Известия НАН Армении, Математика, том 51, н. 6, 2016, стр. 43-71.

О БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ В $H^1(R)$ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ФРАНКЛИНА С НУЛЕВЫМИ СРЕДНИМИ

К. А. КЕРЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mail: *karenkeryan@yahoo.com*

Аннотация. Определяется общая система Франклина на R с нулевым средним, порожденная допустимой последовательностью $\mathcal{T}$. Найдено необходимое и достаточное условие на $\mathcal{T}$ при котором соответствующая система является безусловным базисом в $H^1(R)$.

MSC2010 number: 42C10; 46E30.

Ключевые слова: система Франклина; безусловный базис; пространство $H^1(R)$.

1. Введение

В этой статье исследуются свойства ортонормальной сплайн системы второго порядка с произвольными узлами. Систематические исследования таких систем началось с работ З. Чисельского [2], [3] о классической системе Франклина, которая является ортонормальной системой кусочно-линейных непрерывных функций с диадическими узлами. В 1975 г. С. В. Бочкаревым [1] была доказана безусловная базисность классической системы Франклина в $L^p[0,1]$, для $1 < p < \infty$, а в 1982г. П. Войтащик [19] доказал безусловную базисность этой системы в $H^1[0,1]$.

Распространение этих результатов для произвольной последовательности узлов, т.е для общей системы Франклина, началось с работ [4], [8]. В [9] Г. Г. Геворкян и А. Камонт доказали, что общая система Франклина является безусловным базисом в $L^p[0,1]$, для $1 < p < \infty$. Ими также были получены простые геометрические характеризации последовательности узлов, для которых соответствующая общая система Франклина является базисом или безусловным базисом в $H^1[0,1]$ (см. [10]). При доказательстве этих результатов важную роль сыграли характеристические интервалы связанные с каждой общей функцией Франклина.

[1]Исследования выполнены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 13-1А006

В работе [12] был введен аналог общей системы Франклина на действительной оси с нулевыми средними. Там была получена геометрическая характеризация последовательностей узлов, для которых соответствующая система Франклина на R с нулевым средним является базисом в $H^1(R)$. Надо отметить, что эта характеризация не является аналогом той, полученной на отрезке $[0,1]$ в [10].

Основной целью этой работы является характеризация последовательностей узлов для которых соответствующая общая система Франклина на R с нулевыми средними является безусловным базисом в $H^1(R)$.

Материал организован следующим образом. Во втором параграфе приведены необходимые определения и формулировка основного результата. В третьем параграфе доказаны некоторые свойства функций Франклина на R с нулевым средним. В четвертом параграфе исследуется гладкость мультипликаторов ядер Дирихле. А в последнем пятом параграфе приведено доказательство основного результата.

2. Некоторые определения и формулировка основного результата

Определение 2.1. *Последовательность (разбиение) $\mathcal{T} = (t_n : n \geq 0)$ назовем допустимой на R, если $\mathcal{T}$ всюду плотно в R и каждая точка $t \in R$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем один раз.*

Пусть $\mathcal{T} = (t_n : n \geq 0)$ допустимая последовательность. Для $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n = (t_i : 0 \leq i \leq n+1)$. Допустим π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = (\tau_{n,i} : \tau_{n,i} < \tau_{n,i+1}, 0 \leq i \leq n)$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Тогда через S_n^0 обозначим пространство функций с нулевым средним, которые непрерывны на R, линейны на $[\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]$ и равны нулю вне $(\tau_{n,0}, \tau_{n,n+1})$. Ясно, что $\dim S_n^0 = n-1$ и $S_{n-1}^0 \subset S_n^0$. Следовательно, существует единственная (с точностью до знака) функция $F_n \in S_n^0$, которая ортогональна S_{n-1}^0 и $\|F_n\|_2 = 1$. Эту функцию назовем n-ой функцией Франклина с нулевым средним на R, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$.

Определение 2.2. *Система функций Франклина с нулевыми средними $(F_n(t))_{n\geq 2}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется следующим образом: для $n \geq 2$ функция $F_n(t)$ есть n-ая функция Франклина с нулевым средним, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.*

При исследовании общей системы Франклина на $[0,1]$ важную роль сыграли понятия регулярности последовательности $\mathcal{T}$. Эти понятия нам нужны также при изучении системы Франклина на R. Введем понятия регулярностей на R.

Определение 2.3. *Допустимая последовательность $\mathcal{T}$ называется сильно регулярной на R с параметром γ, если для всех $n \geq 2$,*

$$\gamma^{-1} \leq \frac{\lambda_{i+1}^n}{\lambda_i^n} \leq \gamma, \quad \text{для всех} \ \ i = 1, \dots, n,$$

и

$$\frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \ldots + \lambda_{n+1}^n} > \gamma^{-1}, \qquad \frac{\lambda_n^n + \lambda_{n+1}^n}{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \ldots + \lambda_{n+1}^n} > \gamma^{-1}, \tag{2.1}$$

здесь и далее $\lambda_i^n = \tau_{n,i} - \tau_{n,i-1}$.

Определение 2.4. *Допустимая последовательность $\mathcal{T}$ называется регулярной по парам на R с параметром γ, если для всех $n \geq 2$ имеет место (2.1) и*

$$\gamma^{-1} \leq \frac{\lambda_{i+2}^n + \lambda_{i+1}^n}{\lambda_{i+1}^n + \lambda_i^n} \leq \gamma, \quad \text{для всех} \ \ i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Основным результатом [12] является следующая характеризация последовательностей, для которых система (F_n) является базисом в $H^1(R)$.

Теорема 2.1 ([12]). *Пусть $\mathcal{T}$ допустимая последовательность и $(F_n(t))_{n=2}^{\infty}$ соответствующая система функций Франклина с нулевыми средними. Тогда для того, чтобы система $(F_n(t))_{n=2}^{\infty}$ была базисом в $H^1(R)$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\mathcal{T}$ была сильно регулярной по парам на R с некоторым параметром γ.*

В этой работе нами получена характеризация последовательностей, для которых система (F_n) является безусловным базисом в $H^1(R)$. Основным результатом этой статьи является следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{T}$ допустимая последовательность и $(F_n(t))_{n=2}^{\infty}$ соответствующая система функций Франклина с нулевыми средними. Тогда для того, чтобы система $(F_n(t))_{n=2}^{\infty}$ была безусловным базисом в $H^1(R)$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\mathcal{T}$ была сильно регулярной на R с некоторым параметром γ.*

Отметим, что доказательства безусловной базисности в действительном пространстве Харди общей системы Франклина на $[0,1]$ в [10], а также ортонормальной системы сплайнов высшего порядка в [11] основываются на эквивалентности следующих четырех условий. Чтобы сформулировать эти условия, дадим необходимые определения. Пусть $(f_n)_{n\geq 0}$ общая система Франклина на $[0,1]$ соответствующая допустимой последовательности. Для последовательности коэффициентов $(a_n)_{n\geq 0}$ положим

$$P := \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad S := \sup_{m\geq 0}\left|\sum_{n=0}^{m} a_n f_n\right|.$$

Для $f \in L^1[0,1]$ обозначим через Pf и Sf функции P и S соответствующие последовательности коэффициентов $a_n = \langle f, f_n\rangle$. В работе [10] было доказано эквивалентность следующих условий для сильно регулярных последовательностей:

(A) $P \in L^1[0,1]$.
(B) Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n$ безусловно сходится в $L^1[0,1]$.
(C) $S \in L^1[0,1]$.
(D) Существует функция $f \in H^1[0,1]$ такая, что $a_n = \langle f, f_n\rangle$.

В нашем случае, т.е. для системы Франклина с нулевым средним, аналоги всех импликаций доказанные в работе [10] можно получить, кроме быть может импликации $(C) \Rightarrow (D)$. Проблема в том, что при доказательстве импликации $(C) \Rightarrow (D)$ используется следующее важное свойство функций Франклина на $[0,1]$, которое, вообще говоря, не верно для функций Франклина с нулевым средним. Определение функции Франклина на $[0,1]$ аналогично определению данному выше функции Франклина с нулевым средним, с той разницей, что соответствующие пространства кусочно-линейных функций могут иметь средние отличные от нуля. Поэтому по определению каждая функция Франклина ортогональна всем таким кусочно-линейным, непрерывным функциям, что нельзя сказать о функции Франклина с нулевым средним (в этом случае кусочно-линейные функции должны также иметь нулевую среднюю).

В настоящей работе, вместо эквивалентности этих четырех условий мы доказываем гладкость мультипликаторов ядер Дирихле общей системы Франклина на R с нулевыми средними. Такой подход был применен также в [16].

Условимся в некоторых обозначениях. Через $c, C, C_1, C_\gamma, \ldots$ обозначаются постоянные зависящие только от своих индексов. Значения этих постоянных в разных формулах могут быть разными. Длину отрезка I обозначим через $|I|$.

Записи $a \sim b$, $a \lesssim b$, $a \gtrsim b$ означают, что существуют положительные постоянные c и C, такие что $c \cdot a \leq b \leq C \cdot a$, $a \leq C \cdot b$, $a \geq c \cdot b$ соответственно, а записи $a \sim_\gamma b$, $a \lesssim_\gamma b$, $a \gtrsim_\gamma b$ означают, что эти постоянные могут зависеть от γ.

Через $\mathbf{1}_A(x)$ обозначим характеристическую функцию множества A.

3. Предварительные назначения и вспомогательные утверждения

В этом параграфе мы получим оценки для обратной матрицы Грама системы B-сплайнов, откуда получим оценки функции Франклина с нулевым интегралом. А также дадим определение пространства Харди и укажем на свойство гладкости ядра, при котором соответствующий интегральный оператор будет ограниченным из $H^1(R)$ в $H^1(R)$.

3.1. Некоторые свойства B-сплайнов и матрицы Грама. Пусть $\mathcal{T}$ разбиение действительной оси $\mathcal{T} = (\tau_{-m-1} < \ldots < \tau_0 < \ldots < \tau_{n+1})$, где $m, n \geq -1$.

Через λ_i обозначим длину отрезка $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ для $-m \leq i \leq n+1$, а через N_i, $(-m-1 \leq i \leq n+1)$ обозначим B-сплайны соответствующие $\mathcal{T}$, т.е.

$$N_i(t) = \begin{cases} 1, \text{когда} \quad t = \tau_i, \\ 0, \text{когда} \quad t \in (-\infty, \tau_{i-1}] \cup [\tau_{i+1}, \infty), \\ \text{линейна на} \quad [\tau_{i-1}, \tau_i] \quad \text{и} \quad [\tau_i, \tau_{i+1}], \end{cases} \quad \text{для} \quad -m \leq i \leq n$$

и

$$N_{-m-1}(t) = \begin{cases} 1, \text{когда} \quad t = \tau_{-m-1}, \\ 0, \text{когда} \quad t \notin [\tau_{-m-1}, \tau_{-m}), \\ \text{линейна на} \quad [\tau_{-m-1}, \tau_{-m}], \end{cases} \quad N_{n+1}(t) = \begin{cases} 1, \text{когда} \quad t = \tau_{n+1}, \\ 0, \text{когда} \quad t \notin (\tau_n, \tau_{n+1}], \\ \text{линейна на} \quad [\tau_n, \tau_{n+1}]. \end{cases}$$

Матрицу Грама системы $(N_i)_{i=-m}^n$ обозначим через G, т.е. $G = (\langle N_i, N_j \rangle)_{i,j=-m}^n$, где $\langle f, g \rangle = \int_R f(x)g(x)\mathrm{d}x$, а обратную- $G^{-1} = (a_{ij})_{i,j=-m}^n$. Очевидно, что система $(N_j^*)_{j=-m}^n$, определенная следующим образом

$$N_j^* = \sum_{i=-m}^{n} a_{ij} N_i, \tag{3.1}$$

биортогональна системе $(N_i)_{i=-m}^n$.

Прямыми вычислениями можно получить, что $\langle N_i, N_i \rangle = \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1}}{3}$, $\langle N_i, N_{i+1} \rangle = \frac{\lambda_{i+1}}{6}$, и $\langle N_i, N_j \rangle = 0$, при $|i - j| > 1$. Следовательно, коэффициенты a_{ij} удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\lambda_j a_{i,j-1} + 2(\lambda_j + \lambda_{j+1}) a_{i,j} + \lambda_{j+1} a_{i,j+1} = 6\delta_{ij}, \quad \text{для} \ -m \leq i, j \leq n, \tag{3.2}$$

определив $a_{i,-m-1} = a_{i,n+1} = 0$.

