

НАИЛУЧШИЕ РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ В $\mathbb{R}^2$ ФУНКЦИЯМИ

А. А. ВАРДАНЯН

Институт Математики ИАН Армении
E-mail: anushvardanyan@ysu.am

Аннотация. В этой работе исследуется задача равномерного приближения функции, заданной на вещественной оси $\mathbb{R}$ гармоническими функциями на $\mathbb{R}^2$ имеющими оптимальный рост на бесконечности. Рост приближающих функций зависит от роста и дифференциальных свойств приближаемой функций на $\mathbb{R}$. Отметим, что эта задача впервые рассматривается в настоящей работе.

MSC2010 number: 30E10, 30Dxx.

Ключевые слова: равномерное приближение; гармонические функции.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой работе рассматривается задача равномерного приближения на вещественной оси функций с определенными дифференциальными свойствами на вещественной оси, гармоническими функциями имеющими оптимальный рост на бесконечности.

В работе С. Гардинера [1] рассматривалась возможность равномерного приближения данной функции на неограниченных множествах гармоническими функциями из $\mathbb{R}^2$.

Подход к решению задачи является конструктивным, ибо в ходе решения задачи нами построен явный вид приближающих функций. Аналогичная задача для целых и мероморфных функций исследовалась соответственно в работах [2] и [3].

В работе [4] функция, определенная на $\mathbb{R}$ и имеющая непрерывный дифференциал 3-ой степени, приближается гармоническими функциями в данной полосе содержащей $\mathbb{R}$. Здесь приближающие функции гармоничны на $\mathbb{R}^2$.

Работа состоит из двух параграфов. Первый из них содержит введение и предварительные сведения, а второй - основные результаты со своими доказательствами.

1.1. Некоторые обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно множества натуральных, вещественных и комплексных чисел. Евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ будем идентифицировать с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, положив $z = x + iy$ для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Для множества $E \subset \mathbb{R}^2$, замыкание, внутренность и границу E в $\mathbb{R}^2$ обозначим соответственно через $\bar{E}$, E° и ∂E .

Также положим:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \text{ и } \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\};$$

$$D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\} \text{ для } r > 0;$$

$$S_\delta := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leq \delta\} \text{ для } \delta > 0 - \text{полоса.}$$

Пусть E — замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$. Для класса $C(E)$ непрерывных функций $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ положим

$$m_f(r) = m_f(r, E) := \|f\|_{E \cap D_r} = \sup_{z \in E \cap D_r} |f(z)|.$$

$$C_b(E) := \{f \in C(E) : \|f\|_E < +\infty\}.$$

Для замкнутого множества $E \subset \mathbb{R}^2$ обозначим $A(E) = C(E) \cap H(E^\circ)$ и $A_b(E) = C_b(E) \cap H(E^\circ)$, где $H(E)$ класс гармонических функций на E .

Для $f \in C(\mathbb{R})$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ и $\delta \geq 0$ положим

$$(1.1) \quad \Delta_{1,f}(\xi, \delta) := \max_{|\eta| \leq \delta} |f(\xi + \eta) - f(\xi - \eta)|.$$

В дальнейшем для $x \in \mathbb{R}$ обозначим

$$(1.2) \quad \omega_{1,f}(x, \delta) := \max_{|t-x| \leq \delta} \Delta_{1,f}(\xi, \delta).$$

1.2. Приближения на $\mathbb{R}$ гармоническими функциями. В этом параграфе рассмотрим задачу приближения функции $f \in A(S_h)$ на $\mathbb{R}$ функциями v гармоническими на $\mathbb{R}^2$ с оценкой роста на $\mathbb{R}^2$.

Нам понадобится следующая теорема, доказанная в [4].

