

О МЕТРИЧЕСКОМ ТИПЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ И СХОДИМОСТИ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

Ф. А. ТАЛАЛЯН

Институт Математики Национальной Академии Наук Армении

E-mail: ftalalyan@mail.ru

Аннотация. Изучаются последовательности действительных измеримых функций f_n на пространстве с мерой $([0, 1], \mu)$, где μ -мера Лебега. Доказано, что если f_n сходится к f по распределению то существует последовательность автоморфизмов S_n пространства $([0, 1], \mu)$ такая, что $f_n(S_n(t))$ сходится к $f(t)$ по мере на $[0, 1]$. Обсуждается связь данного утверждения с другими известными результатами.

MSC2010 number: 28A20, 60E05.

Ключевые слова: Изоморфизм; метрический тип; сходимость по распределению.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $f_n, n = 1, 2, \dots$ и f -действительные измеримые функции, заданные на измеримом пространстве (Ω, μ) , $\mu(\Omega) = 1$. Пусть, далее, $F_n, n = 1, 2, \dots$ и F -их функции распределения, т.е.

$$F_n(x) = \mu(\omega \in \Omega : f_n(\omega) \leq x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$F(x) = \mu(\omega \in \Omega : f(\omega) \leq x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Говорят, что последовательность f_n сходится к f по распределению, если $F_n(x) \rightarrow F(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в каждой точке непрерывности F . Записывается это так: $f = D - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Известно ([1], стр. 31), что из сходимости по мере следует сходимость по распределению. Обратное, очевидно, не верно.

Нам понадобятся еще понятия изоморфизма пространств с мерой и метрического типа измеримых функций, введенных В. А. Рохлиным ([2], [3]).

Отображение одного пространства с мерой на другое называется изоморфным, если оно взаимно однозначно, и как оно, так и обратное ему отображение переводит всякое измеримое множество в измеримое множество той же меры. В том случае, когда оба пространства совпадают, изоморфизм называется автоморфизмом.

Два пространства, допускающие изоморфные отображения друг на друга, называются изоморфными. Две функции f и g , определенные, соответственно, на пространствах M и N , называются изоморфными, если существуют такие множества $M_1 \subset M$ и $N_1 \subset N$ меры нуль и такое изоморфное отображение T пространства $M \setminus M_1$ на пространство $N \setminus N_1$, что для всякого $t \in M \setminus M_1$ $f(t) = g(T(t))$. В этом случае говорят также, что функции f и g принадлежат одному метрическому типу.

Из очевидной цепочки равенств

$$\begin{aligned}\mu\{t \in [0, 1] : f(t) \leq x\} &= \mu\{t \in [0, 1] : g(T(t)) \leq x\} = \mu\{(g \circ T)^{-1}(-\infty, x]\} = \\ &= \mu\{T^{-1}(g^{-1}(-\infty, x])\} = \mu\{t \in [0, 1] : g(t) \leq x\}\end{aligned}$$

следует, что функции, принадлежащие к одному метрическому типу, одинаково распределены. Обратное не верно. Вот простой пример

$$f(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad g(t) = \begin{cases} 2t & \text{если } 0 \leq t \leq 1/2, \\ 2(1-t) & \text{если } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Необходимые и достаточные условия для того, чтобы две функции принадлежали одному метрическому типу, получены В. А. Рохлиным в его квалификационной теореме ([2]).

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема 1.1. Пусть f и f_n , $n = 1, 2, \dots$ - измеримые функции, заданные на $[0, 1]$ и $f = D - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Тогда существует последовательность S_n , $n = 1, 2, \dots$ автоморфизмов пространства $([0, 1], \mu)$ такая, что

$$(1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(S_n(t)) = f(t) \text{ по мере на } [0, 1].$$

В работе [4], с помощью упомянутой выше довольно сложной квалификационной теоремы Рохлина, доказывается следующая

Теорема 1.2. Если последовательность измеримых функций $f_1, f_2, \dots$, определенных на $[0, 1]$, сходится по мере к функции f , то существует последовательность $S_1, S_2, \dots$ автоморфизмов $[0, 1]$ такая, что

$$(1.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(S_n(t)) = f(t) \text{ почти всюду на } [0, 1],$$

$$(1.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{t \in [0, 1] : S_n(t) \neq t\} = 0.$$

Отметим, что в теореме 1.1 условие (1.3) гарантировать нельзя.

