Известия НАН Армении, Математика, том 51, н. 6, 2016, стр. 23-42.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ В ПЛОСКОСТИ С ОДНОЙ ВЕРШИНОЙ АНИЗОТРОПНОСТИ

Г. А. КАРАПЕТЯН

Российско-Армянский (Славянский) Университет
E-mail: *Garnik_Karapetyan@yahoo.com*

Аннотация. В данной статье получены подходящие интегральные представления для функций из Соболевских мультианизотропных пространств и применены для получения теорем вложения для этих пространств.

MSC2010 number: 12E10

Ключевые слова: интегральное представление: теорема вложения; соболевское мультианизотропное пространство.

Введение

Теоремы вложения функциональных пространств для дифференцируемых функций возникла в работах С.Л. Соболева [1], [2], где с помощью проекционного оператора доказывались теоремы вложения для изотропных функциональных пространств. В дальнейшем, исходя из различных вопросов физики и техники, изучались более общие пространства, которые назывались анизотропными пространствами С. Л. Соболева. Для таких пространств были получены интегральные представления (см., например, [3] – [7]). Все эти результаты и истории вопроса можно найти в книге [8]. В дальнейшем, применяя полученные интегральные представления, были доказаны различные теоремы вложения для этих пространств (см. например, [4] – [7], [9] – [11] и монографию [8]). В дальнейшем, когда Л. Херманцер [12] ввел класс гипоэллиптических операторов, стали изучать мультианизотропные пространства С. Л. Соболева. Долгое время не удавалось получить подходящее интегральное представление для функций из этих классов. В данной работе получено такое интегральное представление для функций из мультианизотронных пространств, с применением которого получены теоремы вложения. При получении соответствующего интегрального представления, используются ранее полученные интегральные представления [13] и [14].

1. Ядра интегрального представления и их свойства

Пусть R^2 - двумерное пространство, Z_+^2 множество двумерных мультииндексов, т.е. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in Z_+^2$, если α_1, α_2 целые неотрицательные числа. Для $\xi, \eta \in R^2, \alpha \in Z_+^2, t > 0$ обозначим через $t^\eta = (t^{\eta_1}, t^{\eta_2}), (\xi, \eta) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}; D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}, D^\alpha = D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}$ обобщенная соболевская производная.

Для конечного набора мультииндексов через H обозначим наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все точки данного набора. H называется вполне правильным, если а) содержит точки в начале координат и во всех координатных осях. б) внешние нормали всех одномерных некоординатных сторон имеют положительные координаты.

Пусть H вполне правильный многоугольник. Через $H_i^1, i = 1, ..., M$ обозначим некоординатные стороны многоугольника H. Пусть $\mu^i, i = 1, ..., M$ такая внешняя нормаль стороны H_i^1, что уравнение данной стороны задается формулой $(\alpha; \mu^i) = 1, i = 1, ..., M$. Обозначим также $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{1}{l_1}, \frac{1}{l_2}\right)$.

Известно (см. [15]), что если оператор $P(D)$ с вещественными коэффициентами гипоэллиптичен, то характеристический многогранник данного оператора вполне правильный, и вершины имеют четные координаты. Для таких операторов в работе [14] было получено интегральное представление через гипоэллиптический оператор. В настоящей работе будем применять идеи работы [14].

Будем рассматривать случай, когда многоугольник H имеет одну вершину анизотропности, т.е. вершинами многоугольника H являются точки $(0; 0)$; $(l_1; 0)$; $(0; l_2)$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha \cdot \alpha_2 \neq 0$. H_1^1 сторона соединяющая точки $(l_1; 0)$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и задается формулой $(\mu^1; \beta) = 1$, H_2^1 сторона проходящая через точки $(0; l_2)$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и задается формулой $(\mu^2; \beta) = 1$.

Для $\nu > 0$ и натурального k обозначим

$$P(\nu; \xi) = P(\nu; \xi_1, \xi_2) = (\nu\xi_1^{l_1})^{2k} + (\nu\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2})^{2k} + (\nu\xi_2^{l_2})^{2k} \tag{1.1}$$

$$G_0(\xi; \nu) = e^{-P(\nu, \xi)}, \quad G_{1,j} = 2k(\nu\xi^{\alpha^j})^{2k-1}e^{-P(\nu;\xi)}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.2}$$

где $\alpha^1 = (l_1, 0), \alpha^2 = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha^3 = (0, l_1)$. Очевидно, что для любого значения параметра $\nu > 0; G_0, G_{1,j} \in S, j = 1, 2, 3$, где $S = S(R^2)$ множество быстро убывающих на бесконечности бесконечно дифференцируемых функций. Далее обозначим через $\hat{G}_0(t; \nu), \hat{G}_{1,j}(t, \nu), j = 1, 2, 3$ преобразования Фурье соответственно функций $G_0(\xi;\nu); G_{1,j}(\xi;\nu)$, т.е.

$$\hat{G_{1,j}}(t;\nu) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2} e^{-i(t;\xi)} G_{1,j}(\xi;\nu)d\xi,\ j = 1,2,3 \tag{1.3}$$

Как известно, преобразование Фурье переводит S на S, т.е. $\hat{G_0}(t;\nu); \hat{G_{1,j}}(t;\nu) \in S$. Изучим свойства $\hat{G_0}, \hat{G_{1,j}}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1. *Пусть θ и σ такие числа, что $\theta \cdot \mu_1^2 = 1$; $\sigma \cdot \mu_2^1 = 1$, а N такое натуральное число, что $N\theta$ и $N\sigma$ четные. Тогда для любого мультииндекса $m = (m_1, m_2)$ и любого такого числа N существуют постоянные числа a_i, b_i, c_i ($i = 1,2$) такие, что для любого $\nu:\ 0 < \nu < 1$ имеют место неравенства*

$$\left|D^m \hat{G_{1,j}}(t;\nu)\right| \le \nu^{-\max\limits_{i=1,2}(|\mu^i| + (m;\mu^i))} \frac{1}{1+\nu^{-N}(t_1^{N\alpha_1}t_2^{N\alpha_2} + t_1^{N\theta})}(a_1|\ln\nu| + a_2), \tag{1.4}$$

при $\alpha_1 < \alpha_2$,

$$\left|D^m \hat{G_{1,j}}(t;\nu)\right| \le \nu^{-\max\limits_{i=1,2}(|\mu^i| + (m;\mu^i))} \frac{1}{1+\nu^{-N}(t_1^{N\alpha_1}t_2^{N\alpha_2} + t_2^{N\sigma})}(b_1|\ln\nu| + b_2), \tag{1.5}$$

при $\alpha_1 > \alpha_2$,

$$\begin{gathered}\left|D^m \hat{G_{1,j}}(t;\nu)\right| \le \nu^{-\max\limits_{i=1,2}(|\mu^i| + (m;\mu^i))}(c_1|\ln\nu| + c_2)\cdot \\ \cdot\frac{1}{\left(1+\nu^{-N}\left((t_1t_2)^{N\alpha} + t_1^{N\theta}\right)\right)\left(1+\nu^{-N}\left((t_1t_2)^{N\alpha} + t_2^{N\sigma}\right)\right)},\end{gathered} \tag{1.6}$$

при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

Доказательство. Сначала для любого мультииндекса $m = (m_1, m_2)$ изучим поведение интеграла

$$\int\limits_{R^2} \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2} e^{-P(\nu,\xi)}d\xi_1 d\xi_2$$

относительно $\nu \in (0;1)$.