Теорема 1.1. Пусть функция $f \in C^4(\mathbb{R})$ и $0 < \delta \leq 1$. Тогда существует функция $v_\delta \in H(S_\delta)$, удовлетворяющая неравенствам:

$$(1.3) \quad |f(x) - v_\delta(x)| < 5\delta^4 \text{ для } x \in \mathbb{R}.$$

и

$$(1.4) \quad |v_\delta(z)| < 3M_f(x+1) + 3 \exp\left(5 + 8\sqrt{M_{f^{(4)}}(x, 2)}\right) \text{ для } z = x + iy \in S_\delta.$$

Докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 1.1. Для $h > 0$ и $b > 1$ существует гармоническая функция $w(z, \zeta) \in H(\mathbb{C})$ для $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, такая что

$$(1.5) \quad \left| \ln \frac{1}{|z - \zeta|} - w(z, \zeta) \right| < \frac{1}{b|\eta|^2} \text{ для } z \in \mathbb{R} \text{ и } |z| \leq |\zeta|/2, |\eta| \geq 1$$

и

$$(1.6) \quad \ln |w(z, \zeta)| < c \ln(|z| + 1) + c \ln^+ b|\eta| + 3 \exp \left(5 + \frac{c}{|\eta|^2} \right) \text{ для } z \in \mathbb{C}.$$

где $\zeta = \xi + i\eta$ и $c > 0$ абсолютная постоянная.

Доказательство. Заметим, что функции $-\ln|z - \zeta|$ для фиксированного $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Теоремы 1.1 и ограничена на $\mathbb{R}$. Следовательно, существуют функции $w_\delta = w_\delta(z, \zeta)$, которые гармоничны в полосе S_δ для фиксированного ζ ($|\eta| > 1$), где число δ будет зависеть от ζ . Учитывая, что

$$\left| \ln \frac{1}{|x - \zeta|} \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{1}{(x - \xi)^2 + \eta^2} \right| < \max \{ 2 \ln^+(x - \xi), \ln |\eta| \} \text{ для } x \in \mathbb{R}$$

и

$$\left| \left(\ln \frac{1}{|x - \zeta|} \right)' \right| = \left| \frac{\xi - x}{(x - \xi)^2 + \eta^2} \right| < \frac{1}{2|\eta|}$$

получаем

$$(1.7) \quad \left| \left(\ln \frac{1}{|z - \zeta|} \right)_x^{(4)} \right| = \left| -\frac{1}{(x - \xi)^2 + \eta^2} + \frac{4(x - \xi)^2 + 4}{((x - \xi)^2 + \eta^2)^2} + \frac{16(x - \xi)^2}{((x - \xi)^2 + \eta^2)^3} - \frac{12(x - \xi)^2}{((x - \xi)^2 + \eta^2)^3} - \frac{24(x - \xi)^4}{((x - \xi)^2 + \eta^2)^4} \right| < \frac{2}{|\eta|^2} + \frac{25}{2|\eta|^4} < \frac{15}{|\eta|^2}.$$

Отсюда взяв $\delta = b|\zeta|^2$ для $\zeta \in \mathbb{C}$, ($|\eta| > 1$), из оценок (1.4) и (1.7) получаем

$$(1.8) \quad |w_\delta(z, \zeta)| < 3 \max \{ 2 \ln^+(x - \xi), \ln |\eta| \} + 3 \exp \left(5 + \frac{c}{b\delta} \right) \text{ для } z \in S_\delta.$$

Из (1.8) следует, что функция $w_\delta(z, \zeta)$ на $\mathbb{R}$ для фиксированного $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ограничена функцией $\ln(|x| + 1)$. Обозначим

$$l_\delta := \{ \zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \zeta = \delta \}, \quad l_{-\delta} := \{ \zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \zeta = -\delta \},$$

$$P_\delta := \{ \zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \zeta \geq \delta \}, \quad P_{-\delta} := \{ \zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \zeta \leq -\delta \} \text{ для } \delta > 0.$$

