУММ И ФУНКЦИИ ПЭЛИ ДЛЯ РЯДОВ ФРАНКЛИНА

Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. КЕРЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *ggg@ysu.am*, *karenkeryan@ysu.am*

Аннотация. Доказывается, что мажоранта частичных сумм и функция Пэли ряда Франклина имеют эквивалентные нормы в пространстве $L_p(I)$, $p > 0$, если интервалы "пика" функций Франклина с ненулевыми коэффициентами лежат в I. Приводятся примеры рядов указывающие на существенность этого условия.

MSC2010 number: 42C10; 46E30.

Ключевые слова: Система Франклина; безусловный базис; функция Пэли.

1. Введение

Для формулировки полученных результатов, напомним определение системы Франклина. Пусть $n = 2^\mu + \nu$, где $\mu = 0, 1, 2, \dots$ и $1 \le \nu \le 2^\mu$. Обозначим

$$s_{n,i} = \begin{cases} \frac{i}{2^{\mu+1}}, & \text{для } 0 \le i \le 2\nu, \\ \frac{i-\nu}{2^\mu}, & \text{для } 2\nu < i \le n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Через S_n обозначим пространство функций, непрерывных и кусочно линейных на $[0;1]$ с узлами $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$, т.е. $f \in S_n$, если $f \in C[0;1]$ и линейная на каждом отрезке $[s_{n,i-1}; s_{n,i}]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ясно, что $\dim S_n = n + 1$ и множество $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$ получается добавлением точки $s_{n,2\nu-1}$ к множеству $\{s_{n-1,i}\}_{i=0}^{n-1}$. Поэтому, существует единственная, с точностью до знака, функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\|f_n\|_2 = 1$. Полагая $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1)$, $x \in [0;1]$, получим ортонормированную систему $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$, которая эквивалентным образом определена в работе [1] и называется системой Франклина.

Для $n = 2^\mu + \nu$, где $\mu = 0, 1, 2, \dots$ и $1 \le \nu \le 2^\mu$, обозначим (см. (1.1)) $\{n\} := [s_{n,2\nu-2}, s_{n,2\nu}]$ и $[n] = \mu$. Отрезок $\{n\}$ иногда называют интервалом пика функции

[1]Исследования выполнены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 15T-1A006

f_n в связи с тем, что функции f_n достигает своего наименьшего и наибольшего значений на этом отрезке. Число $[n]$ называют рангом числа n и отрезка $\{n\}$.

Систематическое изучение системы Франклина началось с работ [2], [3], где в частности доказано, что если $f \in L_p[0;1], 1 < p < \infty$, и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ ее ряд Фурье-Франклина, то

$$(1.2)\quad S^*(f,\cdot) \in L_p[0;1], \quad \text{где} \quad S^*(f,x) = \sup_n |S_n(f,x)| \quad \text{и} \quad S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x).$$

С. В. Бочкаревым [1] была доказана, что система Франклина является безусловным базисом в пространстве $L_p[0;1]$, $1 < p < \infty$. Для этого он доказал, что оператор Пэли для системы Франклина имеет слабый тип $(1,1)$, т.е. существует постоянная $C > 0$, такая что если $f \in L[0;1]$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ ее ряд Фурье-Франклина, то

$$(1.3)\qquad \operatorname{mes}\{x \in [0,1] : P(f,x) > \lambda\} \le \frac{C}{\lambda} \int_0^1 |f(x)|dx,$$

где $P(f,x) = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)\right\}^{1/2}$.

Так как P имеет сильный тип $(2,2)$, т.е. $\|P(f,\cdot)\|_2 \le C\|f\|_2$, из (1.3), в силу известной интерполяционной теоремы Марцинкевича (см. напр. [5] стр. 485), следует, что для всех $p \in (1,\infty)$ имеет место $\|P(f,\cdot)\|_p \le C_p\|f\|_p$. Следовательно, с учетом (1.2), для любого $p > 1$ имеем

$$(1.4)\qquad \int_0^1 \sup_n \left|\sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x)\right|^p dx \sim_p \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 f_k^2(x)\right)^{p/2} dx,$$

где запись $a \sim_\gamma b$ означает, что существуют постоянные c_γ и C_γ, зависящие только от γ, такие что $c_\gamma \cdot a \le b \le C_\gamma \cdot a$.
Из результатов работ [6]–[8] следует, что (1.4) верно также для $p \in (0,1]$.

Напомним, что пространство $L_0(E)$ – метрическое пространство п.в. конечных и измеримых на E функций с метрикой, сходимость по которой совпадает со сходимостью по мере на множестве E.