Для этого достаточно изучить интеграл

$$I = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2} e^{-((\nu\xi_1^{l_1})^{2k} + (\nu\xi_2^{l_2})^{2k} + (\nu\xi_1^{\alpha_1}\cdot\xi_2^{\alpha_2})^{2k})}d\xi_1 d\xi_2.$$

Если $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то после замены переменных $\xi = \nu^{-\mu^1}\eta$ интеграл I примет вид

$$I = \nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))} \int_0^\infty \int_0^\infty \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} e^{-\eta_1^{2kl_1} - \eta_1^{2k\alpha_1}\eta_2^{2k\alpha_2} - \nu^{2k(1-l_2\mu_2^1)}\eta_2^{2kl_2}} d\eta_1 d\eta_2$$

$$\leq C\nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))} \int_0^\infty \int_0^\infty \eta_1^{m_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}-m_2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} e^{-\eta_1^{2kl_1}} (\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\eta_2)^{m_2} e^{-(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\eta_2)^{2k\alpha_2}} \times$$

$$\times d(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\eta_2) d\eta_1 \leq C\nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))} \int_0^\infty t^{m_2} e^{-t^{2k\alpha_2}} dt \int_0^\infty \eta_1^{m_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}-m_2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} e^{-\eta_1^{2kl_1}} d\eta_1 \leq$$

$$\leq C\nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))},$$

т.к. $m_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - m_2\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > -1$.

Если же $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то после замены переменных $\xi = \nu^{-\mu^2}\eta$ аналогичным образом получим, что $I \leq C\nu^{-(|\mu^2|+(m;\mu^2))}$. Изучим случай, когда $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{m_1+1}{m_2+1}$. Так как

$$\mu^1 = \left(\frac{1}{e_1}; \frac{l_1-\alpha_1}{\alpha_2 \cdot l_1}\right),$$

$$\mu^2 = \left(\frac{l_2-\alpha_2}{\alpha_1 \cdot l_2}; \frac{1}{l_2}\right)$$

и $\frac{\alpha_1}{l_1} + \frac{\alpha_2}{l_2} > 1$, то $\mu_1^1 > \mu_1^2$; $\mu_2^1 < \mu_2^2$. Разделим I на следующие интегралы:

$$I = \int_0^{\nu^{-\mu_1^1}} d\xi_1 \int_0^{\nu^{-\mu_2^1}} d\xi_2 + \int_0^{\nu^{-\mu_1^1}} d\xi_1 \int_{\nu^{-\mu_2^1}}^\infty d\xi_2 + \int_{\nu^{-\mu_1^1}}^\infty d\xi_1 \int_0^{\nu^{-\mu_2^1}} d\xi_2 + \int_{\nu^{-\mu_1^1}}^\infty d\xi_1 \int_{\nu^{-\mu_2^1}}^\infty d\xi_2 =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности.

В I_1 произведя замену переменных $\xi = \nu^{-\mu^1}\eta$, получим

$$I_1 \leq \nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))} \int_0^1 \int_0^1 \eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2} e^{-\eta_1^{2kl_1} - \eta_1^{2k\alpha_1}\eta_2^{2k\alpha_2}} d\eta_1 d\eta_2 \leq C\nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))}$$

В I_2 произведя замену переменных $\xi = \nu^{-\mu^2}\eta$, имеем

$$I_2 = \nu^{-(|\mu^2|+(m;\mu^2))} \int\limits_0^{\nu^{\mu_1^2-\mu_1^1}} \int\limits_{\nu^{\mu_2^2-\mu_2^1}}^{\infty} \eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2} e^{-\eta_2^{2kl_2}} e^{-\left(\eta_1\eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right)^{2k\alpha_1}} d\eta_1 d\eta_2 \leq$$

$$\leq C\nu^{-(|\mu^2|+(m;\mu^2))} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{\nu^{\mu_2^2-\mu_2^1}}^{\infty} e^{-\eta_2^{2kl_2}} e^{-\left(\eta_1\eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right)^{2k\alpha_1}} \left(\eta_1\eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right)^{m_1} \times$$

$$\times \eta_2^{m_2-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(m_1+1)} d\left(\eta_1\eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right) d\eta_2 \leq$$

$$\leq C\nu^{-(|\mu^2|+(m;\mu^2))} \int\limits_0^{\infty} t^{m_1} e^{-t^{2k\alpha_1}} dt \int\limits_{\nu^{\mu_2^2-\mu_2^1}}^{\infty} \frac{e^{-\eta_2^{2kl_2}}}{\eta_2} d\eta_2 \leq$$

$$\leq \nu^{-(|\mu^2|+(m;\mu^2))}(c_1|\ln\nu| + c_2)$$

т.к. $m_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(m_1+1) = -1$, а $\nu^{\mu_2^2-\mu_2^1} < 1$.

В I_3 после замены переменных $\xi = \nu^{-\mu^1}\eta$, имеем

$$I_3 = \nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))} \int\limits_1^{\infty} \int\limits_0^{1} e^{-\left(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\eta_2\right)^{2k\alpha_2}} d\left(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\eta_2\right) \left(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\eta_2\right)^{m_2} e^{-\eta_1^{2kl_1}} \times$$

$$\times \eta_1^{m_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}m_2-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} d\eta_1 \leq C\nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))} \int\limits_0^{\infty} e^{-t^{2k\alpha_2}} t^{m_2} dt \int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-\eta_1^{2kl_1}}}{\eta_1} d\eta_1 \leq$$

$$\leq C\nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))}.$$

Наконец, для I_4 сделав преобразование $\xi = \nu^{-\mu^1}\eta$ получим

$$I_4 = \nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))} \int\limits_1^{\infty} \int\limits_1^{\infty} \left(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\eta_2\right)^{m_2} e^{-\left(\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\eta_2\right)^{2k\alpha_2}} \eta_1^{m_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}m_2-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} e^{-\eta_1^{2kl_1}} \times$$

$$\times d\left(\eta^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\eta_2\right) d\eta_1 \leq C\nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))} \int\limits_0^{\infty} t^{m_2} e^{-t^{2k\alpha_2}} dt \int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-\eta_1^{2kl_1}}}{\eta_1} d\eta_1 \leq$$

$$\leq C\nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))}$$

Из полученных оценок для I_k, $k = 1, 2, 3, 4$ с некоторыми постоянными c_1, c_2 имеет место неравенство

$$I \leq \nu^{-\max\limits_{i=1,2}(|\mu^i|+(m;\mu^i))}(c_1|\ln\nu| + c_2).$$

Применяя полученную оценку докажем лемму 1.1. Рассмотрим $G^{\cdot}_{1,1}(t;\nu)$. Для любого мультииндекса $m=(m_1,m_2)$ имеем

$$D^m G^{\cdot}_{1,1}(t;\nu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2}\xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}e^{-i(t,\xi)}e^{-\left((\nu\xi_1^{l_1})^{2k}+(\nu\xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2})^{2k}+(\nu\xi_2^{l_2})^{2k}\right)}2k(\nu\xi_1^{l_1})^{2k-1}d\xi_1d\xi_2.$$

Пусть $\alpha_1<\alpha_2$. Если k такое число, что $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}<\frac{m_1+(2k-1)l_1}{m_2}$, то производя замену переменных $\xi=\nu^{-\mu^1}\eta$, имеем

$$\left|D^m G^{\cdot}_{1,1}(t;\nu)\right|\le C\nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\eta_1^{m_1+(2k-1)l_1}\eta_2^{m_2}e^{-\eta_1^{2kl_1}}e^{-\eta_1^{2k\alpha_1}\eta_2^{2k\alpha_2}}d\eta_1d\eta_2\le$$

$$\le C\nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))}$$

Случай $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\ge\frac{m_1+(2k-1)l_1}{m_2}$ оценивается как и выше при оценке I.

