Известия НАН Армении. Математика, том 52, н. 1, 2017, стр. 26-37.

ТОНКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ХАЙЛАША-СОБОЛЕВА M^p_α ПРИ $p > 0$, II. АППРОКСИМАЦИЯ ЛУЗИНА

С. А. БОНДАРЕВ, В. Г. КРОТОВ

Белорусский государственный университет
E-mails: *bsa0393@gmail.com*, *krotov@bsu.by*

Аннотация. В работе изучается аппроксимация Лузина функций из классов Хайлаша–Соболева $M^p_\alpha(X)$ при $p > 0$. Доказано, что для $f \in M^p_\alpha(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют открытое множество $O_\varepsilon \subset X$, мера которого меньше ε (в качестве меры можно взять соответствующие емкость или вместимость Хаусдорфа), и приближающая функция f_ε такие, что $f = f_\varepsilon$ на $X \setminus O_\varepsilon$. При этом исправляющая функция f_ε является регулярной (принадлежит исходному пространству $M^p_\alpha(X)$ классу и является локально гельдеровской) и приближает исходную функцию в метрике пространства $M^p_\alpha(X)$.

MSC2010 number: 46E35, 43A85.

Ключевые слова: Метрическое пространство с мерой, условие удвоения, класс Соболева, аппроксимация Лузина, емкость, внешняя мера, мера и размерность Хаусдорфа.

1. Введение

Наша работа является непосредственным продолжением работы [1]. Мы используем результаты из [1] для изучения свойства аппроксимации в смысле Лузина для классов Хайлаша–Соболева M^p_α при $p > 0$. При этом мы полностью придерживаемся обозначений и определений из [1].

Теорема Лузина утверждает, что любая измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция f обладает C-свойством — f является непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры. Точнее, для любой измеримой на $\mathbb{R}^n$ функции f и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие функция $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ и открытое множество $O_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, для которых

$$f(x) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus O_\varepsilon, \quad \mu(O_\varepsilon) < \varepsilon$$

(μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$).

Если функция f является более регулярной в том или ином смысле, то исправляющая функция φ может обладать дополнительными свойствами гладкости и аппроксимирующими свойствами.

Для классов Хайлаша–Соболева M_α^p при $p \geq 1$ такие вопросы исследовались в [2]–[5]. Мы распространим результаты этих работ на случай $p > 0$.

2. Основная теорема

Приведем определения, необходимые для формулировки основного результата. Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с регулярной борелевской мерой μ и метрикой d. $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ — шар с центром в точке $x \in X$, радиуса $r > 0$.

Будем предполагать, что мера μ удовлетворяет условию удвоения с показателем $\gamma > 0$, т.е. для некоторой постоянной a_μ выполнено неравенство

$$\mu(B(x, R)) \leq a_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu(B(x, r)), \quad x \in X,\ 0 < r \leq R.$$

Для шара $B \subset X$ обозначаем r_B и x_B соответственно его радиус и центр, кроме того, λB — шар, концентрический с B, радиуса λr_B. Кроме того, пусть

$$f_B = \fint_B f\, d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f\, d\mu$$

Через c всюду обозначаем различные положительные постоянные, зависящие, возможно, от определенных параметров, но эти зависимости для нас несущественны. Кроме того, запись $A \lesssim B$ всегда будет означать, что $A \leq cB$.

Неотрицательную функцию ν, определенную на σ-алгебре борелевских множеств из X, будем называть внешней мерой, если она монотонна и субаддитивна с некоторой постоянной a_ν, то есть для любой последовательности борелевских множеств E_k выполнено неравенство

$$\nu\left(\bigcup_k E_k\right) \leq a_\nu \sum_k \nu(E_k).$$

Кроме того, внешнюю меру будем называть регулярной в нуле, если для любого множества $E \subset X$ с $\nu(E) = 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $O \supset E$, для которого $\nu(O) < \varepsilon$.