В работе [9] доказан не только аналог соотношения (1.4) в случае $p = 0$, но и ее локализация на множества положительной меры. А именно, доказана следующая (см. теоремы 2.1, 2.2 и 2.3 работы [9])

Теорема 1.1. *Для ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x)$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) *ряд почти всюду сходится на* E,

(2) *ряд по мере безусловно сходится на* E,

(3) $\sup_n |\sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x)| < +\infty$ *п.в. на* E,

(4) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 f_k^2(x) < +\infty$ *п.в. на* E.

В настоящей работе мы докажем, что невозможно получить локализацию соотношения (1.4) даже на двоичных интервалах и получим такую локализацию при некотором дополнительном условии.

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Для любого двоичного отрезка* $I = \left[\frac{a}{2^k}, \frac{a+1}{2^k}\right]$, *любого ряда* $\sum a_n f_n(x)$ *и любого* $p > 0$ *имеет место*

$$\left\|\sup_N \left|\sum_{\{n\}\subset I,\, n\le N} a_n f_n(x)\right|\right\|_{L_p(I)} \sim_p \left\|\left\{\sum_{\{n\}\subset I} a_n^2 f_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_p(I)}.$$

Теорема 2.2. *Для любого отрезка* $I = \left[\frac{a}{2^k}, \frac{a+1}{2^k}\right] \neq [0,1]$, *любых* $p > 0$ *и* $C > 0$ *существуют ряды* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n f_n(x)$ *такие, что*

$$\left\|\sup_N \left|\sum_{n\le N} a_n f_n(x)\right|\right\|_{L_p(I)} > C \cdot \left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_p(I)}, \tag{2.1}$$

$$\left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 f_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_p(I)} > C \cdot \left\|\sup_N \left|\sum_{n\le N} b_n f_n(x)\right|\right\|_{L_p(I)}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.2 указывает на то, что условие $\{n\} \subset I$ в теореме 2.1 существенно. Мы убедимся, что для системы Хаара не верен аналог теоремы 2.2, а аналог теоремы 2.1 верен и без условия $\{n\} \subset I$. Однако в этом случае постоянные эквивалентности также зависят от I. А именно верна следующая

Теорема 2.3. *Для любого двоичного отрезка* $I = \left[\frac{a}{2^k}, \frac{a+1}{2^k}\right]$, *любого* $p > 0$ *и любого ряда* $\sum a_n \chi_n(x)$ *имеет место*

$$\left\|\sup_N \left|\sum_{n\le N} a_n \chi_n(x)\right|\right\|_{L_p(I)} \sim_{p,I} \left\|\left\{\sum_{n} a_n^2 \chi_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_p(I)}.$$

Учитывая соотношение (1.4), для доказательства теоремы 2.1, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 2.1. *Для любого двоичного отрезка* $I = \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right]$, *любого* $p > 0$ *и любого ряда* $\sum a_n f_n(x)$ *имеют место*

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{\{n\} \subset I, n \leq N} a_n f_n(x) \right|^p dx \leq C_p \cdot \int_I \sup_N \left| \sum_{\{n\} \subset I, n \leq N} a_n f_n(x) \right|^p dx, \tag{2.3}$$

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{\{n\} \subset I} a_n^2 f_n^2(x) \right\}^{\frac{p}{2}} dx \leq C_p \cdot \int_I \left\{ \sum_{\{n\} \subset I} a_n^2 f_n^2(x) \right\}^{\frac{p}{2}} dx. \tag{2.4}$$

Для доказательства вышесформулированных утверждений напомним некоторые свойства системы Франклина.

В исследованиях рядов по системе Франклина важную роль играют так называемые экспоненциальные оценки, полученные З. Чисельским [3]

$$C_1 \cdot 2^{\frac{[n]}{2}} \cdot (2 - \sqrt{3})^{|i-2\nu-1|} < (-1)^{i+1} f_n(s_{n,i}) < C_2 \cdot 2^{\frac{[n]}{2}} \cdot (2 - \sqrt{3})^{|i-2\nu-1|},$$

где $C_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$ и $C_2 = 4 \cdot \sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$.

Для доказательства леммы 2.1 удобнее использовать оценки, полученные в [10]. Их сформулируем в виде Предложений 2.1 и 2.2.