Оценим $\nu^{-N}t_1^{N\alpha_1}t_2^{N\alpha_2}D^mG^{\cdot}_{1,1}(t;\nu)$. По свойству преобразования Фурье имеем

$$\nu^{-N}t_1^{N\alpha_1}t_2^{N\alpha_2}D^mG^{\cdot}_{1,1}(t;\nu)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2}\nu^{-N}D_{\xi_1}^{N\alpha_1}D_{\xi_2}^{N\alpha_2}e^{-i(t,\xi)}\xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}2k\left(\nu\xi_1^{l_1}\right)^{2k-1}e^{-P(\nu,\xi)}d\xi_1d\xi_2,$$

которое после интегрирования по частям сводится к интегралу

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2}\nu^{-N}e^{-i(t,\xi)}D_{\xi_1}^{N\alpha_1}D_{\xi_2}^{N\alpha_2}\left(\xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}2k\left(\nu\xi_1^{l_1}\right)^{2k-1}e^{-P(\nu,\xi)}\right)d\xi_1d\xi_2,$$

и вопрос сводится к оценке интеграла

$$\nu^{-N}\int\limits_{R^2}\left|D_{\xi_1}^{N\alpha_1}D_{\xi_2}^{N\alpha_2}\left(\xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}2k\left(\nu\xi_1^{l_1}\right)^{2k-1}e^{-P(\nu,\xi)}\right)\right|d\xi_1d\xi_2.$$

Для производной функции $\Phi(\xi)e^{P(\nu,\xi)}$ имеет место формула

$$D_\xi^\alpha(\Phi(\xi)e^{P(\nu,\xi)})=\sum_{\beta+\gamma=\alpha}C_{|\alpha|}^{|\beta|}D^\beta\Phi(\xi)\sum_{\sigma^1+\ldots+\sigma^{|\gamma|}=\gamma}e^{P(\nu,\xi)}\prod_{j=1}^{|\gamma|}D^{\sigma^j}\left(P(\nu,\xi)\right),$$

где $C_{|\alpha|}^{|\beta|}$ некоторые биномиальные коэффициенты, а произведение берется для тех σ^j, для которых $\left|\sigma^j\right|>0$. Следовательно, нужно оценить следующие интегралы

$$\text{(1.7)}\qquad \nu^{-N}\sum_{\beta+\gamma=N\alpha}C_{|N\alpha|}^{|\beta|}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty D_\xi^\beta\left(\xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}2k\left(\nu\xi_1^{l_1}\right)^{2k-1}\right)$$

$$\sum_{\sigma^1+\ldots+\sigma^{|\gamma|}=\gamma}e^{P(\nu,\xi)}\prod_{j=1}^{|\gamma|}D_\xi^{\sigma^j}\left(\sum_{r=1}^{3}\left(\nu\xi^{\alpha^r}\right)^{2k}\right)d\xi_1d\xi_2$$

Рассмотрим суммы в формуле (1.8). Степень ξ_1-го в данном слагаемом обозначим ρ_1, а степень ξ_2-го - ρ_2. Если а) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, то сделаем преобразование $\xi = \nu^{-\mu^1}\eta$, б) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, то сделаем преобразование $\xi = \nu^{-\mu^2}\eta$, в) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, как и выше, разделим интеграл на отдельные слагаемые и в каждом сделаем преобразование $\xi = \nu^{-\mu^1}\eta$ или $\xi = \nu^{-\mu^2}\eta$. В каждом из случаев вычислим степень ν. (Заметим, что если $\xi = \nu^{-\mu^1}\eta$, то $D_\xi^\beta = \nu^{(\mu^1,\beta)}D_\eta^\beta$).

В случае а) имеем

$$\nu^{N+(N\alpha;\mu^1)+(2k-1)(1-l_1\cdot\mu_1^1)}\prod_{r=1}^{3}\nu^{2k(1-(\alpha^r;\mu^1))}\nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))},$$

т.к $(N\alpha;\mu^1) = N,\ l_1\cdot\mu_1^1 = 1;\ 1-(\alpha^r;\mu^1) \geq 0$ то имеем, что степень ν больше или равна чем $-(|\mu^1| + (m;\mu^1))$, следовательно, в случае а) имеем, что

$$\nu^{-N}t_1^{N\alpha_1}t_2^{N\alpha_2}\left|D^m\hat{G_{1,1}}(t;\nu)\right| \leq C\nu^{-\max\limits_{i=1,2}(|\mu^i|+(m;\mu^i))}$$

В случае б) сделаем преобразование $\xi = \nu^{-\mu^2}\eta$, тогда в степени ν все μ^1 заменятся на μ^2 и так как $l_1\cdot\mu_1^2 < 1, (N\alpha,\mu^2) = N, 1-(\alpha^r,\mu^2) \geq 0$, то опять получается аналог случая а).

В случае в) после разделения интеграла на отдельные слагаемые, как и выше, имеем, что для некоторых постоянных a_1 и a_2 имеет место неравенство

$$\left|D^m\hat{G_{1,1}}(t;\nu)\right| \leq \nu^{-\max\limits_{i=1,2}(|\mu^i|+(m;\mu^i))}(a_1|\ln\nu| + a_2) \tag{1.8}$$

Оценка выражения $\nu^{-N}t_1^{N\theta}\hat{G_{1,1}}(t;\nu)$ производится аналогично, если заметить, что $N\theta\cdot\mu_1^1 - N > 0$. В итоге имеем, что для некоторых a_1 и a_2

$$\nu^{-N}t_1^{N\theta}\left|D^m\hat{G_{1,1}}(t;\nu)\right| \leq \nu^{-\max\limits_{i=1,2}(|\mu^i|+(m;\mu^i))}(a_1|\ln\nu| + a_2).$$

что и доказывает оценку (1.5). Неравенство (1.6) доказывается аналогично. Докажем неравенство (1.7). Для этого оценим

$$I = \left(1+\nu^{-N}\left((t_1t_2)^{N\alpha}+t_1\right)^{N\theta}\right)\left(1+\nu^{-N}\left((t_1t_2)^{N\alpha}+t_2\right)^{N\sigma}\right)D^m\hat{G_{1,1}}(t;\nu) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2} e^{-i(t;\xi)}\left(1+\nu^{-N}D_1^{N\theta}+\nu^{-N}D_2^{N\sigma}+\nu^{-2N}(D_1D_2)^{2N\alpha}+\nu^{-2N}(D_1D_2)^{N\alpha}D_1^{N\theta}+\right.$$

$$\left.+\nu^{-2N}(D_1D_2)^{N\alpha}D_2^{N\sigma}+\nu^{-2N}D_1^{N\theta}D_2^{N\sigma}\right)\left(\xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}\left(\nu\xi_1^{l_1}\right)^{2k}e^{-P(\nu;\xi)}\right)d\xi_1 d\xi_2.$$

Здесь каждое слагаемое оценивается как и в предыдущем случае, кроме последних трех слагаемых, где при вычислении степени ν нужно учитывать, что если делается преобразование $\xi = \nu^{-\mu^1}$, то $N\theta\cdot\mu_1^1 > N$, $N\sigma\cdot\mu_2^1 = N$, а при преобразовании $\xi = \nu^{-\mu^2}$ $N\theta\cdot\mu_2^1 = N$, $N\sigma\cdot\mu_2^1 > N$ и во всех слагаемых степень ν будет больше или равно чем $-\max\limits_{i=1,2}\left(|\mu^i| + (m;\mu^i)\right)$, следовательно, для некоторых постоянных c_1, c_2 имеем оценку

$$I \leq C\nu^{-\max\limits_{i=1,2}\left(|\mu^i|+(m;\mu^i)\right)}(c_1 \ln|\nu| + c_2).$$

$\square$

Замечание 1.1. *В неравенствах (1.5) – (1.7) множитель $|\ln\nu|$ появляется только в тех случаях, когда в формуле (1.8) есть слагаемое, для которого $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$. В остальных случаях неравенства (1.5)-(1.7) справедливы без множителя $|\ln\nu|$.*

Лемма 1.2. *Пусть как и в лемме 1.1 θ и σ такие числа, что $\theta\cdot\mu_1^2 = 1$; $\sigma\cdot\mu_2^1 = 1$, а N такое натуральное число, что $N\theta$ и $N\sigma$ чётные. Тогда, существуют постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 такие, что для любого ν : $0 < \nu < 1$ имеют место оценки*

$$\int\limits_{R^2} \frac{dt_1dt_2}{1+\nu^{-N}\left(t_1^{N\alpha_1}t_2^{N\alpha_2}+t_1^{N\theta}\right)} \leq C_1\nu^{|\mu^2|}, \quad \text{при } \alpha_1 < \alpha_2 \tag{1.9}$$

$$\int\limits_{R^2} \frac{dt_1dt_2}{1+\nu^{-N}\left(t_1^{N\alpha_1}t_2^{N\alpha_2}+t_2^{N\sigma}\right)} \leq C_2\nu^{|\mu^1|}, \quad \text{при } \alpha_1 > \alpha_2 \tag{1.10}$$

$$\int\limits_{R^2} \frac{dt_1dt_2}{\left(1+\nu^{-N}\left((t_1t_2)^{N\alpha}+t_1^{N\theta}\right)\right)\left(1+\nu^{-N}\left((t_1t_2)^{N\alpha}+t_2^{N\sigma}\right)\right)} \leq \tag{1.11}$$

$$\leq \nu^{|\mu^1|}(C_3|\ln\nu| + C_4), \quad \text{при } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