Комбинируя теорему 1.2 с нашей теоремой 1.1, мы получим следующий результат.

Теорема 1.3. Если последовательность $f_n, n = 1, 2, \dots$ - измеримых функций, определенных на $[0, 1]$ сходится по распределению к функции f , то существует последовательность $S_1, S_2, \dots$ автоморфизмов $[0, 1]$ такая, что

$$(1.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(S_n(t)) = f(t) \text{ почти всюду на } [0, 1].$$

Так как функции, принадлежащие к одному метрическому типу, одинаково распределены, то из теоремы 1.3 следует известная теорема Скорохода о представлении ([5]).

Следствие 1.1. (Скороход) Пусть $X_n, n = 1, 2, \dots$ и X - случайные величины, заданные на вероятностном пространстве $([0, 1], \mu)$ и пусть $X = D - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$. Тогда существует последовательность случайных величин $Y_n, n = 1, 2, \dots$ такая, что

- a) при любом $n = 1, 2, \dots$ случайные величины X_n и Y_n одинаково распределены;
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(t) = X(t)$ почти наверное на $[0, 1]$.

Сформулируем еще одно очевидное следствие из теоремы 1.3, которое показывает, что одинаково распределенные функции в определенном смысле близки по метрическому типу.

Следствие 1.2. Если f и g - одинаково распределенные измеримые функции на $[0, 1]$, то существует последовательность S_n автоморфизмов $[0, 1]$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(S_n(t)) = g(t) \text{ почти всюду на } [0, 1].$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Нам понадобятся два вспомогательных утверждения, которые приводятся здесь в виде лемм.

Лемма 2.1. Пусть A и B - измеримые множества, содержащиеся в $[0, 1]$, причем $\mu(A) = \mu(B) > 0$. Тогда пространства (A, μ) и (B, μ) изоморфны.

Доказательство. Достаточно доказать, что (A, μ) изоморфно $([0, \mu(A)], \mu)$. Можно считать, что все точки A являются точками плотности. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \int_0^t \chi_A d\mu = \mu([0, t] \cap A),$$

где χ_A -характеристическая функция множества A .

Функция f возрастающая и абсолютно непрерывная на $[0, 1]$. Следовательно, образ $f(E)$ любого измеримого множества $E \subset [0, 1]$ будет измеримым. Очевидно, f взаимно однозначно на A . Докажем, что f сохраняет меру подмножеств A . Проверим это для A .

Пусть $\varepsilon > 0$ -произвольное число. Так как $f'(x) = 1$ на A , то существует счетная система интервалов Δ_k , $k = 1, 2, \dots$ такая, что

$$(2.1) \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k,$$

$$(2.2) \quad \mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta_k) < \mu(A) + \varepsilon.$$

$$(2.3) \quad (1 - \varepsilon)\mu(\Delta_k) < \mu(f(\Delta_k \cap A)) < (1 + \varepsilon)\mu(\Delta_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Суммируя по k все части (2.3), получим

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta_k) \leq \mu(f(A)) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta_k),$$

откуда, в силу (2.2), будем иметь

$$(2.4) \quad (1 - \varepsilon)\mu(A) \leq \mu(f(A)) \leq \mu(A) + \varepsilon(\mu(A) + 1 + \varepsilon).$$

Наконец, из (2.4), в силу произвольности ε , получим $\mu(f(A)) = \mu(A)$, что и требовалось.