Предложение 2.1. *Для любого* $n = 2^\mu + \nu$ *имеют место следующие неравенства:*

$$\frac{1}{4}|f_n(s_{n,i+1})| < |f_n(s_{n,i})| < \frac{2}{7}|f_n(s_{n,i+1})| \quad \text{когда} \quad 1 \leq i < 2\nu - 2, \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{4}|f_n(s_{n,i-1})| < |f_n(s_{n,i})| < \frac{2}{7}|f_n(s_{n,i-1})| \quad \text{когда} \quad 2\nu < i < n, \tag{2.6}$$

$$f_n(s_{n,1}) = -2f_n(s_{n,0}), \quad f_n(s_{n,n-1}) = -2f_n(s_{n,n}), \quad f_n(s_{n,i}) \cdot f_n(s_{n,i+1}) < 0. \tag{2.7}$$

Предложение 2.2. *Для* $n = 2^k + \nu$, *с условием* $1 < \nu < 2^k$, *выполняются*

$$\frac{97}{48} < \frac{|f_n(s_{n,2\nu-1})|}{|f_n(s_{n,2\nu})|} < \frac{95}{42} \quad и \quad \frac{107}{66} < \frac{|f_n(s_{n,2\nu-1})|}{|f_n(s_{n,2\nu-2})|} < \frac{98}{60}. \tag{2.8}$$

Из Предложения 2.1 и линейности функции f_n на $[s_{n,i-1}, s_{n,i}]$ простыми вычислениями легко выводится

Предложение 2.3: *Для* $n = 2^k + \nu$, *с условием* $1 < \nu < 2^k$, *любого* $p > 0$ *выполняются*

$$\int_{s_{n,i-2}}^{s_{n,i-1}} |f_n(x)|^p dx < \left(\frac{2}{7}\right)^p \cdot \int_{s_{n,i-1}}^{s_{n,i}} |f_n(x)|^p dx, \quad \text{когда} \quad i \leq 2\nu - 2 \tag{2.9}$$

и

$$\int_{s_{n,i-1}}^{s_{n,i}} |f_n(x)|^p dx < \left(\frac{2}{7}\right)^p \cdot \int_{s_{n,i-2}}^{s_{n,i-1}} |f_n(x)|^p dx, \quad \text{когда} \quad i \geq 2\nu + 2.$$

Предложение 2.4. *Пусть $n_1 = 2^\mu + \nu_1$, $n_2 = 2^\mu + \nu_2$ и $\nu_1 < \nu_2$. Тогда существуют числа α, β (зависящие от μ, ν_1 и ν_2), такие, что*

$$f_{n_1}(x) = \alpha \cdot f_{n_2}(x), \quad \text{когда} \quad x \leq s_{n_1, 2\nu_1 - 2} = \frac{\nu_1 - 1}{2^\mu}$$

и

$$f_{n_1}(x) = \beta \cdot f_{n_2}(x), \quad \text{когда} \quad x \geq s_{n_2, 2\nu_2} = \frac{\nu_2}{2^\mu}.$$

Это Предложение впервые было применено в [8]. Из этого Предложения немедленно следует

Предложение 2.5. *Для любых a_n, $n = 2^\mu + \nu$, $1 \leq \nu \leq 2^\mu$ и любого ν_0: $1 \leq \nu_0 \leq 2^\mu$ имеют место*

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_0} a_{2^\mu+\nu} f_{2^\mu+\nu}(x) = \alpha \cdot f_{2^\mu+\nu_0}(x), \quad \text{когда} \quad x \geq \frac{\nu_0}{2^\mu}$$

и

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{2^\mu} a_{2^\mu+\nu} f_{2^\mu+\nu}(x) = \beta \cdot f_{2^\mu+\nu_0}(x), \quad \text{когда} \quad x \leq \frac{\nu_0 - 1}{2^\mu},$$

где α и β некоторые числа зависящие от a_n.

Условимся через $C, C_1, C_\gamma, \ldots$ обозначать постоянные, зависящие только от своих индексов. Значения этих постоянных в разных формулах могут быть разными. Длину отрезка I обозначим через $|I|$.

Доказательство леммы 2.1. Сначала докажем соотношение (2.3). Вместо $\sum_{\{n\} \subset I} a_n f_n(x)$ будем писать $\sum_n a_n f_n(x)$, предполагая $a_n = 0$, когда $\{n\} \not\subset I$.

Допустим

$$(2.10) \qquad \int_I (S^*(x))^p dx = 1, \quad \text{где} \quad S^*(x) = \sup_N \left| \sum_{n \leq N} a_n f_n(x) \right|,$$

и докажем, что

$$(2.11) \qquad \int_0^{\frac{æ}{2^k}} (S^*(x))^p dx \leq C.$$

Положим для $n_m = 2^m + æ \cdot 2^{m-k} + 1$,

$$\sigma_m(x) = |a_{n_m} f_{n_m}(x)|, \quad \text{и} \quad S_m^*(x) = \max_N \left| \sum_{\{n\} = m, n \leq N} a_n f_n(x) - a_{n_m} f_{n_m}(x) \right|.$$