Доказательство. Достаточно оценить интегралы от нуля до бесконечности. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$, обозначим через

$$I = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{dt_1dt_2}{1+\nu^{-N}\left(t_1^{N\alpha_1}t_2^{N\alpha_2}+t_1^{N\theta}\right)}.$$

После преобразования $\tau = \nu^{\mu^2}t$, имеем

$$I = \nu^{|\mu^2|}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{d\tau_1d\tau_2}{1+\tau_1^{N\alpha_1}\tau_2^{N\alpha_2}+\tau_1^{N\theta}} = \nu^{|\mu^2|}\int\limits_0^\infty \frac{d\tau_1}{\tau_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}}\int\limits_0^\infty \frac{d\left(\tau_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\tau_2\right)}{1+\left(\tau_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\tau_2\right)^{N\alpha_2}+\tau_1^{N\theta}}$$

Обозначим $\eta_1 = \tau_1, \eta_2 = \tau_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\tau_2$, имеем

$$I \leq C\nu^{|\mu^2|}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{d\eta_1d\eta_2}{\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(1+\eta_2^{N\alpha_2}+\eta_1^{N\theta}\right)}.$$

Т.к. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < 1$, то интеграл сходится и $I \le C\nu^{|\mu^2|}$.

Аналогично доказывается неравенство (1.11). Докажем неравенство (1.12). Так как $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, то $|\mu^1| = |\mu^2|$, $\mu_1^1 > \mu_1^2$, следовательно $\mu_2^1 < \mu_2^2$, и интеграл разделим на следующие слагаемые

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dt_1 dt_2}{\left(1 + \nu^{-N}\left((t_1 t_2)^{N\alpha} + t_1^{N\theta}\right)\right)\left(1 + \nu^{-N}\left((t_1 t_2)^{N\alpha} + t_2^{N\sigma}\right)\right)} =$$

$$= \int_0^{\nu^{\mu_1^2}} dt_1 \int_0^{\nu^{\mu_2^2}} dt_2 + \int_{\nu^{\mu_1^2}}^\infty dt_1 \int_0^{\nu^{\mu_2^2}} dt_2 + \int_0^{\nu^{\mu_1^2}} dt_1 \int_{\nu^{\mu_2^2}}^\infty dt_2 + \int_{\nu^{\mu_1^2}}^\infty dt_1 \int_{\nu^{\mu_2^2}}^\infty dt_2 =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Теперь оценим каждое слагаемое по отдельности.

В I_1 производя замену переменных $t = \nu^{\mu^2}\eta$, имеем

$$I_1 \le C\nu^{|\mu^2|} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\eta_1 d\eta_2}{1 + (\eta_1\eta_2)^{N\alpha} + \eta_1^{N\theta}} \le C\nu^{|\mu^2|} = C\nu^{|\mu^1|}.$$

После преобразования $t = \nu^{\mu^2}\eta$ I_2 примет вид

$$I_2 = \nu^{|\mu^2|} \int_1^\infty d\eta_1 \int_0^1 \frac{d\eta_2}{1 + (\eta_1\eta_2)^{N\alpha} + \eta_1^{N\theta}} \le C\nu^{|\mu^2|} \int_1^\infty \frac{d\eta_1}{1 + \eta_1^{N\theta}} \le C\nu^{|\mu^2|} = C\nu^{|\mu^1|}.$$

Для I_3 сделаем преобразование $t = \nu^{\mu^1}\eta$, имеем

$$I_3 = \nu^{|\mu^1|} \int_{\nu^{\mu_2^2 - \mu_2^1}}^\infty d\eta_2 \int_0^{\nu^{\mu_1^2 - \mu_1^1}} \frac{d\eta_1}{1 + (\eta_1\eta_2)^{N\alpha} + \eta_2^{N\sigma}} \le \nu^{|\mu^1|} \int_{\nu^{\mu_2^2 - \mu_2^1}}^\infty \frac{d\eta_2}{\eta_2} \int_0^\infty \frac{d(\eta_1\eta_2)}{1 + (\eta_1\eta_2)^{N\alpha} + \eta_2^{N\sigma}}$$

$$\le \nu^{|\mu^1|} \int_{\nu^{\mu_2^2 - \mu_2^1}}^1 \frac{d\eta_2}{\eta_2} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^{N\alpha}} + \nu^{|\mu^1|} \int_1^\infty \frac{d\eta_2}{\eta_2} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^{N\alpha} + \eta_2^{N\sigma}} = \nu^{|\mu^1|}(c_1|\ln\nu| + c_2).$$

В I_4 сделаем преобразование $t = \nu^{\mu^2}\eta$. Тогда

$$I_4 \le C\nu^{|\mu^2|} \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{d\eta_1 d\eta_2}{1 + \eta_2^{N\alpha} + \eta_1^{N\theta}} \le C\nu^{|\mu^2|} = C\nu^{|\mu^1|}.$$

Лемма 1.2 доказана. □

Лемма 1.3. *Для любого мультииндекса $m = (m_1; m_2)$ и любого натурального числа N существуют постоянные числа C_i, $i = 1, 2, 3, 4$ такие, что для любого*

$\nu > 1$ имеют место неравенства

(1.12)

$$\left|D^m G_{1,j}^{\cdot}(t;\nu)\right| \le C_1 \nu^{-\min\limits_{i=1,2}(|\mu^i|+(m;\mu^i))} \frac{1}{1+\nu^{-N}\left(t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_1^{Nl_1}\right)}, \text{ при } \alpha_1 < \alpha_2$$

(1.13)

$$\left|D^m G_{1,j}^{\cdot}(t;\nu)\right| \le C_2 \nu^{-\min\limits_{i=1,2}(|\mu^i|+(m;\mu^i))} \frac{1}{1+\nu^{-N}\left(t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_2^{Nl_2}\right)}, \text{ при } \alpha_1 > \alpha_2$$

(1.14)

$$\left|D^m G_{1,j}^{\cdot}(t;\nu)\right| \le C_3 \nu^{-\min\limits_{i=1,2}(|\mu^i|+(m;\mu^i))} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(1+\nu^{-N}\left((t_1t_2)^{N\alpha} + t_1^{Nl_1}\right)\right)\left(1+\nu^{-N}\left((t_1t_2)^{N\alpha} + t_2^{Nl_2}\right)\right)}, \text{ при } \alpha_1 = \alpha_2$$

(1.15)
$$\left|D^m G_{1,j}^{\cdot}(t;\nu)\right| \le C_4 \nu^{-(|\lambda|+(m;\lambda))} \frac{1}{1+\nu^{-N}\left(t_1^{Nl_1} + t_2^{Nl_2}\right)}$$

Доказательство. Как и в лемме 1.1 для получения оценок (1.13)-(1.15), например для $G_{1,1}^{\cdot}(t;\nu)$, нужно оценить интеграл

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \left(\nu \xi_1^{l_1}\right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)} d\xi_1 d\xi_2.$$

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$. Если $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то после преобразования $\xi = \nu^{-\mu^1}\eta$ и из того, что $l_1 \cdot \mu_1^1 = 1$, имеем

$$I \le C\nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))}.$$

Если $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$, то после преобразования $\xi = \nu^{-\mu^2}\eta$ имеем

$$I = \nu^{-(|\mu^2|+(m;\mu^2))} \int_0^\infty \int_0^\infty \eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2} \left(\nu^{(1-l_1\mu_1^2)}\eta_1^{l_1}\right)^{2k-1} e^{-\eta_2^{2kl_2}} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1}\eta_2^{2k\alpha_2}} \times$$

$$\times e^{-\left(\nu^{(1-l_1\mu_1^2)}\eta_1^{l_1}\right)^{2k}} d\eta_1 d\eta_2.$$

Функция $\left(\nu^{(1-l_1\mu_1^2)}\eta_1^{l_1}\right)^{2k-1} \cdot e^{-\left(\nu^{(1-l_1\mu_1^2)}\eta_1^{l_1}\right)^{2k}}$ как функция от двух переменных равномерно ограничено по ν и по η_1. Следовательно, имеем оценку

$$I \le C\nu^{-(|\mu^2|+(m;\mu^2))} \int_0^\infty \int_0^\infty \eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2} e^{-\eta_2^{2kl_2}} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1}\eta_2^{2k\alpha_2}} d\eta_1 d\eta_2 \le C\nu^{-(|\mu^2|+(m;\mu^2))},$$

так как $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{m_1+1}{m_2+1}$. Случай $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{m_1+1}{m_2+1}$ оценивается аналогично.