Пусть задана возрастающая функция $h : (0, 1] \to (0, 1]$, $h(+0) = 0$. Такие функции будем называть измеряющими. Мы будем использовать следующее условие, связывающее исходную меру μ и внешнюю меру ν: существует такая постоянная c_ν, что выполнено неравенство

$$\nu(B) \leq c_\nu \frac{\mu(B)}{h(r_B)} \quad \text{для всех шаров} \quad B \subset X,\ r_B \leq 1. \tag{2.1}$$

Напомним, что для измеряющей функции h и $0 < R \le 1$ классическая и модифицированная (h, R)-вместимость Хаусдорфа множества $E \subset X$ вводится как

$$H_R^h(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} h(r_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i), \quad r_i < R\right\},$$

$$\mathcal{H}_R^h(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(B(x_i, r_i))}{h(r_i)} : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i), \quad r_i < R\right\}$$

соответственно (точная нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества E счетными семействами шаров). Величины

$$H^h(E) = \lim_{R\to+0} H_R^h(E), \quad \mathcal{H}^h(E) = \lim_{R\to+0} \mathcal{H}_R^h(E)$$

называются классической и модифицированной h-мерой Хаусдорфа для E соответственно. Для $h(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, пишем H^α и $\mathcal{H}^\alpha$ вместо H^{t^α} и $\mathcal{H}^{t^\alpha}$. В случае классических мер также можно определить размерность Хаусдорфа

$$\dim_H E = \inf\left\{s : H_1^s(E) = 0\right\}.$$

Введем класс Хайлаша–Соболева $M_\alpha^p(X)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$, как множество

$$M_\alpha^p(X) = \{f \in L^p(X) : D_\alpha[f] \cap L^p(X) \ne \varnothing\},$$

$$\|f\|_{M_\alpha^p(X)} = \|f\|_{L^p(X)} + \inf\left\{\|g\|_{L^p(X)} : g \in D_\alpha[f] \cap L^p(X)\right\},$$

где через $D_\alpha[f]$ обозначен класс всех неотрицательных μ-измеримых функций g, для каждой из которых существует такое множество $E \subset X$, $\mu(E) = 0$, что

$$|f(x) - f(y)| \le \left[d(x,y)\right]^\alpha [g(x) + g(y)], \quad x, y \in X \setminus E.$$

Классы $M_\alpha^p(X)$ порождают емкости

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf\left\{\|f\|_{M_\alpha^p(X)}^p : f \in M_\alpha^p(X), f \ge 1 \text{ в окрестности } E \subset X\right\}.$$

Наконец, для $\alpha > 0$ определим классы Гельдера

$$H_\alpha(X) = \left\{\phi \in C(X) : \|\phi\|_{H_\alpha(X)} = \sup_{x\ne y} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{[d(x,y)]^\alpha} < +\infty\right\}.$$

Наш основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 2.1. *Пусть $0 < \beta \le \alpha \le 1$, $0 < p < \gamma/\alpha$ и задана функция $f \in M_\alpha^p(X)$. Пусть также задана внешняя мера ν, регулярная в нуле и удовлетворяющая условию (2.1) с функцией $h(t) = t^{(\alpha-\beta)p}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют функция f_ε и открытое множество $O \subset X$, такие, что*

1) $\nu(O) < \varepsilon$,

2) $f = f_\varepsilon$ *на* $X \setminus O$,

3) $f_\varepsilon \in M^p_\alpha(X)$ *и* $f_\varepsilon \in H_\beta(B)$ *для любого шара* $B \subset X$,

4) $\|f - f_\varepsilon\|_{M^p_\alpha(X)} < \varepsilon$.

В качестве примеров внешних мер, удовлетворяющих условию теоремы, можно взять $\nu = \mathrm{Cap}_{(\alpha-\beta),p}$ и $\nu = \mathcal{H}_1^{(\alpha-\beta)p}$, а также $\nu = H_1^{\gamma-(\alpha-\beta)p}$ (при условии $\mu(X) < \infty$).

При $\beta = \alpha = 1$, $p > 1$ подобный результат был ранее получен П.Хайлашем в [2], где вместо 1) утверждалось, что $\mu(O) < \varepsilon$, а в 3) было $f_\varepsilon \in H_1(X)$. Случай $\beta < \alpha = 1$ теоремы 2.1 существенно сложнее, он был изучен в работе [3] при $p > 1$ и в [4] при $p = 1$. В работе [5] теорема 2.1 была доказана для $p > 1$, $0 < \alpha \leq 1$.