Очевидно, что

$$\sigma_m(x) \le 2 \cdot S^*(x), \quad S^*_m(x) \le 2 \cdot S^*(x), \quad \text{когда } x \in [0,1] \tag{2.12}$$

и

$$S^*(x) \le \sum_{m=k}^{\infty} \sigma_m(x) + \sum_{m=k}^{\infty} S^*_m(x) =: \Sigma_1(x) + \Sigma_2(x), \quad \text{когда } x \in [0,1].$$

Мы докажем, что

$$\int_0^{\frac{x}{2^k}} \Sigma_i^p(x)dx \le C_p, \quad i = 1,2. \tag{2.13}$$

Пусть I_m- слева первый интервал ранга m, который содержится в I, а I^*_m-его правая половина. Заметим, что отрезки I^*_m не пересекаются и их объединение есть отрезок I. Заметим также, что функции $\sigma_m(x)$ и $S^*_m(x)$, $m \ge k$, являются модулями линейных на отрезке I^*_m функций. Действительно, $\sigma_m(x)$-модуль от линейной на I^*_m функции $a_{n_m} f_{n_m}(x)$. А для $S^*_m(x)$, в силу Предложения 2.5 имеем, что для любого N существует α_N, такое что

$$\sum_{|n|=m, n\le N} a_n f_n(x) - a_{n_m} f_{n_m}(x) = \alpha_N \cdot f_{n_m+1}(x) \quad \text{для} \quad x \le \frac{x}{2^k} + \frac{1}{2^m}. \tag{2.14}$$

Отсюда имеем

$$S^*_m(x) = |f_{n_m+1}(x)| \max_N |\alpha_N|, \quad \text{для} \quad x \le \frac{x}{2^k} + \frac{1}{2^m}. \tag{2.15}$$

Через A_m и B_m обозначим интегральные средние на I^*_m функций $\sigma_m(x)$ и $S^*_m(x)$, соответственно, т.е.

$$A_m = \frac{1}{|I^*_m|}\int_{I^*_m} \sigma_m(x)dx, \quad \text{и} \quad B_m = \frac{1}{|I^*_m|}\int_{I^*_m} S^*_m(x)dx, \quad m \ge k. \tag{2.16}$$

Из того, что $\sigma_m(x)$ и $S^*_m(x)$, $m \ge k$, являются модулями линейных на отрезке I^*_m функций, получаются

$$A_m \sim \max_{x\in I^*_m} \sigma_m(x) \quad \text{и} \quad B_m \sim \max_{x\in I^*_m} S^*_m(x). \tag{2.17}$$

Из (2.16), (2.12) и (2.10), с применением неравенства Гелдера, имеем

$$\sum_{m\ge k} A^p_m |I^*_m| = \sum_{m\ge k} |I^*_m| \cdot |I^*_m|^{-p} \left(\int_{I^*_m} \sigma_m(x)dx\right)^p \le$$

$$\sum_{m\ge k} |I^*_m|^{1-p} \int_{I^*_m} \sigma^p_m(x)dx \cdot |I^*_m|^{p-1} \le 2^p \sum_{m\ge k} \int_{I^*_m} (S^*(x))^p dx = 2^p.$$

Аналогично получаем

$$\sum_{m\ge k} B^p_m |I^*_m| \le 2^p. \tag{2.18}$$

Сначала докажем неравенство (2.13) для $i = 2$ и $p \leq 1$. В этом случае, последовательно применяя (2.9), (2.12) и (2.10) получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2^k}} \Sigma_2^p(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2^k}} \left(\sum_m S_m^*(x)\right)^p dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2^k}} \sum_m (S_m^*(x))^p \, dx \leq$$

$$C_p \cdot \sum_m \int_{I_m^*} (S_m^*(x))^p \, dx \leq C_p \cdot \int_I (S^*(x))^p \, dx \leq C_p.$$

Аналогично получается неравенство (2.13), когда $i = 1$ и $p \leq 1$.

Перейдем к получению оценок (2.13), когда $p > 1$. Без ограничения общности можем считать, что суммы Σ_i, $i = 1, 2$, конечны, т. е. $\Sigma_1 = \sum_{m=k}^{k_1} \sigma_m$ и $\Sigma_2 = \sum_{m=k}^{k_1} S_m^*$.

Через I_m^j, $k \leq m \leq k_1$, обозначим двоичные отрезки ранга $m+1$, где правый конец отрезка I_m^1 совпадает с левым концом отрезка I, а для $j > 1$ правый конец отрезка I_m^j совпадает с левым концом I_m^{j-1}.