Для оценки $\nu^{-N} t_1^{N\alpha_1} t_1^{N\alpha_1} G^*_{1,1}(t;\nu)$ нужно исследовать интеграл

$$\nu^{-N} \int_0^\infty \int_0^\infty D_1^{N\alpha_1} D_2^{N\alpha_2} \left(\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \left(\nu \xi_1^{l_1} \right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)} \right) d\xi_1 d\xi_2.$$

Как и при доказательстве леммы 1.1, применяя формулу производной функции $\Phi(\xi) e^{P(\xi)}$ получим, что нужно оценить интегралы типа (1.8). Обозначим степень ξ_1 через ρ_1, а степень ξ_2 - ρ_2.

Если а) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$, то после преобразования $\xi = \nu^{\mu^1} \eta$, имеем

$$\nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))-N} \int_0^\infty \int_0^\infty \nu^N D_\eta^\beta \left(\eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} 2k \left(\nu^{1-l_1\mu_1^1} \eta_1^{l_1} \right)^{2k-1} \right) \cdot$$

$$\sum_{\sigma^1+\ldots+\sigma^{|\gamma|}=\gamma} e^{-\eta_1^{2kl_1}} e^{-\eta_1^{2k\alpha_1} \eta_2^{2k\alpha_2}} e^{-\left(\nu^{1-l_2\mu_2^1} \eta_2^{l_2} \right)^{2k}} \prod_{j=1}^{|\gamma|} D_\eta^{\sigma^j} \sum_{r=1}^{3} \left(\nu^{(1-(\alpha^r,\mu^1))} \eta^{\alpha^r} \right)^{2k} d\eta_1 d\eta_2$$

Выделим те множители $\nu^{1-(\alpha^r,\mu^1)} \eta^{\alpha^r}$, для которых $(\alpha^r,\mu^1) < 1$ (т.е. это $\alpha_3 = (0;l_2)$). Для данного множителя имеем выражение: $\left(\nu^{(1-l_2\mu_1^2)} \eta_2^{l_2} \right)^{2k} e^{-\left(\nu^{(1-l_2\mu_1^2)} \eta_2^{l_2} \right)^{2k}}$, которое равномерно ограничено и, следовательно, в этом случае, для интеграла I имеем:

$$I \leq C \nu^{-(|\mu^1|+(m;\mu^1))}.$$

Случаи $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$ и $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}$ оцениваются аналогично. Оценим теперь $\nu^{-N} t_1^{Nl_1} D^m G^*_{1.1}(t;\nu)$. Для этого нужно оценить интеграл

$$\nu^{-N} \int_0^\infty \int_0^\infty D_1^{Nl_1} \left(\xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \left(\nu \xi_1^{l_1} \right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)} \right) d\xi_1 d\xi_2.$$

Здесь, аналогично, учитывая то, что если делается преобразование $\xi = \nu^{\mu^2} \eta$, то в степени ν появится показатель $-N + Nl_1 \cdot \mu_1^2$, но так как $Nl_1 \cdot \mu_1^2 < N$ и $\nu > 1$, то степень $\nu^{-N+Nl_1\mu_1^2}$ можно оценить через единицу. Остальные рассуждения аналогичны. Неравенства (1.14) и (1.15) доказываются аналогично. Докажем неравенство (1.16). После преобразования $\xi = \nu^{-\lambda} \eta$ имеем, что $I \leq C \nu^{-(|\lambda|+(m;\lambda))}$. При оценке $\nu^{-N} t_1^{Nl_1} D^m G^*_{11}(t;\nu)$ в степени ν кроме $-(|\lambda| + (m;\lambda))$ появляются выражения типа $(1-(\alpha^r;\lambda))\, 2k$ $(r = 1,2,3)$, которые неположительны ($(\alpha^r;\lambda) \geq 1$) и так как $\nu > 1$, то $\nu^{(1-(\alpha^r;\lambda))2k} \leq 1$. В итоге имеем опять оценку

$$\left| \nu^{-N} t_1^{Nl_1} D^m G^*_{11}(t;\nu) \right| \leq C \nu^{-(|\lambda|+(m;\lambda))}.$$

□

Аналогично, как и в лемме 1.2, в случае $\nu > 1$ имеем:

Лемма 1.4. *Для произвольного натурального числа N и мультииндекса $m = (m_1; m_2)$ существуют постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 такие, что для любого $\nu > 1$*

$$\int\limits_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{1 + \nu^{-N}\left(t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_1^{Nl_1}\right)} \le C_1 \nu^{|\mu^1|}, \quad \text{при } \alpha_1 < \alpha_2, \tag{1.16}$$

$$\int\limits_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{1 + \nu^{-N}\left(t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_2^{Nl_2}\right)} \le C_2 \nu^{|\mu^2|}, \quad \text{при } \alpha_1 > \alpha_2, \tag{1.17}$$

$$\int\limits_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{\left(1 + \nu^{-N}\left(t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_1^{Nl_1}\right)\right)\left(1 + \nu^{-N}\left(t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_2^{Nl_2}\right)\right)} \le C_3 \nu^{|\mu^3|}, \tag{1.18}$$

при $\alpha_1 = \alpha_2$.

$$\int\limits_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{1 + \nu^{-N}\left(t_1^{N\lambda_1} + t_2^{N\lambda_2}\right)} \le C_4 \nu^{|\lambda|}. \tag{1.19}$$

Доказательство. Проводится аналогично доказательству леммы 1.2. □

2. Усреднение функции с ядром, порожденным набором мультииндексов

Для любой функции U рассмотрим усреднение с ядром усреднения $\tilde{G}_0(t;\nu)$

$$U_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R^2} U(t) \tilde{G}_0(t - x; \nu) dt \tag{2.1}$$

Функция $U_\nu(x)$ обладает следующим классическим свойством, характерным для усреднения.

Лемма 2.1. *Пусть $1 < p < \infty$, тогда если $f \in L_p(R^2)$, то $f_\nu \in L_p(R^2)$ и $\|f_\nu\| \to 0$ при $\nu \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $\nu > 1$. Так как $C_0^\infty(R^n)$ плотно в $L_p(R^2)$, то для произвольного $\epsilon > 0$ существует $\phi_\epsilon \in C_0^\infty(R^2)$ такая, что $\|f - \phi_\epsilon\|_{L_p(R^2)} < \epsilon$.

Применяя неравенство Юнга, оценим $\|f_\nu\|_{L_p}$. Имеем

$$\|f_\nu\|_{L_p} = \left\| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R^2} \hat{G}_0(t-x;\nu) f(t) dt \right\|_{L_p} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left\| \int\limits_{R^2} \hat{G}_0(t-x;\nu)\left(f(t)-\phi_\epsilon(t)\right) dt \right\|_{L_p} + \frac{1}{2\pi} \left\| \int\limits_{R^2} \hat{G}_0(t-x;\nu) \phi_\epsilon(t) dt \right\|_{L_p} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left\|\hat{G}_0\right\|_{L_1} \|f-\phi_\epsilon\|_{L_p} + \frac{1}{2\pi} \|\phi_\epsilon\|_{L_1} \left\|\hat{G}_0(t;\nu)\right\|_{L_p} = I_1 + I_2.$$

Оценим I_1. Из оценки (1.20) при $m=0$, $N>2$ имеем, что

$$\int\limits_{R^2} \left|\hat{G}_0(t;\nu)\right| dt \leq C\nu^{-|\lambda|} \int\limits_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{1+\nu^{-N}\left(t_1^{Nl_1}+t_2^{Nl_2}\right)} \leq C_1,$$

которая получается после замены в интеграле переменных $t=\nu^\lambda\eta$. Следовательно, $I_1 \leq C_1\epsilon$.