Следствие 2.1. Пусть $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$, $0 < p < \gamma/\alpha$ *и задана функция* $f \in M^p_\alpha(X)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют функция* f_ε *и открытое множество* $O \subset X$, *такие, что*

1) $\mathrm{Cap}_{(\alpha-\beta),p}(O) < \varepsilon$, $H_1^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(O) < \varepsilon$, $\mathcal{H}_1^{(\alpha-\beta)p}(O) < \varepsilon$

2) $f = f_\varepsilon$ *на* $X \setminus O$,

3) $f_\varepsilon \in M^p_\alpha(X)$ *и* $f_\varepsilon \in H_\beta(B)$ *для любого шара* $B \subset X$,

4) $\|f - f_\varepsilon\|_{M^p_\alpha(X)} < \varepsilon$.

Во время подготовки нашей работы к печати появился препринт [6], в котором также доказано утверждение следствия 2.1 для модифицированной вместимости Хаусдорфа. Методы [6] отличны от наших.

Результаты нашей работы докладывались на семинаре "Функциональные пространства" Университета Фридриха Шиллера (Иена, Германия, 19 декабря 2014 г. и 3 декабря 2015 г.), на Международной конференции "Функциональные пространства и теория аппроксимации функций", посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского (Москва, 28 мая 2015 г., и на Международной конференции «Harmonic Analysis and Approximations, VI» (Цахкадзор, Армения, 13 сентября 2015 г.).

При доказательстве теоремы 2.1 мы следуем схеме работ [3, 5]. Работу с несуммируемыми функциями обеспечивают результаты работ [1] и [9]. По существу, задача разбивается на две части. С одной стороны нам нужны квалифицированные оценки массивности лебеговых множеств некоторых максимальных функций, а с другой — надо уметь продолжать функции с этих множеств, сохраняя определенные условия гладкости. Для оценки исключительных множеств будем использовать результаты из работ [10] и [1]. При этом важно использование некоторого аппроксимирующего аппарата — при $p \geq 1$ эту роль выполняют средние Стеклова, для $p \in (0, 1)$ эта роль передается наилучшим L^p-приближениям постоянными на шарах $B \subset X$ [1]. Для продолжения функций применяется аналог конструкции Уитни, предложенный в [3] при рассмотрении аналогичной задачи для частного случая $\alpha = 1$.

3. Вспомогательные утверждения

Для доказательства основной теоремы нам понадобится ряд результатов, большинство из которых известны при $p > 1$.

Лемма 3.1 ([1], лемма 9). *Пусть $E \subset X$, $0 < \alpha \leq 1$, $\gamma > \alpha p$. Тогда:*

1) емкость $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$ является внешней мерой и

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf \left\{ \mathrm{Cap}_{\alpha,p}(O) : E \subset O, O - \text{открыто} \right\}.$$

2) $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(B(x,r)) \lesssim r^{-\alpha p}\mu(B(x,r))$ для $x \in X$, $0 < r \leq 1$,

3) при $0 < \beta \leq \alpha$ из $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ следует $\mathrm{Cap}_{\beta,p}(E) = 0$.

Пусть

$$A_p(f, B) = \inf_I \left(\fint_B |f(y) - I|^p \, d\mu(y) \right)^{1/p}, \quad p > 0, \tag{3.1}$$

тогда существует число $I_B^{(p)} f$ [9, лемма 3]), реализующее точную нижнюю границу в (3.1).

Техническим средством для доказательства основной теоремы является максимальный оператор $A_{\alpha,R}^{(p)} f$. Определим его следующим образом

$$A_{\alpha,R}^{(p)} f(x) = \sup_{B \ni x, r_B < R} r_B^{-\alpha} A_p(f, B),$$

При $R = \infty$ вместо $A_{\alpha,\infty}^{(p)} f$ будем писать $A_\alpha^{(p)} f$.