Нам понадобится еще следующее совсем очевидное утверждение

Лемма 2.2. Пусть $m > 1$ -натуральное число и $\varepsilon > 0$. Тогда для любых двух систем положительных чисел $a_1, \dots, a_m$ и $b_1, \dots, b_m$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m b_i = 1 \text{ и } |a_i - b_i| \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m.$$

Справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^m \min\{a_i, b_i\} \geq 1 - m\varepsilon.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Пусть F_n и F -функции распределения f_n и f соответственно. Обозначим через $C(F)$ множество точек непрерывности F . По условию теоремы

$$(3.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) \text{ для всех } x \in C(F).$$

Сначала рассмотрим случай, когда последовательность f_n равномерно ограничена на $[0, 1]$. Возьмем отрезок $[a, b]$ так, чтобы $a, b \in C(F)$ и

$$(3.2) \quad a < f_n(t) \leq b \text{ для всех } n = 1, 2, \dots \text{ и } t \in [0, 1].$$

Построим последовательность разбиений отрезка $[a, b]$:

$$Q_k = \{a = x_{k,0} < x_{k,1} < \dots < x_{k,m_k} = b\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

такую, что для всех $k = 1, 2, \dots$ и $i = 0, 1, \dots, m_k$ выполняются условия

$$(3.3) \quad Q_k \subset Q_{k+1} \subset C(F)$$

и

$$(3.4) \quad \max\{(x_{k,i+1} - x_{k,i}) : 0 \leq i \leq m_k - 1\} < \frac{1}{k}.$$

Теперь построим последовательность S_n автоморфизмов пространства $([0, 1], \mu)$. Сначала возьмем числа $\varepsilon_k > 0$ так, чтобы

$$(3.5) \quad m_k \varepsilon_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Затем возьмем последовательность натуральных чисел $1 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ такую, что для всех $k = 1, 2, \dots$; $n \geq n_k$ и $i = 0, 1, \dots, m_k$ выполнялись неравенства

$$(3.6) \quad |F_n(x_{k,i}) - F(x_{k,i})| < \varepsilon_k.$$

Аutomорфизмы S_n будут построены группами. Сначала для $1 \leq n < n_1$, затем для $n_1 \leq n < n_2$ и т.д. Для $1 \leq n < n_1$ положим $S_n = I$, где I -тождественный автоморфизм пространства $([0, 1], \mu)$.

Пусть построены автоморфизмы $S_1, \dots, S_{n_k-1}$ и пусть $n_k \leq n < n_{k+1}$. Введем обозначения

$$E_{k,i}^n = \{t \in [0, 1] : x_{k,i} < f_n(t) \leq x_{k,i+1}\} \quad i = 0, 1, \dots, m_k - 1,$$

$$E_{k,i} = \{t \in [0, 1] : x_{k,i} < f(t) \leq x_{k,i+1}\} \quad i = 0, 1, \dots, m_k - 1.$$

Так как $\mu(E_{k,i}^n) = F_n(x_{k,i+1}) - F_n(x_{k,i})$ и $\mu(E_{k,i}) = F(x_{k,i+1}) - F(x_{k,i})$, то, в силу (3.6) имеем

$$(3.7) \quad |\mu(E_{k,i}^n) - \mu(E_{k,i})| < 2\varepsilon_k, \quad n \geq n_k, \quad i = 0, 1, \dots, m_k - 1.$$

Для каждой пары $E_{k,i}^n$ и $E_{k,i}$ возьмем множества $A_{k,i}^n \subset E_{k,i}^n$ и $A_{k,i} \subset E_{k,i}$ такие, что

$$\mu(A_{k,i}^n) = \mu(A_{k,i}) = \min\{\mu(E_{k,i}^n), \mu(E_{k,i})\}.$$

Тогда, по лемме 2.1, существует изоморфизм множества $A_{k,i}$ на $A_{k,i}^n$. Обозначим этот изоморфизм через $S_{k,i}^n$, $n_k \leq n < n_{k+1}$, $i = 0, 1, \dots, m_k - 1$.

Теперь для каждого n такого, что $n_k \leq n < n_{k+1}$ построим автоморфизм S_k^n пространства $([0, 1], \mu)$ следующим образом. Положим

$$S_k^n(t) = S_{k,i}^n(t) \text{ при } t \in A_{k,i}^n; \quad i = 0, 1, \dots, m_k - 1.$$

На дополнительном множестве $[0, 1] \setminus \bigcup_{i=0}^{m_k-1} A_{k,i}^n$ за S_k^n возьмем по той же лемме

1.1 произвольный изоморфизм $[0, 1] \setminus \bigcup_{i=0}^{m_k-1} A_{k,i}^n$ на $[0, 1] \setminus \bigcup_{i=0}^{m_k-1} S_k^n(A_{k,i}^n)$.