Оценим I_2. Опять применяя неравенство (1.20) имеем

$$I_2 \leq C_\epsilon \nu^{-|\lambda|} \left(\int\limits_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{\left(1+\nu^{-N}\left(t_1^{Nl_1}+t_2^{Nl_2}\right)\right)^p} \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C_\epsilon \nu^{-|\lambda|+\frac{|\lambda|}{p}} \left(\int\limits_{R^2} \frac{d\eta_1 d\eta_2}{\left(1+\eta_1^{Nl_1}+\eta_2^{Nl_2}\right)^p} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Т. к. $p>1$, и интеграл сходится, то I_2 стремится к нулю, когда $\nu \to +\infty$. □

Лемма 2.2. *Если* $f \in L_p(R^2)$, $1 \leq p < \infty$, *то* $f_\nu \in L_p(R^2)$ *и* $\lim\limits_{\nu\to 0} \|f_\nu - f\|_{L_p(R^2)} = 0$.

Доказательство. Так как $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2} \hat{G}_0(t;\nu)dt = G_0(0;\nu) = 1$, то $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2} f(x)\times$ $\times\hat{G}_0(t;\nu)dt$ и для разности $f_\nu - f$ имеем

$$f_\nu(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2} \left(f(x+\tau)-f(x)\right)\hat{G}_0(\tau;\nu)d\tau.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского получим:

$$\|f_\nu - f\|_{L_p} \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2} \|f(\cdot+\tau)-f(\cdot)\|_{L_p} \left|\hat{G}_0(\tau;\nu)\right| d\tau.$$

Как и при доказательстве леммы 1.1, можно показать, что для любого натурального числа N существует такое число $C>0$, что

$$\left|\hat{G}_0(\tau;\nu)\right| \leq C\nu^{-|\lambda|+(1-(\alpha,\lambda))2k} \frac{1}{1+\nu^{-N}\left(\tau_1^{Nl_1}+\tau_2^{Nl_2}\right)} \tag{2.2}$$

Пусть $M > 0$ произвольный параметр, $\rho_\lambda(x) = \left(x_1^{2l_1} + x_2^{2l_2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Последний интеграл представим в виде

$$\|f_\nu - f\|_{L_p} \leq C \int\limits_{\rho_\lambda(\tau)\leq\nu M} \|f(\cdot+\tau) - f(\cdot)\|_{L_p} \left|\hat{G}_0(\tau;\nu)\right| d\tau$$

$$+ C \int\limits_{\rho_\lambda(\tau)\geq\nu M} \|f(\cdot+\tau) - f(\cdot)\|_{L_p} \left|\hat{G}_0(\tau;\nu)\right| d\tau = A_1(\nu) + A_2(\nu)$$

Учитывая неравенство (2.2), для $A_2(\nu)$ имеем

$$A_2(\nu) \leq 2C\|f\|_{L_p(R^2)}\nu^{-|\lambda|+(1-(\alpha,\lambda))2k} \int\limits_{\rho_\lambda(\tau)\geq\nu M} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{1+\nu^{-N}\left(\tau_1^{Nl_1}+\tau_2^{Nl_2}\right)},$$

который после преобразования $\tau = \nu^\lambda\eta$ примет вид

$$A_2(\nu) \leq 2C\|f\|_{L_p(R^2)}\nu^{(1-(\alpha,\lambda))2k} \int\limits_{\rho_\lambda(\eta)\geq M} \frac{d\eta_1 d\eta_2}{1+\eta_1^{Nl_1}+\eta_2^{Nl_2}}.$$

Пусть $M = \nu^{-1+\gamma}$, где $\gamma \in (0,1)$ пока произвольное число. Оценим последний интеграл с помощью λ сферического преобразования (см. [8]), т. е. обозначим $\eta_1 = r^{\lambda_1}\omega_1, \eta_2 = r^{\lambda_2}\omega_2$, где $\omega_1^{2l_1} + \omega_2^{2l_2} = 1$. Если $a = \min\left(\omega_1^{2Nl_1} + \omega_2^{2Nl_2}\right)$ на многообразии $\omega_1^{2l_1} + \omega_2^{2l_2} = 1$, то для $A_2(\nu)$ имеем

$$A_2(\nu) \leq 2C\|f\|_{L_p(R^2)}\nu^{(1-(\alpha,\lambda))2k} \int\limits_{\nu^{-1+\gamma}}^{\infty} \int\limits_{\rho_\lambda(\omega)=1} \frac{r^{|\lambda|-1}dr}{1+r^N a}\left(\sum_{i=1}^{2}\lambda_i^2\omega_i^2\right) d\omega$$

$$\leq \int\limits_{\nu^{-1+\gamma}}^{\infty} r^{|\lambda|-1-N} dr C\nu^{(1-(\alpha,\lambda))2k}\|f\|_{L_p(R^2)} = C\nu^{(N-|\lambda|)(1-\gamma)+(1-(\alpha,\lambda))2k}\|f\|_{L_p(R^2)}$$

Пусть N такое число, что показатель ν положительный, тогда $A_2(\nu) \to 0$, когда $\nu \to 0$.

Оценим $A_1(\nu)$. Применяя лемму 1.1 для случая $\alpha_1 < \alpha_2, m = 0, N = 0$, имеем

$$A_1(\nu) \leq C \sup_{\rho_\lambda(\eta)\leq\nu^\gamma} \|f(\cdot+\eta) - f(\cdot)\|_{L_p(R^2)}\nu^{-\max\limits_{i=1,2}|\mu^i|} \int\limits_{\rho_\lambda(\eta)\leq\nu^\gamma} d\eta_1 d\eta_2.$$

Так как $|\lambda| > \max\limits_{i=1,2}|\mu^i|$ (это следует из выпуклости многоугольника H), то существует число $\gamma; \gamma \in (0;1)$ такое, что $\gamma|\lambda| > \max\limits_{i=1,2}|\mu^i|$.

После λ сферического преобразования имеем

$$A_1(\nu) \leq C\nu^{\gamma|\lambda|-\max\limits_{i=1,2}|\mu^i|} \sup_{\rho_\lambda(\eta)\leq\nu^\gamma} \|f(\cdot+\eta) - f(\cdot)\|_{L_p(R^2)}.$$

Учитывая, что показатель степени ν положительный, а функция f из L_p непрерывна в целом при $1 \le p < \infty$ (см. [8]), то имеем, что $A_1(\nu) \to 0$, когда $\nu \to 0$.