Нам понадобятся следующие свойства коэффициентов $a_{i,j}$.

Утверждение 3.1. *Для любых i и j имеют место следующие соотношения*

$$3 \le a_{i,i}(\lambda_i + \lambda_{i+1}) \le 4; \tag{3.3}$$

$$a_{i,j} = (-1)^{i+j}|a_{i,j}|; \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} |a_{i,j}| \ge 2|a_{i,j+1}|, & j \ge i, \\ |a_{i,j}| \ge 2|a_{i,j-1}|, & j \le i; \end{cases} \tag{3.5}$$

Более того

$$\begin{cases} \left(2 + \frac{3}{2}\frac{\lambda_{j+2}}{\lambda_{j+1}}\right)|a_{i,j+1}| \le |a_{i,j}| \le \left(2 + 2\frac{\lambda_{j+2}}{\lambda_{j+1}}\right)|a_{i,j+1}|, & j \ge i, \\ \left(2 + \frac{3}{2}\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\right)|a_{i,j-1}| \le |a_{i,j}| \le \left(2 + 2\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\right)|a_{i,j-1}|, & j \le i; \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} |a_{i,j}| \le 4q^{j-i}\dfrac{1}{\lambda_i + \ldots + \lambda_{j+1}}, & \text{где } j \ge i, \\ |a_{i,j}| \le 4q^{i-j}\dfrac{1}{\lambda_j + \ldots + \lambda_{i+1}}, & \text{где } j \le i; \end{cases} \tag{3.7}$$

для $q = \frac{2}{3}$, *и*

$$|a_{i,j}| \le \frac{4}{2^{|i-j|}} \cdot \frac{1}{\max(\lambda_i + \lambda_{i+1}, \lambda_j + \lambda_{j+1})}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Заметим, что $|a_{i,n-1}| \ge 2|a_{i,n}|$ и $a_{i,n-1} \cdot a_{i,n} < 0$ (см. (3.2)). Откуда многократным использованием равенства (3.2) получим, что $|a_{i,j}| \ge 2|a_{i,j+1}|$, и $a_{i,j+1} \cdot a_{i,j} < 0$ для $j \ge i$. Аналогично можно доказать, что, $|a_{i,j}| \ge 2|a_{i,j-1}|$, и $a_{i,j-1} \cdot a_{i,j} < 0$ для $j \le i$. Неравенства (3.5) доказаны. Совмещая вышесказанное с (3.2) получим, что $a_{i,i} > 0$, следовательно имеет место (3.4), более того, имеем

$$2(\lambda_i + \lambda_{i+1})a_{i,i} \ge 6 = \lambda_i a_{i,i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})a_{i,i} + \lambda_{i+1}a_{i,i+1} \ge \frac{3}{2}(\lambda_i + \lambda_{i+1})a_{i,i}.$$

Итак, неравенство (3.3) также доказано. Неравенства (3.6) являются следствием (3.2), (3.4) и (3.5), а (3.8) вытекает из (3.3) и (3.5).

Чтобы удостовериться в справедливости (3.7), заметим, что для $j \ge i$, из (3.6) и (3.3) имеем

$$|a_{i,j}| \le \frac{2}{3} \cdot \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \lambda_{j+1}}|a_{i,j-1}| \le \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{\lambda_j\lambda_{j-1}}{(\lambda_j + \lambda_{j+1})(\lambda_{j-1} + \lambda_j)}|a_{i,j-2}|$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{j-i} \cdot \frac{\lambda_j\lambda_{j-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i+1}}{(\lambda_j + \lambda_{j+1})(\lambda_{j-1} + \lambda_j) \cdot \ldots \cdot (\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2})}|a_{i,i}| \le$$

$$4q^{j-i} \cdot \frac{\lambda_{i+1} \cdot \ldots \cdot \lambda_j}{(\lambda_i + \lambda_{i+1})(\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}) \cdot \ldots \cdot (\lambda_{j-1} + \lambda_j)(\lambda_j + \lambda_{j+1})},$$

откуда используя неравенство

$$(\lambda_i+\lambda_{i+1})(\lambda_{i+1}+\lambda_{i+2})\cdot\ldots\cdot(\lambda_{j-1}+\lambda_j)(\lambda_j+\lambda_{j+1})\geq(\lambda_i+\ldots+\lambda_{j+1})\lambda_{i+1}\cdot\ldots\cdot\lambda_j$$

(член $\lambda_k\cdot\lambda_{i+1}\cdot\ldots\cdot\lambda_j$ получается умножая вторые слагаемые первых $k-i$ скобок с первыми слагаемыми остальных скобок) получим первое неравенство в (3.7). Второе неравенство в (3.7) доказывается аналогично.

Утверждение 3.2. *Пусть* $1\leq p\leq+\infty$. *Тогда*

$$\left\|\sum_{j=-m}^{n}a_jN_j\right\|_p\sim\left(\sum_{j=-m}^{n}|a_j|^p(\lambda_j+\lambda_{j+1})\right)^{1/p}=\left\|\left(a_j(\lambda_j+\lambda_{j+1})^{\frac{1}{p}}\right)_{j=-m}^{n}\right\|_{\ell^p}\tag{3.9}$$

и

(3.10)

$$\left\|\sum_{j=-m}^{n}a_jN_j^*\right\|_p\sim\left(\sum_{j=-m}^{n}|a_j|^p(\lambda_j+\lambda_{j+1})^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}}=\left\|\left(a_j(\lambda_j+\lambda_{j+1})^{1/p-1}\right)_{j=-m}^{n}\right\|_{\ell^p}.$$

Неравенство (3.9) является Леммой 4.2 из [7], глава 5, которое говорит о L^p стабильности B-сплайнов, а неравенство (3.10) вытекает из знаменитого результата А. Шадрина [17] о гипотезе де Боора (для вывода неравенства (3.10) из этого результата см. [5]).

3.2. **Оценки функции Франклина.** Пусть $\mathcal{T}$ разбиение действительной оси: $\mathcal{T}=(\tau_{-m-1}<\ldots<\tau_0<\ldots<\tau_{n+1})$, где $m,n\geq-1$, а $\tilde{\mathcal{T}}$ получается из $\mathcal{T}$ отбрасыванием τ_0. Через $(\tilde{N}_i,-m\leq i\leq n-1)$ обозначим B-сплайны соответствующие $\tilde{\mathcal{T}}$. Связь между функциями N_i и $\tilde{N}_i$ следующая:

$$\tilde{N}_i(t)=\begin{cases}N_i(t), & \text{для}\quad -m\leq i\leq-2,\\ N_{-1}(t)+\frac{\tau_1-\tau_0}{\tau_1-\tau_{-1}}N_0(t), & \text{для}\quad i=-1,\\ N_1(t)+\frac{\tau_0-\tau_{-1}}{\tau_1-\tau_{-1}}N_0(t), & \text{для}\quad i=0,\\ N_{i+1}(t), & \text{для}\quad 1\leq i\leq n-1.\end{cases}\tag{3.11}$$

Через $M_i(t)$ обозначим функции $N_i(t)$ в L^1 нормировке, а

$$B_i(t)=M_i(t)-M_{i-1}(t),\text{ где }-m+1\leq i\leq n.$$

Обозначим $\Delta=[\tau_{-m-1},\tau_{n+1}]$. Пространство кусочно-линейных с узлами из $\mathcal{T}$ и непрерывных функций с нулевыми средними, обращающиеся в ноль вне $\Delta=[\tau_{-m-1},\tau_{n+1}]$ обозначим через S^0.

Аналогично определяются функции $\widetilde{M}_i$, $\widetilde{B}_i$ и пространство $\widetilde{S}^0$. Для того, чтобы определить функцию ортогональную к $\widetilde{S}^0$ принадлежащую пространству S^0 с L^2 нормой равной 1, определим функцию $\varphi \in S^0 = span\{B_i : -m+1 \leq i \leq n\}$, которая ортогональна $\widetilde{S}^0$. Функцию φ будем искать в следующем виде

$$\varphi = \sum_{j=-m}^{n} \alpha_j N_j^*,$$

где система $(N_j^*)_{j=-m}^n$ биортогональна к $(N_j)_{j=-m}^n$ (см. (3.1)).

Для того, чтобы φ была ортогональной к $\widetilde{S}^0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$(\varphi, \widetilde{B}_i) = 0, \text{ при } -m+1 \leq i \leq n-1,$$

последнее равносильно независимости $\langle \varphi, \widetilde{M}_i \rangle$ от i. Будем считать, что $\langle \varphi, \widetilde{M}_i \rangle = 2$. Следовательно $\alpha_i = 2 \cdot \|N_i\|_1 = \lambda_i + \lambda_{i+1}$, для $i \leq -2$ и $i \geq 2$. Обозначая $a = \frac{\alpha_0}{\lambda_0 + \lambda_1} - 1$, из (3.11) получим следующее представление для φ:

$$\varphi = \sum_{j=-m}^{n} (\lambda_j + \lambda_{j+1}) N_j^* + a\left((\lambda_0 + \lambda_1) N_0^* - \lambda_0 N_1^* - \lambda_1 N_{-1}^*\right). \tag{3.12}$$

Пусть $\varphi_1(t) = \sum\limits_{j=-m}^{n} (\lambda_j + \lambda_{j+1}) N_j^*(t)$, $\varphi_2(t) = \varphi(t) - \varphi_1(t)$ и

$$F = \frac{\varphi}{\|\varphi\|_2}, \quad f_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi\|_2}, \quad f_2 = \frac{\varphi_2}{\|\varphi\|_2}.$$

Ясно, что функция $F \in S^0$, ортогональна $\widetilde{S}^0$, т.е. F это функция Франклина с нулевым средним. Чтобы сформулировать оценки для функций f_1, f_2 нам понадобятся некоторые обозначения.

Следуя работе Г. Г. Геворкяна и А. Камонт [9] мы каждой функции будем ассоциировать канонический интервал J следующим образом. Пусть I^* есть наикратчайший из интервалов $[\tau_{-2}, \tau_0]$, $[\tau_{-1}, \tau_1]$, $[\tau_0, \tau_2]$. Пусть $I^* = [\tau_i, \tau_{i+2}]$. Через J обозначим тот из отрезков $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $[\tau_{i+1}, \tau_{i+2}]$, который имеет наибольшую длину.

Через $d(x, y)$ обозначим количество точек из $\mathcal{T} = (\tau_{-m-1} < \ldots < \tau_0 < \ldots < \tau_{n+1})$, которые принадлежат $[x, y]$, а через $d(x)$ обозначим количество точек из $\mathcal{T}$ между x и J.

Для отрезка $I = [x, y]$ через $e(I)$ обозначим $\min(d(\tau_{-m-1}, x), d(y, \tau_{n+1}))$, а через $d(I)$ обозначим $\min(d(x), d(y))$. При этих обозначениях имеем следующее утверждение.

Утверждение 3.3. *Функция $F \in S^0$ ортогональна $\widetilde{S}^0$. Кроме того для последовательности $\mathcal{T}$ сильно регулярной по парам на R с параметром γ для функций f_1, f_2 разложение F в сумму имеют следующие оценки:*

$$a)\quad |f_1(x)| \lesssim_\gamma \frac{|J|^{1/2}}{|\Delta|} q^{e(J)}, \qquad b)\quad |f_1(x) - f_1(y)| \lesssim_\gamma \frac{|J|^{1/2}}{|\Delta|} q^{e([x,y])+e(J)}, \tag{3.13}$$

$$|f_2(x)| \lesssim \frac{|J|^{1/2}}{|J| + \mathrm{dist}(x, J)} \cdot q^{d(x)}, \tag{3.14}$$

$$|f_2(\tau_0)|, |f_2(\tau_{\pm 1})| \sim_\gamma |J|^{-1/2} \text{ и } \mathrm{sgn} f_2(\tau_i) = (-1)^i \mathrm{sgn} f_2(\tau_0). \tag{3.15}$$

Отметим, что функция f_2 в разложении $F = f_1 + f_2$ имеет некоторые общие свойства с общей функцией Франклина определенной на $[0,1]$. Например, для общей функции Франклина на $[0,1]$ неравенства типа (3.14) также удовлетворяются и она также меняет свой знак на каждом интервале линейности как и f_2 (см. (3.15)). Соответствующие свойства общей функции Франклина доказаны в [9]. Для доказательства этого свойства, нам понадобится оценка для a из равенства (3.12).

