

ЗАДАЧА РИМАНА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $L^1(\rho)$

Г. М. АЙРАПЕТЯН, В. Г. ПЕТРОСЯН

Ереванский Государственный Университет

E-mails: hhayrapet@gmail.com; v.g.petrosyan91@gmail.com

Аннотация. В единичном круге ограниченной окружностью $T = \{z, |z| = 1\}$ рассматривается граничная задача Римана в весовом пространстве $L^1(\rho)$, где $\rho(t) = \prod_{k=1}^m |t - t_k|^{\alpha_k}$, $t_k \in T$, $k = 1, 2, \dots, m$, и α_k , $k = 1, 2, \dots, m$ действительные числа. Требуется определить аналитическую вне окружности T функцию $\Phi(z)$, $\Phi(\infty) = 0$, такую, чтобы имело место $\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho_r)} = 0$, где $f \in L^1(\rho)$, $a(t) \in C^{\delta}(T)$, $\delta > 0$, а ρ_r некоторое продолжение функции ρ во внутрь окружности. Устанавливается нормальная разрешимость этой задачи.

MSC2010 number: 35J25

Ключевые слова: Задача Римана; весовое пространство; интеграл типа Коши; факторизация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Γ простая замкнутая кривая Лицунова в комплексной плоскости z . G^+ внутренняя, а G^- внешняя области ограниченные кривой Γ . Хорошо известна граничная задача Римана или задача сопряжения (см. [1] – [6]).

$$\Phi^+(t) - a(t)\Phi^-(t) = f(t), t \in \Gamma,$$

где $a(t)$ заданная кусочно непрерывная на Γ функция из класса C^{α} , а f принадлежит классу $C^{\alpha}(\Gamma)$ или $L^p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$). Искомые функции $\Phi^{\pm}$ аналитические в $G^{\pm}$ соответственно функции из класса E^p (см. [12]). При исследовании этой задачи важную роль играет тот факт, что интеграл типа Коши является ограниченным оператором в соответствующих пространствах. Исследование граничной задачи Римана когда $f \in L^1(\Gamma)$ связана с определенными трудностями поскольку интеграл типа Коши не является ограниченным оператором в этом пространстве. В работе [7] предложена новая постановка задачи Римана в этом пространстве. В случае, когда Γ -единичная окружность, эта задача формулируется в виде: Определить аналитические в $D^{\pm}$, где $D^+ = \{z, |z| < 1\}$, $D^- = \{z, |z| > 1\}$, функции

$\Phi^\pm$ так, чтобы имело место

$$(1.1) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_1 = 0, \quad \Phi^-(\infty) = 0,$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма пространства $L^1(T)$, $T = \{z, |z| = 1\}$.

В настоящей работе граничная задача Римана исследуется в весовом пространстве $f \in L^1(\rho)$ (функция $f \in L^1(\rho)$ если

$$\|f\|_{L^1(\rho)} = \int_T |f(t)|\rho(t)|dt| < \infty)$$

где $\rho(t) = \prod_{k=1}^m |t - t_k|^{\alpha_k}$, $t_k \in T$, $k = 1, 2, \dots, m$, и α_k , $k = 1, 2, \dots, m$ действительные числа. Для формулировки задачи приведем некоторые обозначения. Пусть

$$(1.2) \quad \rho_r(t) = \rho^*(t) \prod_{k=1}^m |r^{\delta_k} t - t_k|^{n_k}, \quad \rho^*(t) = \prod_{k=1}^m |t - t_k|^{\beta_k},$$

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_k \leq -1, \\ 0, & \text{если } \alpha_k > -1, \end{cases} \quad n_k = \begin{cases} [\alpha_k] + 1, & \text{если } \alpha_k \text{ нецелое,} \\ \alpha_k, & \text{если } \alpha_k \text{ целое,} \end{cases}$$

$\beta_k = \alpha_k - n_k$. Ясно что $\beta_k \in (-1, 0]$ и $\rho^*(t) \in L^1(T)$.

Рассмотрим граничную задачу Римана в следующей постановке:

Задача R. Пусть f произвольная измеримая на T функция из класса $L^1(\rho)$. Следует определить аналитическую в $D^+ \cup D^-$ функцию $\Phi(z)$, $\Phi(\infty) = 0$, так чтобы имело место граничное условие

$$(1.3) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho_r)} = 0,$$

где $a(t)$, $a(t) \neq 0$ произвольная функция из класса $C^\delta(T)$, $\delta > 0$, $\Phi^\pm$ сужения функции Φ на $D^\pm$ соответственно. Задача R при $a \equiv 1$ и задача Дирихле в аналогичной постановке когда $\alpha_k \geq 0$ исследована в работах [8] и [10]. Задача R в случае когда $\rho(t) = |1 - t|^\alpha$ исследована в работе [9], а задача Римана в весовых пространствах L^p , $p > 1$ в работе [11].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

В этом параграфе мы доказываем несколько лемм, которые будут использованы при доказательстве основных результатов.