Для полушлюскости P_δ и для функции w_δ на l_δ применив теорему Дирихле, мы можем определить функцию w_δ как гармоническую функцию на P_δ . Тогда учитывая, что

$$\int_0^1 \frac{y^2 \ln^+ t}{y^2 + (t - x)^2} dt < -cy \ln \delta,$$

где $c > 0$ абсолютная постоянная, можем определить w_δ как гармоническую функцию на всей $\mathbb{C}$ для фиксированного $\zeta \in \mathbb{C}$ так, чтобы

$$\ln M_{w_\delta}(\tau) < 3 \exp \left(5 + \frac{c}{|\eta|^2} \right) + 3 \ln^+ \tau + 2 \ln^+ \sqrt{b} |\zeta|.$$

Теперь мы должны доказать оценку (1.5) для $|z| \leq |\zeta|/2$ и $z \in \mathbb{C}$.

Для случая $|z| \leq |\zeta|/2$ и $z \in S_\delta$ оценка (1.5) непосредственно следует из доказательства Теоремы 1 работы [3].

Учитывая, что

$$(1.9) \quad \left| \ln \frac{1}{|z - \zeta|} - w(z, \zeta) \right| < \delta \text{ для } z \in I_\delta \text{ и фиксированного } \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

и принцип максимума для гармонических функций, получим (1.5) для $|z| \leq |\zeta|/2$ и $z \in \mathbb{C}$.

Теперь докажем оценку (1.6). Из решения задачи Дирихле имеем, что рост функции w_δ на Π_δ и $\Pi_{-\delta}$ удовлетворяет неравенству

$$w_\delta(z, \zeta) < 3 \ln(|z| + 1) + 2 \ln^+ \sqrt{b} |\zeta|.$$

С учетом (1.8) мы получим оценку (1.6). Лемма 1.1 доказана. $\square$

Теперь сформулируем первый результат об гармоническом приближении функциями, определенными на $\mathbb{R}^2$.

Теорема 1.2. Пусть $u \in H(S_h)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция v гармоническая на $\mathbb{R}^2$ такая, что

$$(1.10) \quad |u(x, 0) - v(x, 0)| < 6\varepsilon \text{ для } x \in \mathbb{R}.$$

Рост функции v на $\mathbb{R}^2$ удовлетворяет для $r > 0$ неравенству

$$(1.11) \quad \ln |v(x, y)| < 2 \ln M_u(|z| + 2h) + c \ln r,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $c > 0$ зависит лишь от h .

Доказательство. Заменив v на $\varepsilon^{-1}v$ и u на $\varepsilon^{-1}u$, мы можем доказательство теоремы привести к случаю $\varepsilon = 1$.

Пусть теперь γ будет границей S_h , положительно ориентированной относительно начала координат, и для $r \geq 0$, γ_r будет часть γ в $\mathbb{C} \setminus D_r$ с индуцированной ориентацией; отметим, что $\gamma_r = \gamma$, если $r \leq h$. Выведем следующие функции

$$(1.12) \quad I_r(z) = \int_{\gamma_r} u(\zeta) \left[w(z, \zeta) - \ln \frac{1}{|z - \zeta|} \right] d\zeta \text{ for } (z, \zeta) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}).$$

где функцию $w(z, \zeta)$ выбираем по Лемме 1.1.

Для доказательства теоремы, мы должны оценить $I_r(z)$ на $\mathbb{R}$ и на $\mathbb{R}^2$.

Пологая $b = M_n(|\zeta|)$ и используя (1.5) получаем

$$(1.13) \quad |I_r(x)| < \int_{\partial E_r} |u(\zeta)| \frac{1}{b|\eta|^2} d\zeta < c_1 \int_{|\eta| \geq h} |\eta|^{-2} d\eta = c(h) < +\infty.$$

Пусть теперь $z = x + iy \in \overline{D}_\rho$ и $r > r_0 = \max\{2\rho, \rho + h\} + 1$. Из (1.5) и (1.12) следует

$$|I_r(z)| < c \int_{\gamma_r} \frac{1}{|\eta|^2} d\zeta < c \frac{1}{r - r_0} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow +\infty.$$