Лемма 3.1. *При принятых обозначениях и для последовательности $\mathcal{T}$ сильно регулярной по парам на R с параметром γ имеем:*

$$|a| \gtrsim_\gamma \frac{|\Delta|}{|J|} q^{-e(J)} \gtrsim 1. \tag{3.16}$$

Доказательство. Сперва докажем следующее неравенство

$$\int_R \sum_{j=-m}^{n} (\lambda_j + \lambda_{j+1}) N_j^*(t) dt \geq \sum_{j=-m}^{n+1} \lambda_j = |\Delta|. \tag{3.17}$$

Действительно, из

(3.18)

$$\int_R N_j^*(t) dt = \sum_{i=-m}^{n} \langle N_j^*, N_i \rangle + \langle N_j^*, N_{-m-1} \rangle + \langle N_j^*, N_{n+1} \rangle = 1 + \frac{\lambda_{-m}}{6} a_{j,-m} + \frac{\lambda_{n+1}}{6} a_{j,n}$$

и $\sum_{j=-m}^{n} (\lambda_j + \lambda_{j+1}) a_{j,k} = 2 \int_R N_k^*(t) dt$ получим, что

$$\int_R \sum_{j=-m}^{n} (\lambda_j + \lambda_{j+1}) N_j^*(t) dt =$$

$$= \sum_{j=-m}^{n} (\lambda_j + \lambda_{j+1}) + \frac{\lambda_{-m}}{3} \left(1 + \frac{\lambda_{-m}}{6} a_{-m,-m} + \frac{\lambda_{n+1}}{6} a_{-m,n}\right) +$$

$$+\frac{\lambda_{n+1}}{3}\left(1+\frac{\lambda_{-m}}{6}a_{n,-m}+\frac{\lambda_{n+1}}{6}a_{n,n}\right)\geq\sum_{j=-m}^{n+1}\lambda_j=|\Delta|,$$

где последнее неравенство имеет место в силу (3.8).

Воспользовавшись (3.18) и (3.5) получим, что

$$\left|\int_R((\lambda_0+\lambda_1)N_0^*(t)-\lambda_0N_1^*(t)-\lambda_1N_{-1}^*(t))\mathrm{d}t\right|=$$

$$\left|\frac{\lambda_{-m}}{6}((\lambda_0+\lambda_1)a_{0,-m}-\lambda_0a_{1,-m}-\lambda_1a_{-1,-m})+\frac{\lambda_{n+1}}{6}((\lambda_0+\lambda_1)a_{0,n}-\right.$$

$$\left.-\lambda_0a_{1,n}-\lambda_1a_{-1,n})\right|\leq(\lambda_0+\lambda_1)|\Delta|\max(|a_{-1,-m}|,|a_{1,n}|),$$

откуда, используя (3.8), сильную регулярность по парам на R последовательности $\mathcal{T}$ и определение интервала J, получим

$$\left|\int_R((\lambda_0+\lambda_1)N_0^*(t)-\lambda_0N_1^*(t)-\lambda_1N_{-1}^*(t))\mathrm{d}t\right|\lesssim\frac{(\lambda_0+\lambda_1)|\Delta|q^{\min(m,n)}}{\min(\lambda_{-m}+\lambda_{-m+1},\lambda_{n+1}+\lambda_n)}$$

$$\lesssim_\gamma(\lambda_0+\lambda_1)q^{\min(m,n)}\lesssim_\gamma|J|q^{\nu(J)}.$$

Так как $\varphi\in S^0$, поэтому $\int_R\varphi(t)\mathrm{d}t=0$, откуда используя равенство (3.12) вместе с последним неравенством и (3.17) получим (3.16).

Доказательство Утверждения 3.3. Сперва докажем

$$\|\varphi\|_2\sim_\gamma|a|(\lambda_0+\lambda_1)^{1/2}\sim_\gamma|a||J|^{1/2}. \tag{3.19}$$

Заметим, что из сильной регулярности по парам на R следует $|J|\sim_\gamma\lambda_j+\lambda_{j+1}$, где $j=-1,0,1$. Откуда, используя (3.10) получим, что

(3.20)

$$\|\varphi_1\|_2\sim\left(\sum_{j=-m}^{n}(\lambda_j+\lambda_{j+1})\right)^{\frac12}\sim|\Delta|^{\frac12},\quad\|\varphi_2\|_2\sim|a|\left(\sum_{j=-1}^{1}(\lambda_j+\lambda_{j+1})\right)^{\frac12}\sim_\gamma|a||J|^{\frac12}.$$

Из этого, используя (3.16), получим оценку сверху для $\|\varphi\|_2$

$$\|\varphi\|_2\leq\|\varphi_1\|_2+\|\varphi_2\|_2\lesssim_\gamma|a||J|^{1/2}.$$

Чтобы оценить $\|\varphi\|_2$ снизу рассмотрим два случая:

Случай 1: $|a|\geq C\cdot\left(\frac{|\Delta|}{|J|}\right)^{1/2}$, где постоянную C выберем чуть позже. Из (3.20) имеем $\|\varphi_1\|_2\leq C_1|\Delta|^{1/2}$ и $\|\varphi_2\|_2\geq c_\gamma|a||J|^{1/2}$. Выбрав $C>2\frac{C_1}{c_\gamma}$, будем иметь

$$\|\varphi\|_2\geq\|\varphi_2\|_2-\|\varphi_1\|_2\gtrsim_\gamma|a||J|^{1/2}.$$

Случай 2: $|a| \le C \cdot \left(\frac{|\Delta|}{|J|}\right)^{1/2}$. Из (3.10) и сильной регулярности по парам на R, получаем

$$\|\varphi\|_2^2 \gtrsim \sum_{\substack{-m\le j\le n\\ j\ne -1,0,1}} (\lambda_j + \lambda_{j+1}) \gtrsim_\gamma |\Delta| \gtrsim |a|^2|J|,$$

что и завершает доказательство (3.19).

Используя (3.19) и (3.16), будем иметь

$$\|\varphi\|_2 \gtrsim |a||J|^{1/2} \gtrsim_\gamma \frac{|\Delta|}{|J|^{1/2}} q^{-e(J)}. \tag{3.21}$$

Из (3.10) следует, что $\|\varphi_1\|_\infty \lesssim 1$, откуда, используя (3.21), получим (3.13a).

Теперь докажем (3.13b). Функция $f_1(x)$ кусочно линейная, поэтому достаточно доказать (3.13b), где x и y являются узлами. Используя (3.1) получаем

$$\varphi_1(\tau_k) = \sum_{j=-m}^{n} (\lambda_j + \lambda_{j+1}) N_j^*(\tau_k) = \sum_{j=-m}^{n} a_{k,j}(\lambda_j + \lambda_{j+1})$$

$$= 2\sum_{j=-m}^{n} a_{k,j} \int_R N_j(t)\mathrm{d}t = 2\int_R N_k^*(t)\mathrm{d}t,$$

откуда, воспользовавшись (3.18) и (3.8), будем иметь

$$|\varphi_1(\tau_k) - \varphi_1(\tau_l)| = \left|\frac{\lambda_{-m}}{3}a_{k,-m} + \frac{\lambda_{n+1}}{3}a_{k,n} - \frac{\lambda_{-m}}{3}a_{l,-m} - \frac{\lambda_{n+1}}{3}a_{l,n}\right| \le$$

$$\le 2(q^{k+m} + q^{n-k} + q^{l+m} + q^{n-l}) \le 8q^{e([\tau_k,\tau_l])}.$$

Используя (3.21), из последнего неравенства получим $|f_1(\tau_k) - f_1(\tau_l)| \lesssim_\gamma \frac{|J|^{1/2}}{|\Delta|} \times$ $\times q^{e([\tau_k,\tau_l])+e(J)}$.

Теперь докажем неравенство (3.14). Из (3.19) следует, что

$$|f_2(\tau_i)| \lesssim_\gamma ((\lambda_0 + \lambda_1)|a_{0,i}| + \lambda_0|a_{1,i}| + \lambda_1|a_{-1,i}|)\frac{1}{|J|^{1/2}},$$

откуда, используя (3.7) и сильную регулярность по парам на R последовательности $\mathcal{T}$ с параметром γ, получим для $i \ge 0$

$$|f_2(\tau_i)| \lesssim_\gamma \frac{q^i}{\lambda_{-1} + \ldots + \lambda_{i+1}} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{|J|^{1/2}}.$$

Из определения интервала J имеем $\lambda_0 + \lambda_1 \lesssim_\gamma |J|$, следовательно из линейности f_2 на $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, будем иметь для $x \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$

$$|f_2(x)| \le \max\left(|f_2(\tau_{i-1})|, |f_2(\tau_i)|\right) \lesssim_\gamma \frac{|J|^{1/2}q^i}{\lambda_{-1} + \ldots + \lambda_{i+1}} \lesssim \frac{|J|^{1/2}q^{d(x)}}{|J| + \mathrm{dist}(x, J)}.$$

Аналогично доказывается оценка для $x \le \tau_0$.

$$+\frac{\lambda_{n+1}}{3}\left(1+\frac{\lambda_{-m}}{6}a_{n,-m}+\frac{\lambda_{n+1}}{6}a_{n,n}\right)\geq\sum_{j=-m}^{n+1}\lambda_j=|\Delta|,$$

где последнее неравенство имеет место в силу (3.8).

Воспользовавшись (3.18) и (3.5) получим, что

$$\left|\int_R((\lambda_0+\lambda_1)N_0^*(t)-\lambda_0 N_1^*(t)-\lambda_1 N_{-1}^*(t))\mathrm{d}t\right|=$$

$$\left|\frac{\lambda_{-m}}{6}((\lambda_0+\lambda_1)a_{0,-m}-\lambda_0 a_{1,-m}-\lambda_1 a_{-1,-m})+\frac{\lambda_{n+1}}{6}((\lambda_0+\lambda_1)a_{0,n}-\right.$$

$$\left.-\lambda_0 a_{1,n}-\lambda_1 a_{-1,n})\right|\leq(\lambda_0+\lambda_1)|\Delta|\max(|a_{-1,-m}|,|a_{1,n}|),$$

откуда, используя (3.8), сильную регулярность по парам на R последовательности $\mathfrak{T}$ и определение интервала J, получим

$$\left|\int_R((\lambda_0+\lambda_1)N_0^*(t)-\lambda_0 N_1^*(t)-\lambda_1 N_{-1}^*(t))\mathrm{d}t\right|\lesssim\frac{(\lambda_0+\lambda_1)|\Delta|q^{\min(m,n)}}{\min(\lambda_{-m}+\lambda_{-m+1},\lambda_{n+1}+\lambda_n)}$$

$$\lesssim_\gamma(\lambda_0+\lambda_1)q^{\min(m,n)}\lesssim_\gamma|J|q^{r(J)}.$$

Так как $\varphi\in S^0$, поэтому $\int_R\varphi(t)\mathrm{d}t=0$, откуда используя равенство (3.12) вместе с последним неравенством и (3.17) получим (3.16).

Доказательство Утверждения 3.3. Сперва докажем

$$\|\varphi\|_2\sim_\gamma|a|(\lambda_0+\lambda_1)^{1/2}\sim_\gamma|a||J|^{1/2}. \tag{3.19}$$

Заметим, что из сильной регулярности по парам на R следует $|J|\sim_\gamma\lambda_j+\lambda_{j+1}$, где $j=-1,0,1$. Откуда, используя (3.10) получим, что

$$\|\varphi_1\|_2\sim\left(\sum_{j=-m}^{n}(\lambda_j+\lambda_{j+1})\right)^{\frac{1}{2}}\sim|\Delta|^{\frac{1}{2}},\quad\|\varphi_2\|_2\sim|a|\left(\sum_{j=-1}^{1}(\lambda_j+\lambda_{j+1})\right)^{\frac{1}{2}}\sim_\gamma|a||J|^{\frac{1}{2}}. \tag{3.20}$$

Из этого, используя (3.16), получим оценку сверху для $\|\varphi\|_2$

$$\|\varphi\|_2\leq\|\varphi_1\|_2+\|\varphi_2\|_2\lesssim_\gamma|a||J|^{1/2}.$$

Чтобы оценить $\|\varphi\|_2$ снизу рассмотрим два случая:

Случай 1: $|a|\geq C\cdot\left(\frac{|\Delta|}{|J|}\right)^{1/2}$, где постоянную C выберем чуть позже. Из (3.20) имеем $\|\varphi_1\|_2\leq C_1|\Delta|^{1/2}$ и $\|\varphi_2\|_2\geq c_\gamma|a||J|^{1/2}$. Выбрав $C>2\frac{C_1}{c_\gamma}$, будем иметь

$$\|\varphi\|_2\geq\|\varphi_2\|_2-\|\varphi_1\|_2\gtrsim_\gamma|a||J|^{1/2}.$$

Случай 2: $|a| \le C \cdot \left(\frac{|\Delta|}{|J|}\right)^{1/2}$. Из (3.10) и сильной регулярности по парам на R, получаем

$$\|\varphi\|_2^2 \gtrsim \sum_{\substack{-m\le j\le n\\ j\neq -1,0,1}} (\lambda_j + \lambda_{j+1}) \gtrsim_\gamma |\Delta| \gtrsim |a|^2|J|,$$

что и завершает доказательство (3.19).