Лемма 3.2 ([10]). *Пусть $p > 0$, $0 \leq \beta < \alpha$, а мера μ и внешняя мера ν связаны условием (2.1) с функцией $h(t) = t^{(\alpha-\beta)p}$. Тогда для $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ справедливо неравенство*

$$\int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu\{A_\beta^{(p)} f > \lambda\} \, d\lambda \lesssim \|A_\alpha^{(p)} f\|^p_{L^p(X)}.$$

Лемма 3.3 ([9], лемма 3). *Пусть $f \in L^p(X)$, $p > 0$, $B_1, B_2 \subset X$ — шары, причем $r_{B_1} < r_{B_2}$ и $B_1 \subset B_2$. Тогда*

$$|I^{(p)}_{B_1} f - I^{(p)}_{B_2} f| \lesssim A_p(f, B_1) + \left(\frac{r_{B_2}}{r_{B_1}}\right)^{\frac{Q}{p}} A_p(f, B_2).$$

Лемма 3.4. *Пусть $\beta, p > 0$, $f \in L^p(X)$ и точка $x \in X$ такова, что*

$$f(x) = \lim_{r \to +0} I^{(p)}_{B(x,r)} f. \tag{3.2}$$

Тогда

$$|f(x) - I^{(p)}_{B(x,r)} f| \lesssim r^\beta A^{(p)}_\beta f(x).$$

Доказательство. Пусть для краткости $I_k = I^{(p)}_{B(x,2^{-k}r)} f$. Тогда

$$|f(x) - I_0| = \left| \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} [I_k - I_{k+1}] \right| \le \sum_{k=0}^{\infty} |I_k - I_{k+1}|.$$

Далее используем лемму 3.3 для оценки каждого слагаемого в сумме

$$\sum_{k=0}^{\infty} |I_k - I_{k+1}| \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} A_p(f, B(x, 2^{-k} r)) \lesssim A^{(p)}_\beta f(x) \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k} r)^\beta.$$

Утверждение доказано.

Лемма 3.5. [11, лемма 2.5] *Если $f \in M^p_\alpha(X)$, $\phi \in H_\alpha(X)$ и ограничена, то $f\phi \in M^p_\alpha(X)$. Кроме того, если $E \subset X$ и $\phi(x) = 0$ при $x \in X \setminus E$, то для любой функции $g \in D_\alpha(f) \cap L^p$*

$$\left(g\|\phi\|_\infty + |f| \cdot \|\phi\|_{H^\alpha(X)}\right) \chi_E \in D_\alpha(f\phi) \cap L^p.$$

Основным техническим средством для построения разбиений единицы и продолжения функции с сохранением гладкости является конструкция, изложенная в следующих двух леммах.

Лемма 3.6. [3, лемма 5.7] *Пусть $O \subset X$ — открытое множество, $O \ne X$, $\mu(O) < \infty$. Для заданного $C \ge 2$ обозначим $r(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, X \setminus O)}{2C}$. Тогда существует $N \ge 1$ и последовательность $\{x_i\}$ точек из X такие, что*

1) шары $B(x_i, r_i/4)$ попарно не пересекаются, $r_i = r(x_i)$,

2) $\bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i) = O$,

3) $B(x_i, Cr_i) \subset O$,

4) если $x \in B(x_i, Cr_i)$, то $Cr_i \le \operatorname{dist}(x, X \setminus O) \le 3Cr_i$,

5) для любого i существует такое $y_i \in X \setminus O$, что $d(x_i, y_i) < 3Cr_i$,

6) $\sum_{i=1}^\infty \chi_{B(x_i, Cr_i)} \le N$.

Лемма 3.7. [7, лемма 2.16] *Пусть $0 < \alpha \le 1$, O — открытое множество, $\{B(x_i, r_i)\}$ — покрытие O шарами из леммы 3.6 для $C = 5$. Тогда существует такая последовательность функций ϕ_i, что*

1) $\operatorname{supp}\phi_i \subset B(x_i, 2r_i), 0 \le \varphi_i(x) \le 1$,

2) $|\phi_i(x) - \varphi_i(y)| \le cr_i^{-\alpha}[d(x,y)]^\alpha$,

3) $\sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x) = \chi_O(x)$.

4. Доказательство основной теоремы

Сначала сделаем дополнительное предположение – для некоторого $x_0 \in X$

$$\operatorname{supp} f \subset B(x_0, 1) \equiv B_0 \tag{4.1}$$

Доказательство утверждения 1). В силу [1, теорема 3] $\nu(\Lambda) = 0$, где Λ — множество точек $x \in X$, в которых не выполнено (3.2). Поэтому для $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество $L \supset \Lambda$, что $\nu(L) < \varepsilon$. Для $\lambda > 0$ обозначим

$$E_\lambda = \left\{x \in X : \mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(x) > \lambda\right\}.$$

Положим $O = E_\lambda \cup L$ и покажем, что при достаточно большом λ множество O обладает необходимыми свойствами. Легко видеть, что O открыто и $O \subset 2B_0$.