Для $x \in [0, \frac{\pi}{2^k}]$ и $m \geq k$ обозначим

$$\varphi_m(x) := B_{m,j} := \frac{1}{|I_m^j|} \int_{I_m^j} S_m^*(t)dt, \quad \text{когда} \quad x \in I_m^j. \tag{2.19}$$

Поскольку $S_m^*(x)$-модуль от линейной на I_m^j функции, то (здесь и далее полагается $q = 2/7$) из (2.15), (2.17) и (2.9) имеем

$$S_m^*(x) \leq C \cdot \varphi_m(x) \leq C \cdot B_{m,j} \leq C \cdot q^{j-1} \cdot B_{m,1} \leq C \cdot q^{j-1} \cdot B_m, \quad \text{когда} \quad x \in I_m^j. \tag{2.20}$$

Обозначим $J_m = I_m^1 \setminus I_{m+1}^1$, когда $m = k, k+1, \ldots, k_1 - 1$, и $J_{k_1} = I_{k_1}^1$. Тогда

$$|J_m| = \frac{1}{2}|I_m^1| = 2^{-m-1} = |I_m^*|. \tag{2.21}$$

Нетрудно заметить, что если $x \in J_m$, то из (2.20) следует

$$\Sigma_2(x) \leq C \cdot \sum_{m=k}^{k_1} \varphi_m(x) \leq C \cdot (B_k + \cdots + B_m + B_{m+1} \cdot q + \cdots + B_{k_1} \cdot q^{k_1 - m}).$$

Поэтому

$$\int_{I_k^1} (\Sigma_2(x))^p dx = \sum_{j=k}^{k_1} \int_{J_m} (\Sigma_2(x))^p dx \leq \tag{2.22}$$

$$C_p \cdot \sum_{m=k}^{k_1} |J_m| (\sum_{\nu=k}^{m} B_\nu)^p + C_p \cdot \sum_{m=k}^{k_1} |J_m| (\sum_{\nu=m+1}^{k_1} B_\nu \cdot q^{\nu-m})^p =: C_p(\Gamma_1 + \Gamma_2).$$

Пусть $q_1 \in (0, 1)$, такое что $q_1^{-p} < 2$. Тогда для Σ_1 получим

$$\Gamma_1 = C_p \sum_{m=k}^{k_1} |J_m| \left(\sum_{\nu=k}^{m} B_\nu q_1^{\nu-k} q_1^{k-\nu}\right)^p \leq C_p \sum_{m=k}^{k_1} |J_m| \sum_{\nu=k}^{m} B_\nu^p q_1^{p(\nu-k)} \left(\sum_{\nu=k}^{m} q_1^{\frac{p(k-\nu)}{p-1}}\right)^{p-1}$$

Учитывая, что в последней сумме $\nu \geq k$ и $q_1 < 1$, имеем

$$\left(\sum_{\nu=k}^{m} q_1^{\frac{p(k-\nu)}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C_p \cdot q_1^{p(k-m)}.$$

Поэтому, для Γ_1 имеем

$$(2.23) \qquad \Gamma_1 \leq C_p \sum_{m=k}^{k_1} |J_m| \sum_{\nu=k}^{m} B_\nu^p \cdot q_1^{p(\nu-m)} = C_p \sum_{\nu=k}^{k_1} B_\nu^p \sum_{m=\nu}^{k_1} |J_m| \cdot q_1^{p(\nu-m)}.$$

Так как $|J_{m+1}| = \frac{1}{2}|J_m|$ и $q_1^{-p} < 2$, то $|J_{m+1}| \cdot q_1^{p(\nu-m-1)} < \gamma \cdot |J_m| \cdot q_1^{p(\nu-m)}$, для некоторого $\gamma < 1$. Поэтому из (2.23) и (2.18) имеем

$$(2.24) \qquad \Gamma_1 \leq C_p \sum_{\nu=k}^{k_1} B_\nu^p |J_\nu| < C_p, \quad \text{когда} \ \ p > 1.$$

Оценим Γ_2, когда $p > 1$. Обозначим $q_1 = 0.9$ и напомним, что $q = 2/7$. Тогда, учитывая что $q \cdot q_1^{-1} < 1$, из (2.22) с применением неравенства Гельдера получим

$$(2.25) \qquad \Gamma_2 = C_p \sum_{m=k}^{k_1} |J_m| \left(\sum_{\nu=m+1}^{k_1} B_\nu \cdot (q_1^{-1} \cdot q)^{\nu-m} \cdot q_1^{\nu-m}\right)^p \leq$$

$$C_p \sum_{m=k}^{k_1} |J_m| \left(\sum_{\nu=m+1}^{k_1} B_\nu^p \cdot (q_1^{-1} \cdot q)^{p(\nu-m)}\right) \cdot \left(\sum_{\nu=m+1}^{k_1} q_1^{(\nu-m)\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1} \leq$$

$$C_p \sum_{m=k}^{k_1} |J_m| \sum_{\nu=m+1}^{k_1} B_\nu^p \cdot (q_1^{-1} \cdot q)^{p(\nu-m)} = C_p \sum_{\nu=k+1}^{k_1} B_\nu^p \sum_{m=k}^{\nu-1} |J_m| (q_1^{-1} \cdot q)^{p(\nu-m)}$$