Используя (3.19) и (3.16), будем иметь

$$(3.21) \qquad \|\varphi\|_2 \gtrsim |a||J|^{1/2} \gtrsim_\gamma \frac{|\Delta|}{|J|^{1/2}} q^{-e(J)}.$$

Из (3.10) следует, что $\|\varphi_1\|_\infty \lesssim 1$, откуда, используя (3.21), получим (3.13a).

Теперь докажем (3.13b). Функция $f_1(x)$ кусочно линейная, поэтому достаточно доказать (3.13b), где x и y являются узлами. Используя (3.1) получаем

$$\varphi_1(\tau_k) = \sum_{j=-m}^{n} (\lambda_j + \lambda_{j+1}) N_j^*(\tau_k) = \sum_{j=-m}^{n} a_{k,j}(\lambda_j + \lambda_{j+1})$$

$$= 2\sum_{j=-m}^{n} a_{k,j}\int_R N_j(t)\mathrm{d}t = 2\int_R N_k^*(t)\mathrm{d}t,$$

откуда, воспользовавшись (3.18) и (3.8), будем иметь

$$|\varphi_1(\tau_k) - \varphi_1(\tau_l)| = \left|\frac{\lambda_{-m}}{3}a_{k,-m} + \frac{\lambda_{n+1}}{3}a_{k,n} - \frac{\lambda_{-m}}{3}a_{l,-m} - \frac{\lambda_{n+1}}{3}a_{l,n}\right| \le$$

$$\le 2(q^{k+m} + q^{n-k} + q^{l+m} + q^{n-l}) \le 8q^{e([\tau_k,\tau_l])}.$$

Используя (3.21), из последнего неравенства получим $|f_1(\tau_k) - f_1(\tau_l)| \lesssim_\gamma \frac{|J|^{1/2}}{|\Delta|} \times \times q^{e([\tau_k,\tau_l])+e(J)}$.

Теперь докажем неравенство (3.14). Из (3.19) следует, что

$$|f_2(\tau_i)| \lesssim_\gamma ((\lambda_0 + \lambda_1)|a_{0,i}| + \lambda_0|a_{1,i}| + \lambda_1|a_{-1,i}|)\frac{1}{|J|^{1/2}},$$

откуда, используя (3.7) и сильную регулярность по парам на R последовательности $\mathcal{T}$ с параметром γ, получим для $i \ge 0$

$$|f_2(\tau_i)| \lesssim_\gamma \frac{q^i}{\lambda_{-1} + \ldots + \lambda_{i+1}} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{|J|^{1/2}}.$$

Из определения интервала J имеем $\lambda_0 + \lambda_1 \lesssim_\gamma |J|$, следовательно из линейности f_2 на $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, будем иметь для $x \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$

$$|f_2(x)| \le \max(|f_2(\tau_{i-1})|, |f_2(\tau_i)|) \lesssim_\gamma \frac{|J|^{1/2}q^i}{\lambda_{-1} + \ldots + \lambda_{i+1}} \lesssim \frac{|J|^{1/2}q^{d(x)}}{|J| + \mathrm{dist}(x, J)}.$$

Аналогично доказывается оценка для $x \le \tau_0$.

Заметим, что из (3.4) следует $\operatorname{sgn} f_2(\tau_i) = (-1)^i \operatorname{sgn} f_2(\tau_0)$, и чтобы доказать (3.15) нам остается убедиться, что (см. (3.19)) $|\varphi_2(\tau_0)|, |\varphi_2(\tau_{\pm 1})| \gtrsim_\gamma |a|$. Без ограничения общности можем считать, что $\lambda_0 \geq \lambda_1$.

Из (3.4) имеем $|\varphi_2(\tau_i)| \geq |a| \cdot ((\lambda_0 + \lambda_1)|a_{0,i}| + \lambda_0 |a_{1,i}|)$, откуда, используя (3.3), получим $|\varphi_2(\tau_0)| \geq |a| \cdot (\lambda_0 + \lambda_1)|a_{0,0}| \geq 3|a|$, и $|\varphi_2(\tau_1)| \geq |a| \cdot \lambda_0 |a_{1,1}| \geq \frac{|a|}{2}(\lambda_0 + \lambda_1)|a_{1,1}| \gtrsim_\gamma |a| \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)|a_{1,1}| \gtrsim |a|$, а также, принимая во внимание, что (см.(3.6)) $4(\lambda_0 + \lambda_{-1})|a_{0,-1}| \geq 2\lambda_0 a_{0,0} \geq (\lambda_0 + \lambda_1) a_{0,0} \geq 3$, получим

$$|\varphi_2(\tau_{-1})| \geq |a| \cdot (\lambda_0 + \lambda_1)|a_{0,-1}| \gtrsim_\gamma |a|(\lambda_0 + \lambda_{-1})|a_{0,-1}| \geq |a|.$$

Утверждение 3.3 доказано.

3.3. Некоторые свойства канонических интервалов. Пусть $\mathcal{T} = (t_n, n \geq 0)$ допустимая последовательность точек. Через $J_n, \Delta_n, f_{n,1}, f_{n,2}, c_n, d_n$ обозначим интервалы, функции и величины соответствующие функции F_n и $\mathcal{T}_n = (t_i : 0 \leq i \leq n)$. Более того пусть $(\tau_{n,i})_{i=0}^n$ получается из $(t_i)_{i=0}^n$ перестановкой в порядке возрастания, т.е.

$$(\tau_{n,i} : 0 \leq i \leq n) = (t_i : 0 \leq i \leq n) \quad \text{и} \quad \tau_{n,0} < \tau_{n,1} < \ldots < \tau_{n,n}.$$

Для $n \geq 4$ и для $0 \leq i \leq n-1$ обозначим $D_{n,i} = [\tau_{n,i}, \tau_{n,i+1}]$, а множество всех $D_{n,i}$ через $\mathcal{D}$, т.е. $\mathcal{D} = \{D_{n,i} : 0 \leq i \leq n-1, n \geq 4\}$.

Через $\mathcal{J}_n$ обозначим отрезок линейности F_n, у которого левый конец t_n, когда t_n не является правым концом Δ_n, в противном случае через $\mathcal{J}_n$ обозначим отрезок линейности F_n, у которого правый конец t_n. Длину отрезка $\mathcal{J}_n$ обозначим через λ_n.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{T}$ допустимая последовательность узлов из R сильно регулярная на R с параметром γ, а $(F_n, n \geq 2)$ соответствующая система функций Франклина с нулевыми средними. Для фиксированного интервала $\Delta = D_{n,i}$ и для n, i и $k \geq 0$ положим $N(\Delta, k) = \{n \geq 0 : F_n$ линейна на Δ и $d_n(\Delta) = k\}$. Тогда*

$$\sum_{n \in N(\Delta, k)} \frac{|J_n|}{|J_n| + \operatorname{dist}(J_n, \Delta)} \lesssim_\gamma k + 1.$$

Лемма 3.3. *Пусть $\mathcal{T}$ допустимая последовательность узлов из R сильно регулярная на R с параметром γ, а $I_1 \supset I_2 \ldots \supset I_n \supset \ldots$ различные интервалы из семейства $\mathcal{D}$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \lesssim_\gamma |I_1|.$$

Лемма 3.2 взята из [10] (см. Лемму 3.4), а Лемма 3.3 следует из того, что длина отрезков уменьшается как геометрическая прогрессия. Отметим, что для вложенного семейства канонических отрезков, несмотря на то, что некоторым различным функциям Франклина на R с нулевым средним может соответствовать один и тот же канонический интервал, сумма их длин также будет сопоставима самому длинному каноническому интервалу из этого семейства, даже если допустимая последовательность не является сильно регулярной по парам на R, однако, здесь мы можем обойтись без этого свойства.

Замечание 3.1. *При различных n и m, интервалы $\mathcal{I}_n$ и $\mathcal{I}_m$ не могут совпадать. Поэтому в силу Леммы 3.3 для сильно регулярной последовательности на R с параметром γ при $\mathcal{I}_{n_1} \supset \mathcal{I}_{n_2} \supset \ldots \supset \mathcal{I}_{n_k} \supset \ldots$ имеем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n_k} \lesssim_\gamma \lambda_{n_1}.$$

3.4. **Пространство Харди $H^1(R)$.** Следуя Койфману и Вейссу [6], функцию $a(x)$ назовем q-атомом, если существует отрезок I такой, что

(i) supp $a \subset I$, (ii) $\|a\|_q \leq |I|^{1/q-1}$, (iii) $\int_R a(x)\mathrm{d}x = 0$.

Определение 3.1. *Пространство всех функций $f \in L^1(R)$, представимые в виде $f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j$, где a_j являются q-атомами и $\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| < \infty$, обозначим $H^{1,q}$. Норма для $f \in H^{1,q}$ определена следующим образом:*

$$\|f\|_{H^{1,q}} := \inf \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| : f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j, \text{ где } a_j \text{ есть } q-\text{атомы} \right\}.$$

Равенство $H^{1,q} = H^{1,\infty}$, для $1 < q < \infty$ с эквивалентными нормами является фундаментальным фактом в теории пространств Харди (см. Теорему А в [6]).

Одно из преимуществ представления $H^1(R)$ в виде атомических разложений ощутимо при исследовании вопросов ограниченности операторов Кальдерона-Зигмунда на H^1. Очевидно, что оператор T будет ограниченным, если T отображает атомы в атомы. Койфман и Веисс заметили, что для определенного класса операторов T, при всех атомах a, функция Ta имеет схожую с атомами структуру, которую они назвали *молекулой*. Дадим определение молекулы.

Определение 3.2. *Для данного $\varepsilon > 0$, назовем $m(x)$ ε-молекулой для $H^1(R)$ с центром x_0, если*

$$\int_R |m(x)|^2 \mathrm{d}x \left(\int_R |m(x)|^2 |x - x_0|^{1+\varepsilon} \mathrm{d}x \right)^{1/\varepsilon} \leq 1 \text{ и } \int_R m(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Ясно, что каждый 2-атом является ε-молекулой для всякого $\varepsilon > 0$. Более важно, что $\|m\|_{H^1} \le c$ для всех ε-молекул m (см. [6]). Следующий результат [6] сыграет важную роль при доказательстве теоремы 2.2.

Утверждение 3.4. *Пусть $T : L^2(R) \to L^2(R)$ ограниченный оператор заданный*

$$(Tf)(x) = \int_R K(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

Если для всех 2-атомов a имеет место равенство $\int_R (Ta)(x)\mathrm{d}x = 0$ и если существует $\varepsilon > 0$, для которого ядро $K(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет

$$|K(x,y) - K(x',y)| \le C\frac{|x-x'|^\varepsilon}{|x-y|^{1+\varepsilon}},$$

для всех $C|x-x'| < |x-y|$, тогда для некоторой константы c произведение $c \cdot Ta$ является ε-молекулой для всех атомов a.

4. Гладкость ядра K_ω

Основная цель этого параграфа является доказательство следующего утверждения.

Утверждение 4.1. *Пусть $\mathfrak{T}$ сильно регулярная последовательность на R с параметром γ, а $K_\omega(x,y) := \sum_{n=2}^\infty \omega_n F_n(x)F_n(y)$, где $\omega \in \{-1,1\}^N$. Тогда существует постоянные $\varepsilon > 0$ и C_γ такие, что*

$$|K_\omega(x,y) - K_\omega(x',y)| \le C_\gamma\frac{|x-x'|^\varepsilon}{|x-y|^{1+\varepsilon}},$$

для всех $(2\gamma^2+1)|x-x'| < |x-y|$.

Введем следующие обозначения

$K_{1,\omega}(x,y) := \sum_{n=2}^\infty \omega_n f_{n,1}(x)f_{n,1}(y)$, $\quad K_{2,\omega}(x,y) := \sum_{n=2}^\infty \omega_n f_{n,2}(x)f_{n,1}(y)$,
$K_{3,\omega}(x,y) := \sum_{n=2}^\infty \omega_n f_{n,1}(x)f_{n,2}(y)$, $\quad K_{4,\omega}(x,y) := \sum_{n=2}^\infty \omega_n f_{n,2}(x)f_{n,2}(y)$.