Из леммы 3.2

$$\int_0^\infty \lambda^{p-1}\nu(E_\lambda)\,d\lambda \lesssim \|\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f\|^p_{L^p(X)} < \infty,$$

откуда следует, что $\nu(E_\lambda) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$, кроме того, очевидно, что $\mu(E_\lambda) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$.

Таким образом, утверждение 1) теоремы выполнено. Дополнительно выберем $\lambda > 0$ настолько большим, чтобы

$$\int_O |f|^p\,d\mu + \int_O |\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f|^p\,d\mu < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Доказательство утверждения 2). Пусть $\{B(x_i, r_i)\}$ — покрытие множества O из леммы 3.6 для $C = 5$. Тогда, применяя лемму 3.7, найдем набор функций $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ таких, что

$$\operatorname{supp}\phi_i \subset B(x_i, 2r_i),\ 0 \le \phi_i(x) \le 1,$$
$$|\varphi_i(x) - \phi_i(y)| \lesssim r_i^{-\alpha}[d(x,y)]^\alpha, \quad \sum_{i=1}^\infty \phi_i(x) = \chi_O(x).$$

Определим функцию f_ε равенством

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X \setminus O, \\ \sum\limits_{i=1}^\infty \phi_i(x) I^{r(p)}_{B(x_i, 2r_i)} f, & x \in O \end{cases} \tag{4.3}$$

Утверждение 2 теоремы следует непосредственно из этого определения.

Доказательство утверждения 3). Сперва проведем вспомогательное рассуждение. Пусть $x \in O$, тогда существует такая точка $x^* \in X \setminus O$, что $d(x, x^*) \leq 2\,\mathrm{dist}(x, X \setminus O)$. Поэтому

$$|f_\varepsilon(x^*) - f_\varepsilon(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)\left[f(x^*) - I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)}f\right]\right| \leq \sum_{i \in I_x} |f(x^*) - I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)}f|,$$

где $I_x = \{i : x \in \mathrm{supp}\,\phi_i\}$.

Заметим, что в точке $x^* \in X \setminus O$ выполнено соотношение (3.2), и $B(x_i, 2r_i) \subset B(x^*, 40r_i)$ для любого $i \in I_x$. Поэтому в силу лемм 3.3 и 3.4

$$|f(x^*) - I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)}f| \leq |f(x^*) - I^{(p)}_{B(x^*,40r_i)}f| + |I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)}f - I^{(p)}_{B(x^*,40r_i)}f| \lesssim r_i^\beta A^{(p)}_\beta f(x^*).$$

Так как в I_x не более N слагаемых и $A^{(p)}_\beta f(x^*) \leq \lambda$ (так как $x^* \in X \setminus O$), то

$$(4.4)\qquad |f_\varepsilon(x^*) - f_\varepsilon(x)| \lesssim \sum_{i \in I_x} r_i^\beta A^{(p)}_\beta f(x^*) \lesssim [d(x, x^*)]^\beta A^{(p)}_\beta f(x^*) \lesssim \lambda\,[d(x, x^*)]^\beta.$$

Дальнейшее доказательство того, что $f_\varepsilon \in H^\beta(X)$, проводится точно так же, как и при $p > 1$ в работе [5], с той лишь разницей, что операторы S_β заменяются на операторы $A^{(p)}_\beta$. Для полноты повторим это рассуждение здесь. Рассмотрим три возможных случая расположения точек $x, y \in X$.