Из (2.25) и (2.21) следует

$$\Gamma_2 \leq C_p \sum_{\nu=k+1}^{k_1} B_\nu^p \cdot |J_\nu| \sum_{m=k}^{\nu-1} 2^{\nu-m} (q_1^{-1} \cdot q)^{p(\nu-m)}.$$

Учитывая, что $2 \cdot (q_1^{-1} \cdot q)^p < 2 \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{2}{7} < 1$, из (2.25), (2.21) и (2.18) получим

$$(2.26) \qquad \Gamma_2 \leq C_p \sum_{\nu=k}^{k_1} B_\nu^p |I_\nu^*| \leq C_p.$$

Из (2.26), (2.24) и (2.22) получаем

$$(2.27) \qquad \int_{I_k^1} (\Sigma_2(x))^p dx \leq C_p, \quad \text{когда} \ \ p > 1.$$

Очевидно, из (2.20) имеем

$$\Sigma_2(x) \leq C \cdot \sum_{m=k}^{k_1} \varphi_m(x) \leq C \cdot q^{j-1} \sum_{m=k}^{k_1} \varphi_m\left(x + \frac{j}{2^{k+1}}\right), \quad \text{когда} \ \ x \in I_k^j.$$

Следовательно, получаем

$$\int_{I^j_k} (\Sigma_2(x))^p dx \le C_p \cdot q^{j-1} \int_{I^1_k} (\Sigma_2(x))^p dx.$$

Отсюда и из (2.27) получим (2.13) для $i = 2$.

В случае $i = 1$ неравенство (2.13) доказывается чуть проще. В этом случае нет необходимости соотношений типа (2.14), (2.15), поскольку $\sigma_m(x)$ одна функция о которой известно, что (см. (2.5))

$$\max_{x \in I^j_m} \sigma_m(x) \le \left(\frac{2}{7}\right)^{j-1} \cdot \sigma_m\left(\frac{æ}{2^k}\right) \le C \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{j-1} \cdot A_m,$$

где отрезки I^j_m те же, что в соотношении (2.20). Второе неравенство следует из того, что $æ > 0$ (в противном случае нечего доказывать) и поэтому (см. Предложение 2.2 и (2.16), (2.17))

$$\sigma_m\left(\frac{æ}{2^k}\right) \le \max_{x \in I_m} \sigma_m(x) = \max_{x \in I^*_m} \sigma_m(x) \le C \cdot A_m.$$

Отсюда, рассуждениями, аналогичными рассуждениям при доказательстве (2.27), получим

$$\int_0^{\frac{æ}{2^k}} (\Gamma_1(x))^p dx \le C_p, \quad \text{для} \quad p > 0.$$

Тем самым доказано неравенство (2.11). Аналогично доказывается, что

$$\int_{\frac{æ+1}{2^k}}^1 (S^*(x))^p dx < C_p,$$

которое вместе с (2.11) доказывают неравенство (2.3). Неравенство (2.4) доказывается аналогично. Лемма 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Сначала убедимся в справедливости неравенства (2.1). Поскольку $\left[\frac{æ}{2^k}, \frac{æ+1}{2^k}\right] \ne [0,1]$, то либо $æ > 0$ либо $æ < 2^k$. Рассмотрим случай, когда $æ > 0$. Для $m > k$ и $l \le æ \cdot 2^{m-k}$ выберем a_{2^m+l} так, чтобы

$$a_{2^m+l} f_{2^m+l}\left(\frac{æ}{2^k}\right) = \frac{1}{l}, \quad \text{когда} \quad l = 1, 2, \dots, æ \cdot 2^{m-k}. \tag{2.28}$$

Убедимся, что для любого $C > 0$ при достаточно большом m ряд $\sum_n a_n f_n(x) := \sum_{l=1}^{æ \cdot 2^{m-k}} a_{2^m+l} f_{2^m+l}(x)$ удовлетворяет (2.1). Во первых

$$\left\| \sup_N \left| \sum_{n \le N} a_n f_n(x) \right| \right\|^p_{L_p(I)} > \int_{\frac{æ}{2^k}}^{\frac{æ}{2^k}+\frac{1}{2^m}} \left| \sum_{l=1}^{æ \cdot 2^{m-k}} a_{2^m+l} f_{2^m+l}(x) \right|^p dx > C_p \frac{m-k}{2^m}. \tag{2.29}$$