Возьмем $\frac{2}{3} = q < q_1 < 1$, тогда существует $\alpha > 0$ такая, что $\gamma^\alpha < \frac{1}{q_1}$.

Для доказательства утверждения 4.1 нам понадобится следующие леммы.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathfrak{T}$ сильно регулярная последовательность на R с параметром γ. Тогда существует постоянная C_γ такая, что*

$$|K_{i,\omega}(x,y) - K_{i,\omega}(x',y)| \le C_\gamma\frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}},$$

для всех $(\gamma+1)|x-x'| < |x-y|$, $i = 1,2,3$.

Лемма 4.2. *Пусть $\mathfrak{T}$ сильно регулярная последовательность на R с параметром γ. Тогда существует постоянная C_γ такая, что*

$$|K_{1,\omega}(x,y) - K_{1,\omega}(x',y)| \le C_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}},$$

для всех $(2\gamma^2+1)|x-x'| < |x-y|$.

Очевидно, что Утверждение 4.1 с $\epsilon = \alpha$ следует из Лемм 4.1 и 4.2.

Доказательство Леммы 4.1 для $\iota = 1$. Без ограничения общности будем считать, что $x < x' < y$. Введем следующие обозначения:

$$n_0 = \min\{n : \Delta_n \supset [x', y]\}, \quad n_1 = \min\{n \ge n_0 : d_n(x, x')) \ge 2\}.$$

Ясно, что $n_0 \le n_1$ и $\sum_{n<n_0} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)| = 0$. Обозначим

$$I = \sum_{n_0 \le n < n_1} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)|, \quad K = \sum_{n \ge n_1} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)|.$$

Заметим, что $|K_{1,\omega}(x,y) - K_{1,\omega}(x',y)| \le I + K$. Достаточно доказать, что

$$I, K \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}. \tag{4.1}$$

Начнем с оценки для I. Разобьем множество $\{n : n_0 \le n < n_1\}$ на две части:
$T_1 = \{n : n_0 \le n < n_1,\ e_n([x,x']) = d_n(\tau_{n,0}, x)\}$,
$T_2 = \{n : n_0 \le n < n_1,\ e_n([x,x']) = d_n(x', \tau_{n,n})\}$.
Ясно, что $I = I_1 + I_2$, где

$$I_\iota = \sum_{n \in T_\iota} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)|.$$

Через $\Gamma_{n,x}$ обозначим интервал линейности функции F_n, который содержит точку x. Так как $|f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \le |x - x'| \max_{x \in [x,x']} |f'_{n,1}(x)|$, следовательно из сильной регулярности последовательности $\mathfrak{T}$ на R и (??), (3.13), получим

$$I_1 \lesssim_\gamma \sum_{n \in T_1} \frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|} \frac{|J_n|}{|\Delta_n|^2} \cdot q^{e_n([x,x'])+e_n(J_n)} \lesssim_\gamma \sum_{n \in T_1} \frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|} \frac{\lambda_n}{|\Delta_n|^2} \cdot q^{e_n([x,x'])+e_n(J_n)} \tag{4.2}$$

Заметим, что при фиксированном $e_n([x,x'])$ из сильной регулярности последовательности $\mathfrak{T}$ на R имеем

$$\min_{n \in T_1,\ e_n([x,x'])=k} |\Delta_n| \sim_\gamma \max_{n \in T_1,\ e_n([x,x'])=k} |\Delta_n|. \tag{4.3}$$

Действительно, при $n \in T_1, e_n([x,x']) = k$ количество точек левее x из $\mathfrak{T}_n$ остается неизменным (как и отрезок $[\tau_{n,0}, \tau_{n,1}]$), поэтому из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R будем иметь, что $\max|\Delta_n| \sim_\gamma \max|\tau_{n,1} - \tau_{n,0}| = \min|\tau_{n,1} - \tau_{n,0}| \sim_\gamma \min|\Delta_n|$. Из (4.3) и Замечания 3.1 будем иметь

$$(4.4)\qquad \sum_{n\in T_1,\ e_n([x,x'])=k} \frac{\lambda_n}{|\Delta_n|} \le \frac{\sum\limits_{n:\ e_n([x,x'])=k} \lambda_n}{\min|\Delta_n|} \lesssim_\gamma 1.$$

Из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R следует, что

$$\left(\frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^{1-\alpha} \lesssim_\gamma 1 \text{ и } \left(\frac{|\Delta_n|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^{\alpha} \lesssim_\gamma \gamma^{\alpha\cdot e_n([x,x'])} \le \frac{1}{q_1^{e_n([x,x'])}}.$$

Комбинируя эти неравенства с (4.2), (4.4) получим

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n\in T_1,\ e_n([x,x'])=k} \left(\frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^{\alpha} \frac{\lambda_n}{|\Delta_n|}\frac{1}{|x-y|}\cdot q^k \\ &\lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n\in T_1,\ e_n([x,x'])=k} \left(\frac{|\Delta_n|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^{\alpha} \frac{\lambda_n}{|\Delta_n|}\cdot q^k \\ &\lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{q}{q_1}\right)^k \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Аналогичную оценку можно получить и для I_2, что завершит доказательство оценки (4.1) для I. Теперь перейдем к оцениванию K. Разобьем множество $\{n : n \ge n_1\}$ на две части:

$$S_1 = \{n : n \ge n_1,\ e_n([x,x']) = d_n(\tau_{n,0}, x)\},\ S_2 = \{n : n \ge n_1,\ e_n([x,x']) = d_n(x', \tau_{n,n})\}.$$

Ясно, что $K = K_1 + K_2$, где

$$K_i = \sum_{n\in S_i} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)|.$$

Из (3.12), (3.13) и сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R следует

$$(4.5)\qquad K_1 \lesssim_\gamma \sum_{n\in S_1} \frac{|J_n|}{|\Delta_n|^2}\cdot q^{e_n([x,x'])+e_n(J_n)} \lesssim_\gamma \sum_{n\in S_1} \frac{\lambda_n}{|\Delta_n|^2}\cdot q^{e_n([x,x'])+e_n(J_n)}.$$

Заметим, что при фиксированном $e_n([x,x'])$ аналогично (4.4) будем иметь

$$(4.6)\qquad \sum_{n\in S_1,\ e_n([x,x'])=k} \frac{\lambda_n}{|\Delta_n|} \le \frac{\sum\limits_{n\in S_1,\ e_n([x,x'])=k} \lambda_n}{\min|\Delta_n|} \lesssim_\gamma 1.$$

Из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R следует, что

$$\left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)^{\alpha} \ge \left(\frac{|x-x'|}{|\Delta_n|}\right)^{\alpha} \gtrsim_\gamma q_1^{e_n([x,x'])}.$$

Комбинируя последнее неравенство с (4.5), (4.6) получим

$$K_1 \lesssim_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{n\in S_1,\\ e_n([x,x'])=k}} \frac{\lambda_n}{|\Delta_n|}\frac{1}{|x-y|}\cdot\left(\frac{q}{q_1}\right)^k\left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)^{\alpha}$$

$$\lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^{\alpha}}{|x-y|^{1+\alpha}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{q}{q_1}\right)^k \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^{\alpha}}{|x-y|^{1+\alpha}}.$$

Аналогичную оценку можно получить и для K_2, что завершит доказательство оценки (4.1) для K. Лемма 4.1 для $i=1$ доказана.

Доказательство Леммы 4.1 для $i = 2$. Без ограничения общности будем считать, что $x < x' < y$. Ясно, что $n_0 \le n_1$ и $\sum_{n<n_0}|f_{n,2}(x)-f_{n,2}(x')|\cdot|f_{n,1}(y)| = 0$. Обозначим

$$I = \sum_{n_0\le n<n_1}|f_{n,2}(x)-f_{n,2}(x')|\cdot|f_{n,1}(y)|,\ K = \sum_{n\ge n_1}|f_{n,2}(x)-f_{n,2}(x')|\cdot|f_{n,1}(y)|.$$

Заметим, что $|K_{2,\omega}(x,y)-K_{2,\omega}(x',y)| \le I + K$. Докажем, что

$$I, K \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^{\alpha}}{|x-y|^{1+\alpha}}. \tag{4.7}$$

Начнем с оценки для I. Разобьем множество $\{n : n_0 \le n < n_1\}$ на две части:
$T_1 = \{n : n_0 \le n < n_1,\ e_n(J_n) = d_n(\tau_{n,0}, \min J_n)\}$,
$T_2 = \{n : n_0 \le n < n_1,\ e_n(J_n) = d_n(\max J_n, \tau_{n,n})\}$.
Ясно, что $I = I_1 + I_2$, где

$$I_i = \sum_{n\in T_i}|f_{n,2}(x)-f_{n,2}(x')|\cdot|f_{n,1}(y)|.$$

Через $\Gamma_{n,x}$ обозначим интервал линейности функции F_n, который содержит точку x. Так как $|f_{n,2}(x)-f_{n,2}(x')| \le |x-x'|\max_{x\in[x,x']}|f'_{n,2}(x)|$, следовательно из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R и (3.13), (3.14), получим

$$I_1 \lesssim_\gamma \sum_{n\in T_1}\frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|}\frac{|J_n|}{|\Delta_n|\cdot(|J_n|+\operatorname{dist}(x,J_n))}\cdot q^{e_n(J_n)+d_n(x)} \tag{4.8}$$

Заметим, что для $n\in T_1$ при фиксированных $e_n(J_n) = l$, $d_n(x) = s$ количество точек слева точки x равно $l+s$ или $l-s$, откуда применяя Лемму 3.2 по отдельности в обеих случаях для интервала $\Delta = \Gamma_{n,x}$, получим

$$\sum_{\substack{n\in T_1\\ e_n(J_n)=l,\ d_n(x)=s}}\frac{|J_n|}{|J_n|+\operatorname{dist}(x,J_n)} \lesssim_\gamma l+s+1. \tag{4.9}$$

Из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R следует, что

$$\left(\frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^{1-\alpha} \lesssim_\gamma 1 \text{ и } \left(\frac{|\Delta_n|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^{\alpha} \lesssim_\gamma \gamma^{\alpha\cdot(e_n(J_n)+d_n(x))} \leq \frac{1}{q_1^{e_n(J_n)+d_n(x)}}.$$

Комбинируя эти неравенства с (4.8), (4.9) получим

$$I_1 \lesssim_\gamma \sum_{l,s=1}^{\infty} \sum_{\substack{n\in T_1,\\ e_n(J_n)=l,\ d_n(x)=s}} \left(\frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^{\alpha} \frac{|J_n|}{|J_n|+\mathrm{dist}(x,J_n)} \frac{1}{|x-y|} \cdot q^{l+s}$$

$$\lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{l,s=1}^{\infty} \sum_{\substack{n\in T_1,\\ e_n(J_n)=l,\ d_n(x)=s}} \left(\frac{|\Delta_n|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^{\alpha} \frac{|J_n|}{|J_n|+\mathrm{dist}(x,J_n)} \cdot q^{l+s}$$

$$\lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{l,s=1}^{\infty} (l+s+1)\left(\frac{q}{q_1}\right)^{l+s} \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}.$$

Аналогичную оценку можно получить и для I_2, что завершит доказательство оценки (4.7) для I. Теперь перейдем к оцениванию K. Разобьем множество $\{n : n \geq n_1\}$ на две части: $S_1 = \{n : n \geq n_1,\ e_n(J_n) = d_n(\tau_{n,0}, \min J_n)\}$,
$S_2 = \{n : n \geq n_1,\ e_n(J_n) = d_n(\max J_n, \tau_{n,n})\}$.
Ясно, что $K = K_1 + K_2$, где

$$K_i = \sum_{n\in S_i} |f_{n,2}(x) - f_{n,2}(x')| \cdot |f_{n,1}(y)|.$$

Из (3.13), (3.14), получим

$$K_1 \lesssim_\gamma \sum_{n\in S_1} \frac{|J_n|}{|\Delta_n|\cdot(|J_n|+\mathrm{dist}(x,J_n))} \cdot q^{e_n(J_n)+d_n(x)} + \tag{4.10}$$

$$\sum_{n\in S_1} \frac{|J_n|}{|\Delta_n|\cdot(|J_n|+\mathrm{dist}(x',J_n))} \cdot q^{e_n(J_n)+d_n(x')} =: K_3 + K_4.$$

Дадим оценку для K_3, подобная оценка будет также верна и для K_4.
Заметим, что при фиксированных $e_n(J_n) = l$, $d_n(x) = s$, аналогично неравенству (4.9), будем иметь

$$\sum_{\substack{n\in S_1\\ e_n(J_n)=l,\ d_n(x)=s}} \frac{|J_n|}{|J_n|+\mathrm{dist}(x,J_n)} \lesssim_\gamma l+s+1. \tag{4.11}$$

Из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R следует, что

$$\left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)^{\alpha} \gtrsim_\gamma \left(\frac{|\Delta_n|\cdot\gamma^{-(e_n(J_n)+d_n(x))}}{|\Delta_n|}\right)^{\alpha} = \gamma^{-\alpha\cdot(e_n(J_n)+d_n(x))} \geq q_1^{e_n(J_n)+d_n(x)}.$$

Комбинируя это неравенства с (4.10), (4.11) получим

$$K_3 \lesssim_\gamma \sum_{l,s=1}^{\infty} \sum_{\substack{n\in T_1,\\ e_n(J_n)=l,\ d_n(x)=s}} \frac{|J_n|}{|J_n|+\mathrm{dist}(x,J_n)} \frac{1}{|x-y|} \cdot \left(\frac{q}{q_1}\right)^{l+s} \left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)^{\alpha}$$

$$\lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{l,s=1}^{\infty}(l+s+1)\left(\frac{q}{q_1}\right)^{l+s} \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}.$$

Аналогичную оценку можно получить и для K_1, откуда получим $K_1 \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}$. Эта оценка также верна и для K_2, что завершит доказательство оценки (4.7) для K. Лемма 4.1 для $i=2$ доказана.