Случай 1. Пусть $x, y \in X \setminus O$. Запишем очевидное неравенство

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \leq |f(y) - I^{(p)}_{B(y,d(x,y))}f| + |f(x) - I^{(p)}_{B(x,2d(x,y))}f| +$$
$$+ |I^{(p)}_{B(y,d(x,y))}f - I^{(p)}_{B(x,2d(x,y))}f|.$$

Из леммы 3.4 следует, что первые два слагаемых мажорируются величиной

$$c\,[d(x,y)]^\beta\left[A^{(p)}_\beta f(x) + A^{(p)}_\beta f(y)\right].$$

Третье слагаемое также оценивается сверху этой же величиной в силу леммы 3.3. Таким образом, для $x, y \in X \setminus O$ выполнено

$$(4.5)\qquad |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \lesssim [d(x,y)]^\beta\left[A^{(p)}_\beta f(x) + A^{(p)}_\beta f(y)\right] \lesssim \lambda\,[d(x,y)]^\beta$$

Случай 2. Пусть $x, y \in O$. Введем обозначение

$$(4.6)\qquad d_0 = \max\{\mathrm{dist}(x, X \setminus O), \mathrm{dist}(y, X \setminus O)\}.$$

Если $d(x,y) > d_0$, то подберем точки $x^*, y^* \in X \setminus O$ так, чтобы $d(x, x^*) \leq 2\,\mathrm{dist}(x, X \setminus O)$ и $d(y, y^*) \leq 2\,\mathrm{dist}(y, X \setminus O)$. Запишем очевидное неравенство

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \leq |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x^*)| + |f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(y^*)| + |f_\varepsilon(x^*) - f_\varepsilon(y^*)|$$

Оценим первые два слагаемых с помощью (4.4), а третье, используя (4.5). Получим

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \lesssim \lambda\,[d(x,y)]^\beta .$$

Пусть теперь $d(x,y) \le d_0$. Как и прежде, выберем $x^* \in X\setminus O$ так, чтобы $d(x,x^*) < 2\operatorname{dist}(x, X\setminus O)$.

Поэтому, учитывая пункт 4) леммы 3.6, получаем

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty}[\varphi_i(x) - \varphi_i(y)]\left[I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)}f - f(x^*)\right]\right| \lesssim$$

$$\lesssim [d(x,y)]^\alpha \sum_{I_x\cup I_y}\frac{1}{r_i^\alpha}|I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)}f - f(x^*)|.$$

Заметим, что для $i \in I_x \cup I_y$ справедливо включение $B(x_i,2r_i) \subset B(x^*,100r_i)$, следовательно, в силу лемм 3.3 и 3.4

$$|f(x^*) - I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)}f| \le |f(x^*) - I^{(p)}_{B(x^*,100r_i)}f| +$$

$$+|I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)}f - I^{(p)}_{B(x^*,100r_i)}f| \lesssim r_i^\beta A^{(p)}_\beta f(x^*).$$

Таким образом, мы приходим к неравенству

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \lesssim [d(x,y)]^\beta \sum_{I_x\cup I_y}\frac{[d(x,y)]^{\alpha-\beta}}{r_i^{\alpha-\beta}}A^{(p)}_\beta f(x^*) \lesssim \lambda\,[d(x,y)]^\beta .$$

Случай 3. Пусть $x \in O$, а $y \in X\setminus O$. Выберем $x^* \in X\setminus O$ так, чтобы $d(x,x^*) \le 2\operatorname{dist}(x, X\setminus O)$. Тогда из (4.4) и уже доказанного пункта 1 следует

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \le |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x^*)| + |f_\varepsilon(y) - f_\varepsilon(x^*)| \lesssim \lambda\,[d(x,y)]^\beta$$

Таким образом, показано, что $f_\varepsilon \in H_\beta(X)$, если носитель функции f сосредоточен в единичном шаре.

Осталось показать, что $f_\varepsilon \in M^p_\alpha(X)$. Докажем сначала, что $f_\varepsilon \in L^p(X)$. Для этого оценим сверху $|I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)}f|$: из (3.1) получаем

$$|I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)}f|^p \lesssim A^p_p\,(f, B(x_i,2r_i)) + \fint_{B(x_i,2r_i)}|f|^p\,d\mu \lesssim \fint_{B(x_i,2r_i)}|f|^p\,d\mu.$$

Используя это неравенство и (4.3), имеем

$$\int_O |f_\varepsilon|^p\,d\mu \lesssim \sum_{i=1}^{\infty}\int_{B(x_i,2r_i)}|I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)}f|^p\,d\mu =$$

$$(4.7)\qquad = c\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B(x_i,2r_i))|I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)}f|^p \lesssim \sum_{i=1}^{\infty}\int_{B(x_i,2r_i)}|f|^p\,d\mu = c\int_O |f|^p\,d\mu.$$

Так как $f_\varepsilon = f$ на $X\setminus O$, то доказано, что $f_\varepsilon \in L^p(X)$.