В случае $\alpha_1 = \alpha_2$ в оценке $A_1(\nu)$ появляется множитель $|\ln \nu|$, который не нарушает сходимости $A_1(\nu)$ к нулю. Лемма 2.2 доказана. □

Следствие 2.1. *Пусть $f \in L_p(R^2)$ $(1 \le p < \infty)$. Тогда существует последовательность $\nu_k \to 0$ при $k \to \infty$, что $\lim\limits_{k\to\infty} f_{\nu_k}(x) = f(x)$ для почти всех $x \in R^2$.*

Доказательство. Результат непосредственно следует из L_p сходимости (тогда для подпоследовательности $f_{\nu_k}(x)$ сходимость к $f(x)$ почти всюду). □

3. Интегральное представление с ядром, порожденным набором мультииндексов

Теорема 3.1. *Пусть для функции f существуют производные $D^{\alpha^i} f, i = 1, 2, 3$, где α^i вершины вполне правильного многоугольника H и $D^{\alpha^i} f \in L_p(R^2)$ $(1 \le p < \infty)$, $i = 1, 2, 3$. Тогда для почти всех $x \in R^2$ имеет место представление*

$$f(x) = f_h(x) + \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{i=1}^{3}\int_{\epsilon}^{h} d\nu \int_{R^2} D^{\alpha^i} f(t)\hat{G_{1,i}}(t - x; \nu)dt \tag{3.1}$$

Доказательство. Из формулы Ньютона-Лейбница и из усреднения (2.1) имеем (3.2)

$$f_h(x) - f_\epsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\epsilon}^{h}\frac{\partial}{\partial\nu}\int_{R^2} f(x+t)\hat{G_0}(t;\nu)dtd\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{\epsilon}^{h}\int_{R^2} f(x+t)\frac{\partial}{\partial\nu}\hat{G_0}(t;\nu)dtd\nu$$

Вычислим $\frac{\partial}{\partial\nu}\hat{G_0}(t;\nu)$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\hat{G_0}(t;\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_{R^2} e^{-i(t,\xi)}\frac{\partial}{\partial\nu}e^{-P(\nu,\xi)}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{3}\int_{R^2} e^{-i(t,\xi)}e^{-P(\nu,\xi)}(-2k)\nu^{2k-1}\xi^{2k\alpha^j}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{3}D_t^{\alpha^j}\int_{R^2} e^{-i(t,\xi)}e^{-P(\nu,\xi)}(-2k)\left(\nu\xi^{\alpha^j}\right)^{2k-1}d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{j=1}^{3}D_t^{\alpha^j}\hat{G_{1,j}}(t;\nu)$$

Подставляя полученное выражение в (3.2) получим

$$f_h(x) - f_\epsilon(x) = \int_{\epsilon}^{h}\left(\int_{R^2} f(x+t)\sum_{j=1}^{3}D_t^{\alpha^j}\hat{G_{1,j}}(t;\nu)dt\right)d\nu.$$

Так как для функции f существуют обобщенные производные $D^{\alpha^j} f$, то по определению обобщенной производной имеем

$$(3.3) \qquad f_h(x) - f_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{3} \int_{\varepsilon}^{h} \left(\int_{R^2} D_t^{\alpha^j} f(x+t) G_{1,j}^{*}(t;\nu) dt \right) d\nu$$

Применяя в соотношении (3.3) следствие 2.1, завершаем доказательство теоремы 3.1. □

4. Теоремы вложения для мультианизотропных пространств

Докажем теорему вложения для функций, принадлежащих мультианизотропному пространству $W_p^H(R^2) = \{f; f \in L_p(R^2), D^{\alpha^i} f \in L_p(R^2), i = 1,2,3\}$, которая при $H = \{\alpha: |\alpha| \le m\}$ совпадает с соответствующими теоремами вложения из работы [1]; [2], а при $H = \{\alpha: (\alpha;\mu) \le 1\}$ совпадает с теоремами вложения для анизотропных пространств (см., например, [8]).

Теорема 4.1. *Пусть $1 \le p \le q < \infty$ или $1 \le p < \infty$ при $q = \infty$; $m = (m_1; m_2)$ - мультииндекс. Обозначим через*

$$\chi = \max_{i=1,2} \left(|\mu^i| + (m, \mu^i) \right) - |\mu^2| \cdot \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \text{ если } \alpha_1 < \alpha_2,$$

$$\chi = \max_{i=1,2} \left(|\mu^i| + (m, \mu^i) \right) - |\mu^1| \cdot \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \text{ если } \alpha_1 > \alpha_2,$$

$$\chi = \max_{i=1,2} \left((m, \mu^i) \right) - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) |\mu^i| \Big) \text{ если } \alpha_1 = \alpha_2.$$

Тогда, при $\chi < 1$ $D^m W_p^H(R^2) \hookrightarrow L_q(R^2)$, т.е. любая функция $f \in W_p^H(R^2)$ имеет обобщенную производную $D^m f$, принадлежащую классу $L_q(R^2)$. При $\alpha_1 \ne \alpha_2$ или $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \ne \frac{m_1+1}{m_2+1}$ имеет место неравенство

(4.1)

$$\|D^m f\|_{L_q(R^2)} \le h^{1-\chi}(a_1|\ln h| + a_2) \sum_{i=1}^{3} \|D^{\alpha^i} f\|_{L_p(R^2)} + h^{-\chi}(b_1|\ln h| + b_2)\|f\|_{L_p(R^2)},$$

где постоянные a_1, a_2, b_1, b_2 не зависят от f и h, а b_1, b_2 не зависят также от q, а h - произвольный положительный параметр.

Доказательство. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$. Тогда в силу представления (3.3) имеем

$$(4.2) \qquad D^m f_h(x) - D^m f_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{3} \int_{\varepsilon}^{h} d\nu \int_{R^2} D^{\alpha^j} f(t) D^m G_{1,j}^{*}(t-x;\nu) dt$$

В правой части данного представления, применяя неравенство Юнга, получим:

$$\|D^m f_h - D^m f_\epsilon\|_{L_q(R^2)} \le \sum_{j=1}^{3} \int_\epsilon^h d\nu \left\|D^{\alpha^j} f\right\|_{L_p(R^2)} \left\|D^m G^*_{1,j}(\cdot,\nu)\right\|_{L_r(R^2)}$$

где $1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Оценим $\left\|D^m G^*_{1,j}(\cdot,\nu)\right\|_{L_r(R^2)}$. Используя неравенство (1.5) получаем

$$\left\|D^m G^*_{1,j}(\cdot,\nu)\right\|_{L_r(R^2)} \le \nu^{-\max\limits_{i=1,2}(|\mu^i|+(m,\mu^i))}(a_1|\ln\nu| + a_2)\times$$

$$\times\left(\int_{R^2} \frac{dt_1 dt_2}{\left(1+\nu^{-N}\left(t_1^{N\alpha_1} t_2^{N\alpha_2} + t_1^{N\theta}\right)\right)^r}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

После преобразования $t = \nu^{\mu^2}\tau$, учитывая лемму 1.2, получим

$$\left\|D^m G^*_{1,j}(\cdot,\nu)\right\|_{L_r(R^2)} \le \nu^{-\max\limits_{i=1,2}(|\mu^i|+(m,\mu^i))+\frac{|\mu^2|}{r}}(a_1|\ln\nu|+a_2) \le \nu^{-\varkappa}(a_1|\ln\nu|+a_2).$$

Подставляя полученную оценку в (4.2) имеем

$$\|D^m f_h - D^m f_\epsilon\|_{L_q(R^2)} \le h^{1-\varkappa}(a_1|\ln h| + a_2)\sum_{j=1}^{3}\left\|D^{\alpha^j} f\right\|_{L_p(R^2)} \tag{4.3}$$

т.е. при $h \to 0$ $D^m f_h$ фундаментальна в $L_q(R^2)$. Но по лемме 2.2 $f_\epsilon \to f$ в $L_p(R^2)$ $(1 \le p < \infty)$ при $\epsilon \to 0$. Отсюда, и из известного свойства обобщенной производной по Соболеву (см. лемма 6.2 работы [8]) получим, что существует обобщенная производная $D^m f \in L_q(R^2)$ и $\|D^m f - D^m f_\epsilon\|_{L_q(R^2)} \to 0$ при $\epsilon \to 0$.