Доказательство Леммы 4.1 для $i = 3$. Без ограничения общности будем считать, что $x < x' < y$. Ясно, что $n_0 \le n_1$ и $\sum_{n<n_0} |f_{n,1}(x)-f_{n,1}(x')|\cdot|f_{n,2}(y)| = 0$. Обозначим

$$I = \sum_{n_0\le n<n_1} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,2}(y)|, \quad K = \sum_{n\ge n_1} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,2}(y)|.$$

Заметим, что $|K_{3,\omega}(x,y) - K_{3,\omega}(x',y)| \le I + K$. Докажем, что

$$I, K \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}. \tag{4.12}$$

Начнем с оценки для I. Разобьем множество $\{n : n_0 \le n < n_1\}$ на две части:
$T_1 = \{n : n_0 \le n < n_1,\ e_n([x,x']) = d_n(\tau_{n,0}, x)\}$,
$T_2 = \{n : n_0 \le n < n_1,\ e_n([x,x']) = d_n(x', \tau_{n,n})\}$.
Ясно, что $I = I_1 + I_2$, где

$$I_i = \sum_{n\in T_i} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,2}(y)|.$$

Через $\Gamma_{n,x}$ обозначим интервал линейности функции F_n, который содержит точку x. Так как $|f_{n,1}(x)-f_{n,1}(x')| \le |x-x'| \max_{\tau\in[x,x']} |f'_{n,1}(\tau)|$, следовательно из сильной регулярности последовательности $\mathfrak{T}$ на R и (3.13), (3.14), получим

$$I_1 \lesssim_\gamma \sum_{n\in T_1} \frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|} \frac{|J_n|}{|\Delta_n|\cdot(|J_n| + \mathrm{dist}(y, J_n))} \cdot q^{e_n([x,x'])+e_n(J_n)+d_n(y)}. \tag{4.13}$$

Заметим, что при фиксированном $e_n([x,x'])$ и $n \in T_1$ имеем

$$\min_{n\in T_1,\ e_n([x,x'])=k} |\Delta_n| \sim_\gamma \max_{n\in T_1,\ e_n([x,x'])=k} |\Delta_n|. \tag{4.14}$$

И вправду, при $n \in T_1, e_n([x,x']) = k$ количество точек левее x из $\mathfrak{T}_n$ остается неизменным (как и отрезок $[\tau_{n,0}, \tau_{n,1}]$), поэтому из сильной регулярности последовательности $\mathfrak{T}$ на R будем иметь, что $\max|\Delta_n| \sim_\gamma \max|\tau_{n,1} - \tau_{n,0}| = \min|\tau_{n,1} - \tau_{n,0}| \sim_\gamma \min|\Delta_n|$.

Заметим, что при фиксированных $e_n(J_n) = l$, $d_n(y) = s$ количество узлов слева или справа от y остается неизменным, откуда применяя Лемму 3.2 для ближайшего интервала $\Delta = D_{n,\cdot}$ к y находящийся в той стороне от y, в которой количество узлов не меняется, будем иметь

$$\sum_{\substack{n\in T_1\\ e_n(J_n)=l,\ d_n(y)=s}} \frac{|J_n|}{|J_n| + \operatorname{dist}(y, J_n)} \lesssim_\gamma s+1. \tag{4.15}$$

Из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R следует, что

$$\left(\frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^{1-\alpha} \lesssim_\gamma 1 \text{ и } \left(\frac{|\Delta_n|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^{\alpha} \lesssim_\gamma \gamma^{\alpha\cdot e_n([x,x'])} \leq \frac{1}{q_1^{e_n([x,x'])}}.$$

Комбинируя эти неравенства с (4.13), (4.15) получим

$$I_1 \lesssim_\gamma \sum_{k,l,s=1}^{\infty} \sum_{\substack{n\in T_1,\ e_n([x,x'])=k\\ e_n(J_n)=l,\ d_n(y)=s}} \left(\frac{|x-x'|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^{\alpha} \frac{|J_n|}{|J_n| + \operatorname{dist}(y, J_n)} \frac{1}{|x-y|} \cdot q^{k+l+s}$$

$$\lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{k,l,s=1}^{\infty} \sum_{\substack{n\in T_1,\ e_n([x,x'])=k\\ e_n(J_n)=l,\ d_n(y)=s}} \left(\frac{|\Delta_n|}{|\Gamma_{n,x}|}\right)^{\alpha} \frac{|J_n|}{|J_n| + \operatorname{dist}(y, J_n)} \cdot q^{k+l+s}$$

$$\lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{k,l,s=1}^{\infty} (s+1)\left(\frac{q}{q_1}\right)^{k+l+s} \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}.$$

Аналогичную оценку можно получить и для I_2, что завершит доказательство оценки (4.12) для I. Теперь докажем оценку для K из (4.12).

Разобьем множество $\{n : n \geq n_1\}$ на две части:

$S_1 = \{n : n \geq n_1,\ e_n([x,x']) = d_n(\tau_{n,0}, x)\}$,

$S_2 = \{n : n \geq n_1,\ e_n([x,x']) = d_n(x', \tau_{n,n})\}$.

Ясно, что $K = K_1 + K_2$, где

$$K_i = \sum_{n\in S_i} |f_{n,1}(x) - f_{n,1}(x')| \cdot |f_{n,2}(y)|.$$

Из (3.13), (3.14), получим

$$K_1 \lesssim_\gamma \sum_{n\in S_1} \frac{|J_n|}{|\Delta_n|\cdot(|J_n| + \operatorname{dist}(y, J_n))} \cdot q^{e_n([x,x'])+e_n(J_n)+d_n(y)}. \tag{4.16}$$

Заметим, что при фиксированных $e_n(J_n) = l$, $d_n(y) = s$, аналогично неравенству (4.15), будем иметь

$$\sum_{\substack{n\in S_1\\ e_n(J_n)=l,\ d_n(y)=s}} \frac{|J_n|}{|J_n| + \operatorname{dist}(y, J_n)} \lesssim_\gamma s+1. \tag{4.17}$$

Из сильной регулярности последовательности $\mathcal{T}$ на R следует, что

$$\left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)^{\alpha} \gtrsim_\gamma \gamma^{-\alpha\cdot e_n([x,x'])} \geq q_1^{e_n([x,x'])}.$$

Комбинируя это неравенства с (4.16), (4.17) получим

$$K_1 \lesssim_\gamma \sum_{k,l,s=1}^{\infty} \sum_{n\in T_1} \sum_{\substack{d_n([x,x'])=k \\ d_n(J_n)=l,\ d_n(y)=s}} \frac{|J_n|}{|J_n| + \operatorname{dist}(y, J_n)} \frac{1}{|x-y|} \cdot \left(\frac{q}{q_1}\right)^{k+l+s} \left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)^{\alpha}$$

$$\lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}} \sum_{k,l,s=1}^{\infty} (s+1)\left(\frac{q}{q_1}\right)^{k+l+s} \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}.$$

Аналогичную оценку можно получить и для K_2, что завершит доказательство оценки (4.12) для K. Лемма 4.1 для $i = 3$ доказана.

Доказательство Леммы 4.2. Без ограничения общности будем считать, что $x < x' < y$. Введем следующие обозначения: через $\Gamma = [x, x']$ и $n_\Gamma = \max\{n, \#(\mathcal{T}_n \cap \Gamma) \le 1\}$. Ясно, что $|K_{4,\omega}(x,y) - K_{4,\omega}(x',y)| \le I + K$, где

$$I = \sum_{n\le n_\Gamma} |f_{n,2}(x) - f_{n,2}(x')||f_{n,2}(y)|, \quad K = \sum_{n>n_\Gamma} |f_{n,2}(x) - f_{n,2}(x')||f_{n,2}(y)|.$$

Докажем, что для I и K имеют место следующие оценки:

$$I, K \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}. \tag{4.18}$$

Начнем с оценивания I. Через Γ_n обозначим единственный интервал с узлами из $\mathcal{T}_n$ содержащий точку x. Из (3.14) и сильной регулярности на R последовательности $\mathcal{T}$ будем иметь

$$I \lesssim |x-x'| \sum_{n\le n_\Gamma} \frac{|J_n|}{(|J_n| + \operatorname{dist}(\Gamma_n, J_n) + |\Gamma_n|)(|J_n| + \operatorname{dist}(y, J_n))} \cdot \frac{q^{d_n(x)+d_n(y)}}{|\Gamma_n|}. \tag{4.19}$$

Разобьем множество $\{n : n \le n_\Gamma\}$ на три части:

$T_1 = \{n : n \le n_\Gamma, \min J_n < x\}$,

$T_2 = \{n : n \le n_\Gamma, J_n \subset [x, y]\}$,

$T_3 = \{n : n \le n_\Gamma, \max J_n > y\}$.

Суммы соответствующие множествам T_1, T_2 и T_3 правой части (4.19) обозначим через I_1, I_2, I_3, т.е.

$$I_i = |x-x'| \sum_{n\in T_i} \frac{|J_n|}{(|J_n| + \operatorname{dist}(\Gamma_n, J_n) + |\Gamma_n|)(|J_n| + \operatorname{dist}(y, J_n))} \cdot \frac{q^{d_n(x)+d_n(y)}}{|\Gamma_n|}$$

для $i = 1, 2, 3$.

Дадим оценку сверху для I_1. При фиксированных $d_n(x', y) = k$, $d_n(x) = l$ пусть $L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_r$ совокупность всех разных интервалов Γ_n, $n \le n_\Gamma$. Из определения α и сильной регулярности на R последовательности $\mathcal{T}$ будем иметь

$$|x-x'|^{1-\alpha} \cdot |x-y|^\alpha \lesssim_\gamma |L_r|^{1-\alpha} \cdot (\gamma^k |L_r|)^\alpha < |L_r| \cdot \frac{1}{q_1^k}.$$

Следовательно, применив лемму 3.2 к интервалам L, получим

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{n:\Gamma_n=L_i,d_n(x',y)=k,\ d_n(x)=l}\frac{|J_n|}{|J_n|+\operatorname{dist}(\Gamma_n,J_n)+|\Gamma_n|}\cdot\frac{q^{d_n(x)+d_n(y)}}{|\Gamma_n|}\lesssim_\gamma$$

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{1+l}{|L_i|}\cdot q^{k+l}\lesssim_\gamma\frac{1+l}{|L_r|}\cdot q^{k+l}\le\left(\frac{q}{q_1}\right)^k\cdot(1+l)q^l\cdot\frac{|x-x'|^{\alpha-1}}{|x-y|^\alpha}.$$

Отсюда, просуммировав через k и l, и приняв во внимание, что $|J_n|+\operatorname{dist}(y,J_n)>|x-y|$, для $n\in T_1$, получим

$$I_1\lesssim_\gamma\frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}. \tag{4.20}$$

Теперь оценим I_2. Так как $(|J_n|+\operatorname{dist}(\Gamma_n,J_n)+|\Gamma_n|)(|J_n|+\operatorname{dist}(y,J_n))>|J_n|\cdot|x-y|$ при $n\in T_2$, следовательно

$$I_2\lesssim|x-x'|\sum_{n\le n_\Gamma}\frac{1}{|x-y|}\cdot\frac{q^{d_n(x)+d_n(y)}}{|\Gamma_n|}.$$