Поскольку функция $I_0(z) - I_r(z)$ это интеграл вдоль конечного пути $\gamma \setminus \gamma_r$, то она определяет гармоническую функцию на $\mathbb{R}^2 \setminus (\gamma \setminus \gamma_r)$. Следовательно, интеграл $I_0(z)$ равномерно сходится на $\overline{D}_\rho \setminus \gamma$ для любого $\rho > 0$ и определяет гармоническую функцию. $I_0 \in H(\mathbb{R}^2 \setminus \gamma)$; аналогично $I_r \in H(\mathbb{R}^2 \setminus \gamma)$ для любого $r \geq 0$.

Рассмотрим теперь функцию $v \in H(\mathbb{R}^2 \setminus \gamma)$, определенную формулой

$$(1.14) \quad v(z) = \begin{cases} I_0(z) + u(z) & \text{для } z \in S_h^0 \\ I_0(z) & \text{для } z \in \mathbb{R}^2 \setminus S_h \end{cases}$$

Из определения (1.12), с учетом (1.6), получаем $|I_r(x)| < c(h)$ для $x \in \mathbb{R}$. Таким образом оценка (1.10) доказана.

Функцию v по формуле Коши-Грина представим в следующем виде:

$$(1.15) \quad v(z) = I_r(z) + I'_r(z) + I''_r(z),$$

где

$$I'_r(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma \setminus \gamma_r} u(\zeta) w(z, \zeta) d\zeta,$$

$$I''_r(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{l_r} u(\zeta) \ln|z - \zeta| d\zeta,$$

$$l_r = \partial D_r \cap S_h.$$

Очевидно, что интегралы являются гармоническими функциями на D_r , следовательно, v допускает гармоническое продолжение на D_r для любого $r > h$, и более того $v \in H(\mathbb{R}^2)$. При этом формула (1.15) для $v(z)$ не зависит от r , если $z \in D_r$. Так как функция $u \in H(S_h)$, то по теореме Коши-Грина получаем

$$(1.16) \quad 2\pi u(z) = \int_{\partial E_r} \left[u(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln|\zeta - z| - \frac{\partial}{\partial n} u(\zeta) \ln|\zeta - z| \right] ds,$$

где n обозначает внутреннюю единичную нормаль к ∂E_r , где $E_r = S_h \cap D_r$. Этот интеграл на $\mathbb{R}^2 \setminus S_h$ будет равен нулю. Из (1.14)-(1.16) для $z \in E_r$ получим следующее представление:

$$2\pi v(z) = \int_{\partial E_r} \left[u(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln|\zeta - z| - \frac{\partial}{\partial n} u(\zeta) \ln|\zeta - z| \right] ds$$

$$+ \int \int_{E_r} (\Delta)(\zeta) w(\zeta, z) d\sigma_\zeta + \int \int_{S_1 \setminus E_r} (\Delta u)(\zeta) w(\zeta, z) d\sigma_\zeta,$$

где функция $w(\zeta, z)$ определена в (3). В этой формуле все ядра гармонические функции по z для $z \in E_r^u$. Следовательно функция $v(z)$ будет гармонична на $\mathbb{R}^2$. Теперь оценим функцию v для любого $z \in \mathbb{R}^2$. С учетом оценки (1.5), возьмем $r = 2|z|$ для $z \in \mathbb{R}^2$, из определения (1.12) получим, что

$$(1.17) \quad |I_r(z)| < c(h).$$

С учетом (1.6), получим:

$$(1.18) \quad |I_r'(z)| < c_1(h) \{M_u(r) + r\}.$$

По той же схеме:

$$(1.19) \quad |I_r''(z)| < c_2(h) M_u(r),$$

где $c_1(h) > 0$ и $c_2(h) > 0$.

Таким образом из (1.15), с учетом (1.17) – (1.19), получим оценку (1.11). $\square$

2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Рассмотрим задачу о наилучшем равномерном приближении на вещественной оси гармоническими функциями. Следующая теорема доказана в работе [3].