Отсюда, и из неравенства (4.3) имеем

$$\|D^m f\|_{L_q(R^2)} \le \|D^m f_h\|_{L_q(R^2)} + \|D^m f - D^m f_h\|_{L_q(R^2)}$$
$$\le \|D^m f_h\|_{L_q(R^2)} + h^{1-\varkappa}(a_1|\ln h| + a_2)\sum_{j=1}^{3}\left\|D^{\alpha^j} f\right\|_{L_p(R^2)}.$$

Оценим теперь $\|D^m f_h\|_{L_q(R^2)}$. Применив интегральное представление 2.1, свойство функции $G_0(t;\nu)$ (см. лемму 1.1) и неравенство Юнга, имеем:

$$\|D^m f_h\|_{L_q(R^2)} \le C\,\|f\|_{L_p(R^2)}\left\|G_0(\cdot,h)\right\|_{L_r(R^2)}.$$

Так как $\alpha_1 < \alpha_2$, то в силу неравенства (1.5) имеем, что

$$\left\|D^m \hat{G}_0(\cdot,\nu)\right\|_{L_r(R^2)} \leq C\nu^{-\max\limits_{i=1,2}(|\mu^i|+(m,\mu^i))}(b_1|\ln\nu|+b_2)\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_{R^2}\frac{dt_1dt_2}{\left(1+\nu^{-N}\left(t_1^{N\alpha_1}t_2^{N\alpha_2}+t_1^{N\theta}\right)\right)^r}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

После преобразования $t = \mu^{\mu^2}\eta$, и учитывая, что $N\theta\cdot\mu_1^2 = N, (N\alpha;\mu^2) = N$ получим:

$$\|D^m f_h\|_{L_q(R^2)} \leq h^{-\max\limits_{i=1,2}(|\mu^i|+(m,\mu^i))+\frac{|\mu^2|}{r}}(b_1|\ln h|+b_2)\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_{R^2}\frac{d\eta_1d\eta_2}{\left(1+\left(\eta_1^{N\alpha_1}\eta_2^{N\alpha_2}+t_1^{N\theta}\right)\right)^r}\right)^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L_p(R^2)}.$$

Так как последний интеграл сходится (см. лемму 1.2) имеем:

$$\|D^m f_h\|_{L_q(R^2)} \leq C_2 h^{-\varkappa}(b_1|\ln\nu|+b_2)\,\|f\|_{L_p(R^2)}\,.$$

Теорема 4.1 доказана. □

Замечание 4.1. *1) В неравенстве (4.1) логарифмический множитель появляется только в том случае, когда в формуле (1.8) появляется слагаемое, для которого $\frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. В других случаях постоянные a_1 и b_1 можно взять нулями.*

2) В случае $\alpha_1=\alpha_2$, если также в формуле (1.8) есть такое слагаемое, для которого $\frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, то в неравенстве (4.1) появляются множители типа $(a_1(\ln h)^2)+a_2|\ln h|+a_3)$ в первом слагаемом и $(b_1(\ln h)^2+b_2|\ln h|+b_3)$ во втором слагаемом.

3) В неравенстве (4.1) при $\frac{\rho_1+1}{\rho_2+1}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ появлении логарифмического множителя естественно как покажет следующий пример.

Пример 4.1. *Пусть $f(x_1,x_2)=e^{-\left(\nu\cdot x_1^{l_1}\right)^{2k}-\left(\nu\cdot x_2^{l_2}\right)^{2k}-\left(\nu\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\right)^{2k}}$, $\alpha_1\neq\alpha_2$. Тогда $f\in S$, и, следовательно, $f\in W_2^H(R^2)$. Имеем*

$$\left(\int\limits_{R^2}\left(D^{(1,1)}f(x_1,x_2)\right)^2dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{2}}\sim C\cdot\nu^{\max\limits_{i=1,2}\frac{|\mu^i|}{2}}\ln|\nu,$$

$$\left(\int\limits_{R^2}(f(x_1,x_2))^2dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{2}}\sim C\cdot\nu^{-\max\limits_{i=1,2}\frac{|\mu^i|}{2}},$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\int\limits_{R^2}\left(D^{\alpha^i}f(x_1,x_2)\right)^2 dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{2}} \sim C\cdot\nu^{1-\max\limits_{i=1,2}\frac{|\alpha^i|}{2}},$$

и для оценки $D^{1,1}f$ через f и $D^{\alpha^i}f$ необходимо в правой части неравенства (4.1) добавить логарифмический множитель.

Отсюда можно получить вложения $D^{\alpha}W_p^{H}(R^2) \hookrightarrow C(R^2)$, а именно:

Теорема 4.2. *Пусть $1 \le p < \infty$; $m = (m_1; m_2)$ - мультииндекс. Обозначим через*

$$\chi = \begin{cases} \max\limits_{i=1,2}\left(|\mu^i| + (m,\mu^i)\right) - |\mu^2|\cdot\left(1-\frac{1}{p}\right), & \text{при } \alpha_1 < \alpha_2, \\ \max\limits_{i=1,2}\left(|\mu^i| + (m,\mu^i)\right) - |\mu^1|\cdot\left(1-\frac{1}{p}\right), & \text{при } \alpha_1 > \alpha_2, \\ \max\limits_{i=1,2}\left(\frac{|\mu^i|}{p} + (m,\mu^i)\right), & \text{при } \alpha_1 = \alpha_2. \end{cases}$$

Тогда, если $\chi < 1$, то $D^m W_p^H(R^2) \hookrightarrow C(R^2)$ т.е. для любого $f \in W_p^H(R^2)$ производная $D^m f$ почти всюду непрерывна в R^2 и имеет место неравенство

$$\sup_{x\in R^2}|D^m f(x)| \le h^{1-\chi}(a_1|\ln h| + a_2)\sum_{i=1}^{3}\|D^{\alpha^i}\|_{L_p(R^2)} + h^{-\chi}(b_1|\ln h| + b_2)\|f\|_{L_p(R^2)}.$$

Доказательство. Применяя неравенство (4.3) при $q = \infty$ имеем, что функции $D^m f_\varepsilon$ фундаментальны в $L_\infty(R^2)$ и, следовательно, сходятся к $D^m f$. Но так как функции $D^m f_\varepsilon$ непрерывны, то сходимость $L_\infty(R^2)$ совпадает с равномерной сходимостью и предельная функция $D^m f$ непрерывна. Так как $D^m f$ определена лишь с точностью до эквивалентности, то в теореме на самом деле утверждается непрерывность производной исходной функции почти всюду. Теорема 4.2 доказана. □

Abstract. In this paper we obtain appropriate integral representations for functions from Sobolev multianisotropic spaces, and apply them to obtain embedding theorems for these spaces.

Список литературы

[1] С. Л. Соболев, "Об одной теореме функционального анализа", Мат. сб., **4(36)**:3, 471 – 497 (1938).

[2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск (1962).

[3] С. М. Никольский, "Об одной задаче С. Л. Соболева", Сиб. Мат. ж. **3**, no. 6, 845 – 857 (1962).

[4] K. T. Smith, "Inequalities for formally positive integro-differential forms", Bull. Amer. Math., 368 – 370 (1961).

[5] В. П. Ильин, "Интегральные представления дифференцируемых функций и их применение к вопросам продолжения функций классов $W_p^l(G)$", Сиб. Мат. ж., **8**, no. 3, 573 – 586 (1967).

[6] О. В. Бесов, "О коэрцитивности в неизотропном пространстве С. Л. Соболева", Мат. сб. **73**, (115), no. 4, 585 – 599 (1967).

[7] Ю. Г. Решетняк, "Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций", Сиб. Мат. **12**, no. 2, 420 – 432 (1971).

[8] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., Наука (1975).

[9] О. В. Бесов, "Продолжение функций из L_p^l и W_p^l", тр. МИАН СССР **89**, 5 – 17 (1967).

[10] В. П. Ильин, "Интегральные представления функций классов $L_p^l(G)$ и теоремы вложения", Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, **19**, 95 – 155 (1970).

[11] В. И. Буренков, "Теоремы вложения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве", Итоги науки, Математический анализ, М. Из-во ВИНИТИ АН СССР, 71 – 155 (1966).

[12] L. Hormander, "On the theory of general partial differential operators", Acta. Math. **94**, 161 – 248 (1955).

[13] С. В. Успенский, Б. Н. Чистяков, "О выходе на полином решений одного класса псевдодифференцируемых уравнений при $|x| \to \infty$", Сиб. мат. ж., **16**, no. 5, 1053 – 1070 (1975).

[14] Г. А. Карапетян, "О стабилизации в бесконечности к полиному решений одного класса регулярных уравнений", тр. МИАН СССР, **1087**, 116 – 129 (1989).

[15] С. М. Никольский, "Об устойчивых граничных значений дифференцируемых функций многих переменных", Мат. сб. **61** (103), no. 2, 224 – 252 (1963).

Поступила 13 ноября 2015