Поэтому, принимая во внимание, что для $n\in T_2$ аналогично случаю $n\in T_1$ имеет место следующее неравенство

$$|x-x'|^{1-\alpha}\cdot|x-y|^\alpha\lesssim_\gamma|\Gamma_n|^{1-\alpha}\cdot(\gamma^{k+l}|\Gamma_n|)^\alpha<|\Gamma_n|\cdot\frac{1}{q_1^{k+l}},$$

и для фиксированных $d_n(x)=k$ и $d_n(y)=l$ существует не более одного n удовлетворяющего этому случаю, получим

$$I_2\lesssim\frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n:d_n(x)=k,d_n(y)=l}\frac{|x-x'|^{1-\alpha}\cdot|x-y|^\alpha}{|\Gamma_n|}q^{k+l}$$

$$\lesssim_\gamma\frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{q}{q_1}\right)^{k+l}\lesssim\frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}. \tag{4.21}$$

Для завершения оценивания I остается оценить I_3. При фиксированных $d_n(x,y)=k$, $d_n(y)=l$ пусть $L_1\supset L_2\supset\ldots\supset L_r$ совокупность всех разных интервалов Γ_n, $n\in T_3$. Из сильной регулярности на R последовательности $\mathcal{T}$ следует, что

$$|x-x'|^{1-\alpha}\cdot|x-y|^\alpha\lesssim_\gamma|L_r|^{1-\alpha}\cdot(\gamma^k|L_r|)^\alpha<|L_r|\cdot\frac{1}{q_1^k}.$$

Поскольку при фиксированных L_i и k, самый правый интервал линейности F_n содержащийся в $[x,y]$ не меняется, то назначив этот интервал через R_n, применив лемму 3.2 к этому интервалу и воспользовавшись последней оценкой получим

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{n:\Gamma_n=L_i,d_n(x,y)=k,\ d_n(y)=l}\frac{|J_n|}{|J_n|+\operatorname{dist}(y,J_n)}\cdot\frac{q^{d_n(x)+d_n(y)}}{|\Gamma_n|}\lesssim_\gamma$$

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{q^{k+l}}{|L_i|} \sum_{n:\Gamma_n = L_i, d_n(x,y)=k,\ d_n(y)=l} \frac{|J_n|}{|J_n| + \mathrm{dist}(R_n, J_n)} \lesssim_\gamma$$

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1+l}{|L_i|} \cdot q^{k+l} \lesssim_\gamma \frac{1+l}{|L_r|} \cdot q^{k+l} \le \left(\frac{q}{q_1}\right)^k \cdot (1+l) q^l \cdot \frac{|x-x'|^{\alpha-1}}{|x-y|^\alpha}.$$

Отсюда, просуммировав через k и l, и приняв во внимание $|J_n| + \mathrm{dist}(x, J_n) > |x-y|$, получим, что

$$I_3 \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}. \tag{4.22}$$

Из неравенств (4.20) - (4.22) следует оценка (4.18) для I. Теперь оценим K. Из (3.14) и сильной регулярности на R последовательности $\mathcal{T}$ будем иметь

$$K \lesssim \sum_{n>n_\Gamma} \frac{|J_n|}{(|J_n| + \mathrm{dist}(x, J_n))(|J_n| + \mathrm{dist}(y, J_n))} \cdot q^{d_n(x)+d_n(y)}$$

$$+ \sum_{n>n_\Gamma} \frac{|J_n|}{(|J_n| + \mathrm{dist}(x', J_n))(|J_n| + \mathrm{dist}(y, J_n))} \cdot q^{d_n(x')+d_n(y)} = K_1 + K_2. \tag{4.23}$$

Достаточно оценить K_1, аналогичная оценка будет также верна и для K_2. Действительно, точка $x'' = x' + 2\gamma^2(x' - x)$ принадлежит интервалу $[x', y]$ в силу условия леммы 4.2 и согласно сильно регулярности на R при $n > n_\Gamma$ будем иметь, что $\#\{([x', x''] \cap \mathcal{T}_n)\} \ge 2$.

Разобьем множество $\{n : n > n_\Gamma\}$ на три части:

$S_1 = \{n : n > n_\Gamma, \min J_n < x\}$,

$S_2 = \{n : n > n_\Gamma, J_n \subset [x, y]\}$,

$S_3 = \{n : n > n_\Gamma, \max J_n > y\}$.

Часть сумм по множествам индексов S_1, S_2, S_3 соответствующие сумме K_1 обозначим через $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{1,3}$, т.е.

$$K_{1,i} = \sum_{n\in S_i} \frac{|J_n|}{(|J_n| + \mathrm{dist}(x, J_n))(|J_n| + \mathrm{dist}(y, J_n))} \cdot q^{d_n(x)+d_n(y)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Дадим оценку сверху для $K_{1,1}$.

Заметим, что при фиксированных $d_n(x, x') = l$, $d_n(x', y) = s$ будем иметь $|x - x'| \ge \frac{1}{\gamma}|\Gamma_n|$, и $|x - y| \lesssim_\gamma \gamma^{l+s}|\Gamma_n|$, откуда получим

$$\left(\frac{|x-y|}{|x-x'|}\right)^\alpha \lesssim_\gamma \gamma^{\alpha(l+s)} < \frac{1}{q_1^{l+s}}.$$

Используя это неравенство и приняв во внимание $|J_n| + \mathrm{dist}(y, J_n) > |x - y|$, применив лемму 3.2 к интервалу линейности F_n, который самый близкий к x и находиться в $[x, x']$, получим следующую оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in S_1 \\ d_n(x)=k,\ d_n(x,x')=l,\ d_n(x',y)=s}} \frac{|J_n|}{(|J_n| + \operatorname{dist}(x, J_n))(|J_n| + \operatorname{dist}(y, J_n))} q^{k+l+s}$$

$$\lesssim_\gamma \frac{1}{|x-y|} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) q^{k+l+s} \lesssim_\gamma \frac{1}{|x-y|} \cdot \left(\frac{|x-y|}{|x-x'|}\right)^{-\alpha} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{l+s}.$$

Отсюда, просуммировав через l и s, получим, что

$$K_{1,1} \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}. \tag{4.24}$$

Теперь оценим $K_{1,2}$.

Заметим, что при фиксированных $d_n(x) = l$, $d_n(y) = s$ как и при оценивании $K_{1,1}$ будем иметь $|x - x'| \geq \frac{1}{\gamma}|\Gamma_n|$, и $|x - y| \lesssim_\gamma \gamma^{l+s}|\Gamma_n|$, откуда получим

$$\left(\frac{|x-y|}{|x-x'|}\right)^\alpha \lesssim_\gamma \gamma^{\alpha(l+s)} < \frac{1}{q_1^{l+s}}.$$

Используя это неравенство, приняв во внимание $(|J_n|+\operatorname{dist}(x, J_n))(|J_n|+\operatorname{dist}(y, J_n)) > |J_n||x - y|$, при $n \in S_2$ и то, что существует не более одного $n \in S_2$ для фиксированных $d_n(x) = l$, $d_n(y) = s$, получим следующую оценку

(4.25)

$$K_{1,2} \lesssim \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|x-y|} q^{l+s} \lesssim_\gamma \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|x-y|} \left(\frac{|x-y|}{|x-x'|}\right)^{-\alpha} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{l+s} \lesssim \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}.$$

Для завершения оценивания K_1 остается оценить $K_{1,3}$. Зафиксируем $d_n(x, y) = l$, $d_n(y) = s$. Из сильной регулярности на R последовательности (t_n) следует, что $|x - y| \lesssim_\gamma |x - x'|\gamma^l$, откуда получим

$$\left(\frac{|x-y|}{|x-x'|}\right)^\alpha \lesssim_\gamma \gamma^{\alpha l} < \frac{1}{q_1^l}.$$

При фиксированном $d_n(x, y) = l$ в отрезок точки не добавляются, поэтому применяя лемму 3.2 к интервалу линейности F_n находящийся в $[x, y]$ и ближайший к y при фиксированном $d_n(x, y) = l$, и последнее неравенство вместе с $|J_n| + \operatorname{dist}(x, J_n) > |x - y|$ получим следующую оценку

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\substack{n \in S_3 \\ d_n(x,y)=l,\ d_n(y)=s}} \frac{|J_n|}{(|J_n| + \operatorname{dist}(x, J_n))(|J_n| + \operatorname{dist}(y, J_n))} q^{l+s}$$

$$\lesssim_\gamma \frac{1}{|x-y|} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) q^{l+s} \lesssim_\gamma \frac{1}{|x-y|} \cdot \left(\frac{|x-y|}{|x-x'|}\right)^{-\alpha} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{l}.$$

Отсюда, просуммировав через l, получим, что

$$K_{1,3} \lesssim_\gamma \frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{1+\alpha}}. \tag{4.26}$$

Из неравенств (4.24) – (4.26) вытекает справедливость оценки (4.18) для K. Лемма 4.2 доказана.

5. Доказательство теоремы 2.2.

Чтобы доказать Теорему 2.2 мы воспользуемся следующими свойствами.

Утверждение 5.1. *Пусть $\mathcal{T}$ - допустимая последовательность узлов, а $(F_n)_{n\geq 2}$ соответствующая система функций Франклина с нулевыми средними. Если для некоторой последовательности (a_n) ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n F_n$ безусловно сходится в L^1, тогда $P := \left(\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n^2 F_n^2\right)^{1/2} \in L^1$. Более того*

$$\|P\|_1 \lesssim \sup_{\varepsilon\in\{-1,1\}^N} \|\sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n a_n F_n\|_1.$$

Утверждение 5.2. *Пусть $\mathcal{T}$ - допустимая последовательность узлов, которая сильно регулярна по парам на R с некоторым параметром $\gamma > 1$, но не удовлетворяет какому-либо условию сильной регулярности на R. Тогда соответствующая система функций Франклина с нулевыми средними $(F_n)_{n\geq 2}$ удовлетворяет условию*

$$\sup \left\|\sup_{n\geq 2}|a_n(\phi)F_n|\right\|_1 = \infty,$$

где супремум берется по всем атомам ϕ и $a_n(\phi) = (\phi, F_n)$.

Утверждение 5.1 является следствием неравенства Хинчина. Для доказательства утверждения 5.2 нам понадобится следующий результат.

Лемма 5.1. *Пусть $\mathcal{T}$ - допустимая последовательность узлов, которая сильно регулярна по парам на R с некоторым параметром $\gamma > 1$, но не удовлетворяет какому-либо условию сильной регулярности на R. Пусть k и ℓ любые натуральные числа. Тогда для всех $A \geq 2$ существуют числа $(n_j)_{j=0}^{\ell-1}$, такие что если τ_{n_j,i_j} новая точка в $\mathcal{T}_{n_j}$, которая не присутствует в $\mathcal{T}_{n_j-1}$, и*

$$S_j := [\tau_{n_j,i_j-3}, \tau_{n_j,i_j-2}),\ \Lambda_j := [\tau_{n_j,i_j-2}, \tau_{n_j,i_j-1}),$$

$$L_j := [\tau_{n_j,i_j-1}, \tau_{n_j,i_j}),\ R_j := [\tau_{n_j,i_j}, \tau_{n_j,i_j+1}),$$

тогда для всех $0 \le i < j \le \ell - 1$ имеют место

(1) $R_i \cap R_j = \emptyset$, (2) $\Lambda_i = \Lambda_j$, (3) $(2\gamma-1)|L_j| \ge |S_j| \ge \frac{|L_j|}{2\gamma}$, (4) $|R_j| \le (2\gamma-1)|L_j|$,

(5) $|L_j| \le 4(\gamma+1) \cdot |R_j|$, (6) $\min(|L_j|, |R_j|) \ge A|\Lambda_j|$, (7) $e_{n_j}(J_{n_j}) \ge k$.

Доказательство Леммы 5.1. В более общем случае пункты 1-6 доказаны в [11] (см. Лемму 6.2). Здесь мы докажем только 7-ой пункт.

Положим $m = [8\gamma(2\gamma-1)(\gamma+1)]+1$. Пусть для последовательности $(n_j)_{j=0}^{\ell+km-1}$ удовлетворяются пункты 1-6. Докажем, что

$$S_i \neq S_j, \quad \text{при } i \ge j+m. \tag{5.1}$$

Заметим, что для этого достаточно показать

$$|L_i| < \frac{1}{2\gamma(2\gamma-1)}|L_j|, \quad \text{при } i \ge j+m. \tag{5.2}$$

Действительно, из пункта 2 следует, что $L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_j$, а из пункта 3 будем иметь $|S_i| \le (2\gamma-1)|L_i| < \frac{1}{2\gamma}|L_j| \le |S_j|$.