Чтобы доказать, что $D_\alpha(f_\varepsilon)\cap L^p \neq \varnothing$, покажем, что для некоторой постоянной c будет выполнено $c\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f \in D_\alpha(f_\varepsilon)\cap L^p$. Снова рассмотрим три различных случая расположения точек x, y.

1. Пусть $x, y \in X \setminus O$. Тогда, так как $f_\varepsilon = f$ на $X \setminus O$, то

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| = |f(x) - f(y)| \lesssim [d(x,y)]^\alpha \left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(x) + \mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(y)\right].$$

2. Пусть $x, y \in O$. Предположим сначала, что $d(x,y) \leq d_0$. Так как, в силу леммы 3.7 $\|\phi_i\|_{H^\alpha(X)} \leq c r_i^{-\alpha}$, то

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} [\phi_i(x) - \phi_i(y)] \left[I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)} f - f(x)\right]\right| \lesssim$$

$$\lesssim \sum_{I_x \cup I_y} \frac{[d(x,y)]^\alpha}{r_i^\alpha} |I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)} f - f(x)|. \tag{4.8}$$

Так как при $i \in I_x \cup I_y$ выполняется включение $B(x_i, 2r_i) \subset B(x, 100r_i)$, то имеет место оценка

$$|I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)} f - f(x)| \leq |I^{(p)}_{B(x,100r_i)} f - f(x)| + |I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)} f - I^{(p)}_{B(x,100r_i)} f| \lesssim r_i^\alpha \mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(x)$$

(см. леммы 3.3 и 3.4). Подставляя полученную оценку в (4.8) и используя условие 6) леммы 3.6, получим

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \lesssim [d(x,y)]^\alpha \mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(x).$$

Теперь рассмотрим случай $d(x,y) > d_0$. Тогда

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \leq \sum_{i\in I_x} \left|\phi_i(x)[I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)} f - f(x)]\right| +$$

$$+ \sum_{i\in I_y} |\phi_i(y)[I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)} f - f(y)]| + |f(x) - f(y)| \leq$$

$$\lesssim \sum_{i\in I_x} r_i^\alpha \mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(x) + \sum_{i\in I_y} r_i^\alpha \mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(y) + [d(x,y)]^\alpha \left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(x) + \mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(y)\right] \lesssim$$

$$\lesssim [\operatorname{dist}(x, X \setminus O)]^\alpha \mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(x) + [\operatorname{dist}(y, X \setminus O)]^\alpha \mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(y) +$$

$$+ [d(x,y)]^\alpha \left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(x) + \mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(y)\right] \lesssim [d(x,y)]^\alpha \left[\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(x) + \mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(y)\right].$$

3. Пусть $x \in O, y \in X \setminus O$. В этом случае получаем

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \leq \sum_{i\in I_x} |f(y) - I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)} f| \lesssim$$

$$\lesssim |f(y) - f(x)| + \sum_{i\in I_x} |f(x) - I^{(p)}_{B(x_i,2r_i)} f| \lesssim [d(x,y)]^\alpha\, [\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(x) + \mathcal{A}_\alpha^{(p)} f(y)].$$

Таким образом, $c\mathcal{A}_\alpha^{(p)} f \in D_\alpha(f_\varepsilon) \cap L^p$.

Доказательство утверждения 4). В силу (4.3), (4.7) и (4.2) $\|f - f_\varepsilon\|_{L^p} \lesssim \varepsilon$. Кроме того, если $g \in D_\alpha(f) \cap L^p$, то $c[A^{(p)}_\alpha f]\chi_O \in D_\alpha(f - f_\varepsilon) \cap L^p$. Тогда

$$\|f - f_\varepsilon\|_{M^p_\alpha} \leq \|f - f_\varepsilon\|_{L^p} + \|c[A^{(p)}_\alpha f]\chi_O\|_{L^p} \lesssim \varepsilon.$$

Избавимся теперь от предположения (4.1). Это делается точно так же, как и в случае $p > 1$ (см. [3] и [5]). Действительно, существует не более чем счетный набор точек $\{x_i\}$, такой, что

$$X \subset \bigcup_i B(x_i, 1/2), \quad B(x_i, 1/4) \cap B(x_j, 1/4) = \varnothing \quad (i \neq j),$$