С другой стороны (см. (2.28) и (2.6))

$$\left\|\left\{\sum_n a_n^2 f_n^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_p(I)}^p \le \int_{\frac{\text{æ}}{2^k}}^{\frac{\text{æ}}{2^k}+\frac{1}{2^m}} \left(\sum_l a_{2^m+l}^2 f_{2^m+l}^2(x)\right)^{\frac{p}{2}} dx \sum_{\eta=0}^{\infty} q^{\eta p} \le \tag{2.30}$$

$$C_p \cdot 2^{-m}\left(\sum_l a_{2^m+l}^2 f_{2^m+l}^2\left(\frac{\text{æ}}{2^k}\right)\right)^{\frac{p}{2}} < C_p \cdot 2^{-m}.$$

При достаточно большом m из (2.29) и (2.30) следует (2.1).

Случай $\text{æ} < 2^k$ доказывается аналогично. Только в сумме $\sum_n a_n f_n(x)$ будут участвовать n с условиями $[n] = m$, $\{n\}$ находится правее I.

Докажем соотношение (2.2). Опять рассмотрим только случай $\text{æ} > 0$. Для $m > k$ и $l \le \text{æ} \cdot 2^{m-k}$ выберем a_{2^m+l} так, чтобы

$$a_{2^m+l} f_{2^m+l}\left(\frac{\text{æ}}{2^k}\right) = (-1)^l, \quad \text{когда} \quad l = 1, 2, \ldots, \text{æ} \cdot 2^{m-k}. \tag{2.31}$$

Убедимся, что для любого $C > 0$ при достаточно большом m ряд $\sum_n a_n f_n(x) := \sum_{l=1}^{\text{æ}\cdot 2^{m-k}} a_{2^m+l} f_{2^m+l}(x)$ удовлетворяет (2.2).

Из Предложения 2.4 и (2.31) следует, что

$$\sup_{n \le N}\left|\sum_{n \le N} a_n f_n(x)\right| = |a_{2^m+1} f_{2^m+1}(x)|, \quad \text{когда} \quad x \ge \frac{\text{æ}}{2^k}.$$

Поэтому

$$\left\|\sup_N \left|\sum_{n \le N} a_n f_n(x)\right|\right\|_{L_p(I)}^p < \int_I |a_{2^m+1} f_{2^m+1}(x)|^p dx < C_p \cdot 2^{-m}. \tag{2.32}$$

С другой стороны

(2.33)

$$\int_I \left(\sum_n a_n^2 f_n^2(x)\right)^{\frac{p}{2}} dx > \int_{\frac{\text{æ}}{2^k}}^{\frac{\text{æ}}{2^k}+\frac{1}{2^m}} \left(\sum_{l=1}^{\text{æ}2^{m-k}} a_{2^m+l}^2 f_{2^m+1}^2(x)\right)^{\frac{p}{2}} dx > C_p(\text{æ}2^{m-k})^{\frac{p}{2}} 2^{-m}.$$

Из (2.32) и (2.33), при достаточно большом m, следует (2.2). Теорема 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Допустим

$$I = \left[\frac{\text{æ}}{2^k}, \frac{\text{æ}+1}{2^k}\right] \quad \text{и} \quad \|S^*(\cdot)\|_{L_p(I)} = 1, \quad \text{где} \quad S^*(x) = \sup_N \left|\sum_{n \le N} a_n \chi_n(x)\right|$$

Пусть $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, те номера, для которых

$$\Delta_{n_i} \bigcap I \ne \emptyset, \quad \text{и} \quad \Delta_{n_i} \not\subset I, \quad \text{где} \quad \Delta_n = \operatorname{supp}\chi_n.$$

Отметим, что таких n_i ровно $k+1$ штук. Если учесть, что функции $a_{n_i}\chi_{n_i}(x)$ принимают постоянные значения на I, то получим

$$\max_{x\in I}|a_{n_i}\chi_{n_i}| \le 2\min_{x\in I} S^*(x) \le 2S^*(x) \quad \text{и} \quad \max_{l}\left|\sum_{i=1}^{l} a_{n_i}\chi_{n_i}(x)\right| \le S^*(x), \quad \text{для} \quad x\in I.$$

Следовательно, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x) \le 4(k+1)\cdot(S^*(x))^2 + \sum_{n:\Delta_n\subset I} a_n^2 f_n^2(x) \quad x\in I \tag{2.34}$$

и

$$S_1^*(x) := \sup_N \left|\sum_{\Delta_n\subset I: n\le N} a_n\chi_n(x)\right| \le 2\cdot S^*(x), \quad x\in I. \tag{2.35}$$

Учитывая, что

$$\left\|\sum_{n:\Delta_n\subset I} a_n^2\chi_n^2(\cdot)\right\|_{L_p(I)} \sim_p \|S_1^*(\cdot)\|_{L_p(I)},$$

из (2.34), (2.35) получим $\int_I\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right)^{\frac{p}{2}}dx \le C_{p,k}\int_I (S^*(x))^p dx$.