Допустим $|L_i| \ge \frac{1}{2\gamma(2\gamma-1)}|L_j|$, для некоторого $i \ge j+m$. Заметим, что из пункта 2 следует, что $|L_r| \le |L_j|$ для $r \ge j$, откуда используя пункт 5 получим

$$|R_{j+1}| + \ldots + |R_i| \ge \frac{1}{4(\gamma+1)}(|L_{j+1}| + \ldots + |L_i|) \ge |L_i|\frac{m}{4(\gamma+1)} \ge |L_j|.$$

Так как L_j включает попарно непересекающиеся множества L_i и $R_{j+1}, \ldots, R_i$, то $|L_j| \ge |L_i| + |R_{j+1}| + \ldots + |R_i| > |L_j|$, противоречие. Неравенство (5.2) доказано.

Из (5.1) и пункта 2 следует, что $i_{j+m} > i_j$, откуда получим, что

$$i_{j+mk} \ge i_j + k \ge k. \tag{5.3}$$

Ясно, что количество точек из $\mathcal{T}_{n_{mk}}$ в $[\tau_{n_{mk},i_{mk}+1}, \tau_{n_{mk},n_{mk}}]$ больше k. Из этого используя (5.3) получим, что $e_{n_j}(J_{n_j}) \ge k$ при $mk \le j \le mk + \ell - 1$.

Итак, последовательность $(n_j)_{j=mk}^{\ell+mk-1}$ длины ℓ удовлетворяет условиям 1-7.

Перейдем к доказательству утверждения 5.2.

Доказательство утверждения 5.2. Пусть ℓ любое натуральное число, а $k \in N$ и число $A \ge 2$ будут выбраны позже. Тогда согласно Лемме 5.1 существует последовательность $(n_j)_{j=0}^{\ell-1}$ для которой все условия Леммы 5.1 выполнены. Обозначим $\tau := \tau_{n_0,i_0-1}$, $x := \tau - |\Lambda_0|$ и $y := \tau + |\Lambda_0|$. Ясно, что функция

$$\phi \equiv \frac{1}{2|\Lambda_0|}(\mathbf{1}_{[x,\tau]} - \mathbf{1}_{[\tau,y]})$$

является атомом. Докажем, что для любого $0 \le j \le \ell - 1$ имеет место

$$|a_{n_j}(\phi)| = |\langle \phi, F_{n_j} \rangle| \sim_\gamma |L_j|^{-1/2}. \tag{5.4}$$

Интегрируя по частям получим

$$a_{n_j}(\phi) = \int_x^y \phi(t)(f_{n_j,2}(t) - f_{n_j,2}(\tau))\,\mathrm{d}t + \int_x^y \phi(t) f_{n_j,1}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2|\Lambda_0|}\int_x^\tau (x-t) f'_{n_j,2}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2|\Lambda_0|}\int_\tau^y (y-t) f'_{n_j,2}(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^y \phi(t) f_{n_j,1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Для того, чтобы дать оценку для $|a_{n_j}(\phi)|$ снизу, мы дадим оценки абсолютным значениям $I_1 := \frac{1}{2|\Lambda_0|}\int_x^\tau (x-t) f'_{n_j,2}(t)\,\mathrm{d}t$ снизу и $I_2 := \frac{1}{2|\Lambda_0|}\int_\tau^y (y-t) f'_{n_j,2}(t)\,\mathrm{d}t$, $I_3 := \int_x^y \phi(t) f_{n_j,1}(t)\,\mathrm{d}t$ сверху.

Из (3.15), принимая во внимание пункты 4 и 5 Леммы 5.1 и сильную регулярность по парам на R последовательности $\mathcal{T}$, будем иметь

$$|f_{n_j,2}(\tau_{n_j,i_j-1})|,\ |f_{n_j,2}(\tau_{n_j,i_j})|,\ |f_{n_j,2}(\tau_{n_j,i_j+1})| \sim |J_{n_j}|^{-\frac{1}{2}} \sim_\gamma |L_j|^{-\frac{1}{2}}, \tag{5.5}$$

откуда используя знакопеременность функции $f_{n_j,2}$ получим, обозначив производную $f_{n_j,2}$ на Λ_0 и L_j соответственно ξ_j и η_j,

$$|\xi_j| \sim_\gamma \frac{|L_j|^{-\frac{1}{2}}}{|\Lambda_0|} \text{ и } |\eta_j| \sim_\gamma \frac{1}{|L_j|^{-\frac{3}{2}}}.$$

Из этого и пункта 6 Леммы 5.1 следует, что существуют постоянные $C_\gamma, c_\gamma > 0$ такие, что

$$|I_1| \ge 3c_\gamma |L_j|^{-\frac{1}{2}} \text{ и } |I_2| \le C_\gamma |\Lambda_0| \cdot |L_j|^{-\frac{3}{2}} \le \frac{C_\gamma}{A}|L_j|^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.6}$$

А из неравенства (3.13) и пункта 7 Леммы 5.1 следует, что существует постоянная $C_{\gamma,1} > 0$ такая, что

$$|I_3| \le C_{\gamma,1}\frac{|L_j|^{\frac{1}{2}}}{|\Delta_{n_j}|} \cdot q^{c_{n_j}(J_{n_j})} \le C_{\gamma,1}|L_j|^{-\frac{1}{2}} \cdot q^{c_{n_j}(J_{n_j})} \le C_{\gamma,1} q^k |L_j|^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.7}$$

Теперь выбрав числа k и $A \ge 2$ так, чтобы выполнялись неравенства $C_{\gamma,1} q^k \le c_\gamma$ и $\frac{C_\gamma}{A} \le c_\gamma$, из неравенств (5.6), (5.7) получим

$$|a_{n_j}(\phi)| \ge |I_1| - |I_2| - |I_3| \ge c_\gamma |L_j|^{-\frac{1}{2}}.$$

Из неравенств (3.13), (5.5), пункта 7 Леммы 5.1 и сильной регулярности по парам на R последовательности $\mathcal{T}$ следует существование констант $c'_\gamma, C'_\gamma > 0$, что

$$\int_{R_j} |f_{n_j,2}(t)|\,\mathrm{d}t \ge 2c'_\gamma |L_j|^{\frac{1}{2}}, \text{ и } \|f_{n_j,1}(t)\|_1 \le C'_\gamma |L_j|^{\frac{1}{2}} q^k.$$

Будем считать, что k настолько большое, что $C'_\gamma q^k \le c'_\gamma$, откуда используя (5) получаем

$$\int_{R_j} |a_{n_j}(\phi)||F_{n_j}(t)|\,\mathrm{d}t \ge c_\gamma |L_j|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{L_j} |f_{n_j,2}(t)|\,\mathrm{d}t - \|f_{n_j,1}(t)\|_1 \right) \ge c_\gamma c'_\gamma.$$

Из последнего неравенства и пункта 1 Леммы 5.1 вытекает, что

$$\int_R \sup_n |a_n(\phi)F_n(t)|\,\mathrm{d}t \ge \sum_{j=1}^{\ell} \int_{R_j} |a_{n_j}(\phi)F_{n_j}(t)|\,\mathrm{d}t \gtrsim_\gamma \ell.$$

Так как для каждого ℓ мы можем построить атом, для которого справедливо последнее неравенство, следовательно Свойство 5.2 доказано.

Доказательство теоремы 2.2. Начнем с доказательства необходимости. Минимальность системы (F_n) очевидна. Чтобы доказать полноту (F_n) в $H_1(R)$, достаточно убедится, что любой атом можно аппроксимировать линейной комбинацией (F_n) сколь угодно хорошо. Заметим, что любой атом можно аппроксимировать непрерывной функцией с нулевым средним и компактным носителем по норме $H^1(R)$, а последнюю можно аппроксимировать полиномом по системе (F_n) по норме L_∞, следовательно и по норме $H^1(R)$, так как носитель компактен. Пусть $f \in H^1(R)$ и $f = \sum_{n=2}^{\infty} a_n F_n$. Равномерная ограниченность операторов $S_{n,\omega} = \int_R \sum_{k=2}^{n} \omega_n F_n(x) F_n(y) f(y) \mathrm{d}y = \sum_{k=2}^{n} \omega_n a_n F_n$, где $\omega \in \{-1,1\}^N$, для сильно регулярной последовательности $\mathcal{T}$ на R следует из Утверждений 4.1 и 3.4.

Теперь докажем обратное, т.е. если (F_n) является безусловным базисом в $H^1(R)$, тогда последовательность (t_n) должна быть сильно регулярной на R. Сперва заметим, что если (t_n) не сильно регулярна по парам на R, то в силу Теоремы 2.1 (F_n) не является базисом в $H^1(R)$. Остается рассмотреть тот случай, когда (t_n) сильно регулярна по парам на R, но не сильно регулярна на R. Допустим (F_n) является безусловным базисом в $H^1(R)$. Тогда, для $f = \sum a_n F_n$ и $\varepsilon \in \{-1,1\}^N$, функция $f_\varepsilon := \sum \varepsilon_n a_n F_n$ тоже принадлежит $H^1(R)$. Так как $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_{H^1}$, следовательно ряд $\sum a_n F_n$ также безусловно сходится в $L^1(R)$, откуда, используя утверждение 5.1, получим

$$\|Pf\|_1 \lesssim \sup_\varepsilon \|f_\varepsilon\|_1 \le \sup_\varepsilon \|f_\varepsilon\|_{H^1} \lesssim \|f\|_{H^1},$$

а последнее неверно даже для атомов в силу Свойства 5.2. Теорема 2.2 доказана.

Автор выражает благодарность профессорам Г. Г. Геворкяну и А. Камонт за полезные обсуждения.

Abstract. We define a general Franklin system of functions on R with vanishing means, generated by an admissible sequence $\mathcal{T}$. A necessary and sufficient condition on $\mathcal{T}$ is found for the corresponding general Franklin system of functions on R with vanishing means to be an unconditional basis in the space $H^1(R)$.

Список литературы

[1] S. V. Bochkarev, "Some inequalities for the Franklin series", Anal. Math. **1**, 249 – 257 (1975).

[2] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math. **23**, 141 – 157 (1963).

[3] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system, II", Studia Math. **27**, 289 – 323 (1966).

[4] Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions", Funct. Approx. Comment. Math. **25**, 129 – 143 (1997).

[5] Z. Ciesielski, "Orthogonal projections onto spline spaces with arbitrary knots", Function spaces (Poznan, 1998), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **213**, Dekker, New York, 133 – 140 (2000).

[6] R. Coifman and G. Weiss, "Extensions of Hardy spaces and their use in analysis", Bull. Amer.Math. Soc. (N.S.) **83**, 569 – 645 (1977).

[7] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, "Constructive approximation", Grundlchren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **303**, Springer-Verlag, Berlin (1993).

[8] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) **374**, 1 – 59 (1998).

[9] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin system in $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$", Studia Math. **164**, 161 – 204 (2004).

[10] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "General Franklin systems as bases in $H^1[0,1]$", Studia Math. **167**, 259 – 292 (2005).

[11] G. Gevorkyan, A. Kamont, K. Keryan and M. Passenbrunner, "Unconditionality of orthogonal spline systems in H^1", Studia Math. **226**, 123 – 154 (2015).

[12] Г. Г. Геворкян, К. Керян, "Об одной системе из кусочно линейных функций с нулевым интегралом на R", в печати.

[13] Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Ann. **100**, 522 – 528 (1928).

[14] K. A. Keryan, M. P. Pogosyan, "A general Franklin periodic system as a basis in $H^1[0,1]$" [in Russian], Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat. **40**, no. 1, 61 – 84 (2005).

[15] K. A. Keryan, "The unconditional bases property of a general Franklin periodic system in $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$" [in Russian], Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat. **40**, no. 1, 61 – 84 (2005).

[16] G. Kyriazis, K. Park, P. Petrushev, "Anisotropic Franklin bases on polygonal domains", Math. Nachr. **279**, 1099 – 1127 (2006).

[17] A. Shadrin, "The L_∞-norm of the L_2-spline projector is bounded independently of the knot sequence: a proof of de Boor's conjecture", Acta Math. **187**, no. 1, 59 – 137 (2001).

[18] J. O. Stromberg, "A modified Franklin system and higher-order spline systems on R^n as unconditional bases for Hardy spaces", Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Vol. I, II Chicago, Ill., 475 – 494 (1981).

Поступила 10 июля 2015