для которого можно построить другое разбиение единицы (см. [3]) — набор функций $\{\varphi_i\} \subset H_\alpha(X)$ со свойствами

$$0 \leq \varphi_i(x) \leq 1, \quad \operatorname{supp}\varphi_i \subset B(x_i, 1), \quad \|\varphi_i\|_{H_\alpha(X)} = c, \quad \sum_i \varphi_i(x) = 1.$$

В силу леммы 3.5 $f\varphi_i \in M^p_\alpha(X)$, а так как $\operatorname{supp} f\varphi_i \subset B(x_i, 1)$, то в силу доказанного существует набор функций $\{f^i_\varepsilon\}$, удовлетворяющий условиям

$$f^i_\varepsilon \in M^p_\alpha(X) \cap H_\beta(X), \quad \operatorname{supp} f^i_\varepsilon \subset B(x_i, 2), \quad \|f^i_\varepsilon - f\varphi_i\| < \varepsilon/2^i.$$

При этом также

$$\nu\left\{x \in X : f^i_\varepsilon(x) \neq f\varphi_i(x)\right\} < \varepsilon/2^i.$$

Легко проверяется, что функция $f_\varepsilon = \sum_i f^i_\varepsilon$ удовлетворяет всем необходимым условиям. Теорема 2.1 доказана.

Abstract. The present paper is devoted to the Lusin's approximation of functions from Hajlasz Sobolev classes $M^p_\alpha(X)$ for $p > 0$. It is proved that for any $f \in M^p_\alpha(X)$ and any $\varepsilon > 0$ there exist an open set $O_\varepsilon \subset X$ with measure less than ε (as a measure can be taken the corresponding capacity or Hausdorff content) and an approximating function f_ε such that $f = f_\varepsilon$ on $X \setminus O_\varepsilon$. Moreover, the correcting function f_ε is regular (that is, it belongs to the underlying space $M^p_\alpha(X)$ and it is a locally Holder function), and it approximates the original function in the metric of the space $M^p_\alpha(X)$.

Список литературы

[1] С. А. Бондарев, В. Г. Кротов, "Тонкие свойства функций из классов Хайлаша Соболева M^p_α при $p > 0$, I. Точки Лебега", Изв. НАН Армении. Математика **51**, no. 6, 3 – 22 (2016).

[2] P. Hajlasz, "Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces", Potential Anal. **5**, no. 4, 403 – 415 (1996).

[3] P. Hajlasz, J. Kinnunen, "Hölder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces", Rev. Mat. Iberoam. **14**, no. 3, 601 – 622 (1998).

[4] J. Kinnunen, H. Tuominen, Pointwise behaviour of $M^{1,1}$ Sobolev functions, Math. Zeit. **257**, no. 3, 613 – 630 (2007).

[5] В. Г. Кротов, М. А. Прохорович, "Аппроксимация Лузина функций из классов W^p_α на метрических пространствах с мерой", Известия вузов. Математика, но. 5, 55 – 66 (2008).

[6] T. Heikkinen, H. Tuominen, "Approximation by Holder functions in Besov and Triebel–Lizorkin spaces", preprint 2015, http://arxiv.org/abs/1504.02585.

[7] R.A. Macias, C. Segovia "A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type", Advances in Mathematics, **33**, 271 – 309 (1979).

[8] В. Г. Кротов, С. А. Бондарев "Тонкие свойства функций из пространств Хайлаша-Соболева W^p_α, $p > 0$" Межд. конф. по функциональным пространствам и теории приближения функций, посв. 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского (Москва, 25–29 мая 2015 г.).

[9] В. Г. Кротов, А. И. Порабкович, "Оценки L^p-осцилляций функций при $p > 0$", Матем. заметки, **97**, но. 3, 407 – 420 (2015).

[10] В. Г. Кротов, "Весовые L^p-неравенства для шарп-максимальных функций на метрических пространствах с мерой", Изв. НАН Армении. Математика, **41**, no. 2, 25 – 42 (2006).

[11] J. Kinnunen, V. Latvala, "Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces", Rev. Mat. Iberoam. **18**, no. 3, 685 – 700 (2002).

Поступила 3 февраля 2016