Теорема 2.1. Пусть $f \in C^3(\mathbb{R})$ и $\varepsilon > 0$. Тогда для $h > 0$ существует функция $v \in H(S_h)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(x) - v(x)| < 5\varepsilon \text{ для } x \in \mathbb{R},$$

рост которой для $z = x + iy \in S_h$ ограничен неравенством

$$|v(x)| < 3m_f(x, h) + 3\varepsilon \exp \left(5 + 2\sqrt{(2h)^3 \varepsilon^{-1} \omega_{1,f(x)}(x, h)} \right).$$

Сопоставляя Теорему 1.2 и Теорему 2.1, мы получим основной результат работы.

Теорема 2.2. Пусть $f \in C^3(\mathbb{R})$ и $\varepsilon > 0$. Тогда для $h > 0$ существует функция w гармоническая на $\mathbb{R}^2$ и удовлетворяющая

$$|f(x) - w(x)| < \varepsilon \text{ для } x \in \mathbb{R}.$$

рост которой для $z = x + iy \in \mathbb{R}^2$ ограничен неравенством

$$\ln |w(x, y)| < 2 \ln m_f(|z| + 2h) + c \ln r + c\varepsilon \sqrt{(2h)^3 \varepsilon^{-1} \omega_{1,f(x)}(x, h)}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $c > 0$ зависит лишь от h .

Из Теоремы 2.2 получаем следующий результат.

Теорема 2.3. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$ и $0 < \delta \leq 1$. Тогда существует гармоническая в $\mathbb{R}^2$ функция v_δ , такая что

$$(2.1) \quad |f(x) - v_\delta(x, 0)| < 5\delta^4 \text{ для } x \in \mathbb{R},$$

и для любой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(2.2) \quad \ln |v_\delta(x, y)| < 3 \ln m_f(x, 1) + c \ln(\tau + 1) + 24 \sqrt{m_{f^{(4)}}(x, 2)} + 15,$$

где $c > 0$ абсолютная постоянная.

В работе [2] доказано, что если функция $f \in C(\mathbb{R})$ и удовлетворяет некоторым дифференциальным свойствам, то ее можно приблизить целыми функциями порядка 1 и этот порядок нельзя уменьшить. Далее в работе [3] было доказано, что функцию f можно приблизить мероморфными функциями с ростом $T(r) = \log^2(r)$ и его рост нельзя уменьшить. В случае гармонического приближения можно получить следующий результат.

Следствие 2.1. Пусть функции $f \in C^4(\mathbb{R})$ и $f^{(4)}$ ограничены на $\mathbb{R}$. Тогда функцию f можно равномерно приблизить на $\mathbb{R}$ гармоническими функциями $w \in H(\mathbb{R}^2)$ так, что $M_w(r) \leq Ar$, где $A > 0$ абсолютная постоянная.

Abstract. In this paper we investigate the problem of uniform approximation of a function given on the real axis $\mathbb{R}$ by harmonic functions on $\mathbb{R}^2$ with optimal growth at infinity. The growth of approximating functions depends on the growth of the approximated function and its differential properties on $\mathbb{R}$. Note that this problem is first considered in the present work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Gardiner. "Harmonic approximation and its applications". Approximation, Complex Analysis, and Potential Theory, 191 – 219 (2001).
- [2] Н. У. Аракелян. "О равномерном и касательном приближении на вещественной оси целыми функциями с оценкой их роста". Математический Сборник, 113(155), no. 1 (9), 3 – 40 (1980).
- [3] Р. А. Аветисян и Н. У. Аракелян. "Наилучшие приближения мероморфными функциями на вещественной оси". Известия АН Арм. ССР, серия Математика, 25, no. 6, 534 – 548 (1990).
- [4] N. H. Arakelian and A. Vardanyan. "Uniform approximation on the real axis by functions harmonic in a stripe and having optimal growth", Analysis, 27, 285 – 299 (2007).

Поступила 11 мая 2016