Аналогично доказывается неравенство $\int_I (S^*(x))^p dx \le C_{p,k}\int_I\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right)^{\frac{p}{2}}dx$. Тем самым доказали следующее соотношение

$$\int_I (S^*(x))^p dx \sim_{p,k} \int_I\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right)^{\frac{p}{2}} dx,$$

причем постоянные эквивалентности зависят не от самой I, а от ранга I. Теорема доказана.

В теоремах 2.1 и 2.3, вообще говоря, мажоранту ряда нельзя заменить суммой ряда. Действительно, известно, что в пространстве $L[0,1]$ не существует безусловных базисов (см. [11]). Отсюда следует, что существуют функции $\phi,\psi\in L_1$, такие, что

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(\cdot)\right)^{\frac{1}{2}} \notin L_1, \quad \text{где} \quad a_n = \int_0^1 \phi(x) f_n(x)dx.$$

и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\chi_n^2(\cdot)\right)^{\frac{1}{2}} \notin L_1, \quad \text{где} \quad b_n = \int_0^1 \psi(x)\chi_n(x)dx.$$

Следовательно

$$\|\sum_n a_n\varphi_n\|_1 \not\sim \|(\sum_n a_n^2\varphi_n^2)^{\frac{1}{2}}\|_1,$$

где $\{\varphi_n\}$-система Хаара или Франклина.

В случае $p > 1$, из безусловной базисности системы Хаара в пространстве L_p и конструкции функций Хаара, для любого двоичного интервала I имеем

$$\left\| \sum_{\Delta_n \subset I} a_n \chi_n \right\|_{L_p(I)} \sim_p \left\| \left(\sum_{\Delta_n \subset I} a_n^2 \chi_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p(I)} . \tag{2.36}$$

Интересно было бы выяснить, имеет ли аналог соотношения (2.36) для системы Франклина. Для установления такой эквивалентности необходимо (и достаточно) установить аналог соотношений (2.3), (2.4) для суммы $\sum_{\langle n \rangle \subset I} a_n f_n(x)$.

Abstract. In this paper we prove that the majorant of partial sums and the Paley function of Franklin series have equivalent norms in the space $L_p(I)$, $p > 0$, provided that the "peak" intervals of Franklin functions with non-vanishing coefficients lie in I. Examples of series emphasizing that this condition is essential are also given.

Список литературы

[1] Ph. Franklin, "A set of continuos orthogonal functions", Math. Ann. **100**, 522 – 528 (1928).
[2] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math. **23**, 141 – 157 (1963).
[3] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", Studia Math. **27**, 289 – 323 (1966).
[4] S. V. Bochkarev, "Some inequalities for the Franklin series", Anal. Math. **1**, 249 – 257 (1975).
[5] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, АФЦ (1999).
[6] P. Sjolin, "Convergence almost everywhere of spline expansions in Hardy spaces", In: Topics in modern harmonic analysis, (Turin/Milan, 1982), Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Rome, 645 – 651 (1983).
[7] P. Sjolin, J. O. Stromberg, "Basis properties of Hardy spaces", Ark. Mat. **21**, 111 – 125 (1983).
[8] Г. Г. Геворкян, "Некоторые теоремы о безусловной сходимости и мажоранте рядов Франклина и их применение к пространствам $Re(H^p)$." Тр. МИАН СССР, **190**, 49 – 74 (1989). Translation: G. G. Gevorkian, *Some theorems on unconditional convergence and a majorant of Franklin series and their application to the spaces $Re(H^p)$*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 49 – 76 (1992).
[9] Г. Г. Геворкян, "О рядах по системе Франклина", Anal. Math., **16**, 87 – 114 (1990).
[10] Г. Г. Геворкян, "Неограниченность оператора сдвига по системе Франклина в пространстве L_1", Мат. Заметки, **38**, no. 4, 523 – 533 (1985).
[11] A. Pelczynski, "Projections in certain Banach spaces", Studia Math. **19**, 209 – 228 (1960).

Поступила 18 мая 2016