Далее, для каждого n из промежутка $n_k \leq n < n_{k+1}$ положим $S_n = S_k^n$. Продолжив этот процесс неограниченно, мы построим последовательность автоморфизмов S_n пространства $([0, 1], \mu)$. Докажем, что $f_n(S_n(t))$ сходится к $f(t)$ по мере на $[0, 1]$.

Действительно, если $n_k \leq n < n_{k+1}$, то согласно построению S_n и в силу леммы 2.2, имеем

$$(3.8) \quad \mu\left\{t \in [0, 1] : |f_n(t) - f(t)| \geq \frac{1}{k}\right\} < 2m_k\varepsilon_k$$

Из (3.5) и (3.8) следует, что $f_n \circ S_n \rightarrow f$ по мере.

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть f_n , $n = 1, 2, \dots$ -произвольная (не обязательно равномерно ограниченная) последовательность измеримых функций.

Возьмем произвольные точки $a, b \in C(F)$, $a < b$, и пусть φ -непрерывная, строго возрастающая функция, отображающая $(-\infty, \infty)$ на (a, b) . Можно взять, например,

$$\varphi(x) = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{x}{1+|x|} + \frac{a+b}{2}.$$

Таким образом, φ и обратное отображение φ^{-1} непрерывны и сохраняют порядок. Пусть, как и выше, F_n и F -функции распределения f_n и f соответственно.

Докажем, что суперпозиции $\varphi \circ f_n$ сходятся по распределению к $\varphi \circ f$. Пусть G_n и G — это функции распределения $\varphi \circ f_n$ и $\varphi \circ f$ соответственно. Тогда имеем

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mu \{t \in [0, 1] : \varphi(f_n(t)) \leq x\} = \\ &= \mu \{f_n^{-1}(\varphi^{-1}((-\infty, x]))\} = \mu \{f_n^{-1}(a, \varphi^{-1}(x))\} = \\ (3.9) \quad &= \mu \{t \in [0, 1] : a < f(t) \leq \varphi^{-1}(x)\} = F_n(\varphi^{-1}(x)) - F_n(a). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$(3.10) \quad G(x) = F(\varphi^{-1}(x)) - F(a).$$

Если $x \in C(G)$, то, в силу непрерывности φ^{-1} , $\varphi^{-1}(x) \in C(F)$. Отсюда, в силу (3.9) и (3.10) и условия $a \in C(F)$ получим

$$(3.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = G(x) \text{ для всех } x \in C(G).$$

Тогда, согласно доказанному случаю, существует последовательность автоморфизмов S_n такая, что

$$(3.12) \quad \varphi \circ f_n \circ S_n \rightarrow \varphi \circ f \text{ по мере.}$$

Известно, что взятие непрерывной функции сохраняет сходимость по мере ([1], стр. 39). В силу этого, из (3.12) следует

$$f_n \circ S_n = \varphi^{-1}(\varphi \circ f_n \circ S_n) \rightarrow \varphi^{-1}(\varphi \circ f) = f \text{ по мере.}$$

Теорема 1.1 полностью доказана. $\square$

Abstract. In the present paper, sequences of real measurable functions defined on a measure space $([0, 1], \mu)$, where μ is the Lebesgue measure, are studied. It is proved that for every sequence f_n that converges to f in distribution, there exists a sequence of automorphisms S_n of $([0, 1], \mu)$ such that $f_n(S_n(t))$ converges to $f(t)$ in measure on $[0, 1]$. Connection with some known results is also discussed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Lukacs. Stochastic Convergence, Raytheon Education Company (1968).
- [2] В. А. Рохлин. "Об основных понятиях теории меры", Матем. сб., 25 (67), no. 1, 107 - 150 (1949).
- [3] В. А. Рохлин. "Метрическая классификация измеримых функций", УМН, 12, вып. 2 (74), 169 - 174 (1957).
- [4] Н. И. Требукова. "Метрическая сходимость и метрический изоморфизм", УМН, 15, вып. 2 (92), 195 - 199 (1960).
- [5] П. Биллингсли, Сходимость Вероятностных Мер, М. Наука (1977).

Поступила 6 июля 2015