Лемма 2.1. Пусть $t_k \in T$, $t_i \neq t_j$, $i \neq j$ и $\lambda_k \in [0, 1)$, $k = 1, \dots, m$, $\delta > 0$ произвольные действительные числа. Тогда

$$a) \sup_{r \in (0,1)} \prod_{k=1}^m |t_k - \tau|^{\lambda_k} \int_T \frac{(1-r)^\delta |dt|}{\prod_{k=1}^m |t_k - t|^{\lambda_k} |\tau - rt|} < C,$$

$$б) \sup_{r \in (0,1)} \prod_{k=1}^m |t_k - \tau|^{\lambda_k} \int_T \frac{(1-r^2) |dt|}{\prod_{k=1}^m |t_k - t|^{\lambda_k} |\tau - rt|^2} < C,$$

$$в) \sup_{r \in (0,1)} |t_k - \tau|^{\lambda_k} \int_T \frac{(1-r^2) |dt|}{|t_k - rt|^{1+\lambda_k} |\tau - rt|} < C,$$

где $C < \infty$ не зависит от τ .

Доказательство. Выберем полуинтервалы $T_k \in T$, так чтобы $T = \bigcup_{k=1}^m T_k$, $t_k \in T_k$, $T_i \cap T_j = \emptyset$, $i \neq j$. Для любого $\tau \in (0, 1)$, $\tau \in T$ будем иметь

$$\prod_{k=1}^m |t_k - \tau|^{\lambda_k} \int_T \frac{(1-r)^\delta |dt|}{\prod_{k=1}^m |t_k - t|^{\lambda_k} |\tau - rt|} < C \sum_{k=1}^m |t_k - \tau|^{\lambda_k} \int_{T_k} \frac{(1-r)^\delta |dt|}{|t_k - t|^{\lambda_k} |\tau - rt|},$$

Достаточно установить, что для любого $t_0 \in T$

$$\sup_{r \in (0,1)} |t_0 - \tau|^\lambda \int_T \frac{(1-r)^\delta |dt|}{|t_0 - t|^\lambda |\tau - rt|} < \infty,$$

Ввиду того, что

$$\sup_{r \in (0,1)} \int_T \frac{(1-r)^\delta |dt|}{|\tau - rt|} = \sup_{r \in (0,1)} (1-r)^\delta \ln |1-r|^{-1} < \infty,$$

получаем

$$\sup_{r \in (0,1)} \int_T (1-r)^\delta \frac{||t_0 - \tau|^\lambda - |t_0 - t|^\lambda| |dt|}{|t_0 - t|^\lambda |\tau - rt|} < \infty.$$

Поскольку

$$||t_0 - \tau|^\lambda - |t_0 - t|^\lambda| < C |\tau - t|^\lambda,$$

то достаточно доказать, что

$$\sup_{r \in (0,1)} \int_T \frac{(1-r)^\delta |\tau - t|^\lambda |dt|}{|t_0 - t|^\lambda |\tau - rt|} < \infty.$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \int_T \frac{(1-r)^\delta |dt|}{|t_0 - t|^\lambda |\tau - rt|^{1-\lambda}} &\leq \int_T \frac{(1-r)^{\delta-\delta_1} |dt|}{|t_0 - t|^\lambda |\tau - rt|^{1-\lambda-\delta_1}} \leq \\ &\int_T \frac{(1-r)^{\delta-\delta_1} |dt|}{|t_0 - t|^{1-\delta_1}} + \int_T \frac{(1-r)^{\delta-\delta_1} |dt|}{|\tau - rt|^{1-\delta_1}} < C, \end{aligned}$$

где $\delta_1 \in (0, \delta)$. Утверждение а) леммы доказано.

Для доказательства утверждения б), по аналогии, достаточно установить, что

$$\sup_{r \in (0,1)} |t_0 - \tau|^\lambda \int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|t_0 - t|^\lambda |\tau - rt|^2} < \infty, \lambda \in (0, 1)$$

Так как

$$|t_0 - \tau|^\lambda \int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|t_0 - t|^\lambda |\tau - rt|^2} \leq C \left(\int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|t_0 - t|^\lambda |\tau - rt|^{2-\lambda}} + 1 \right),$$

то положим

$$I_1(r, t) = \int_{|t_0 - t| \geq 1-r} \frac{(1-r^2)|dt|}{|t_0 - t|^\lambda |\tau - rt|^{2-\lambda}},$$

$$I_2(r, t) = \int_{|t_0 - t| < 1-r} \frac{(1-r^2)|dt|}{|t_0 - t|^\lambda |\tau - rt|^{2-\lambda}}$$

Учитывая, что при $|t_0 - t| \geq 1-r$, $|t_0 - t| > 2^{-1}|t_0 - rt|$, получим

$$\begin{aligned} I_1(r, t) &\leq 2 \int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|t_0 - rt|^\lambda |\tau - rt|^{2-\lambda}} \leq \\ &\leq 2 \left(\int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|t_0 - rt|^2} + \int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|\tau - rt|^2} \right) = 8\pi. \end{aligned}$$

Поскольку

$$|I_2(r, t)| \leq \int_{|\theta| < 1-r} \frac{d\theta}{(1-r)^{1-\lambda} |\theta|^\lambda} = C < \infty$$

получаем доказательство утверждения б) леммы.

Далее имеем

$$\begin{aligned} |t_k - \tau|^\lambda \int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|t_k - rt|^{1+\lambda} |\tau - rt|} \leq \\ \int_T \frac{(1-r^2)|t_k - \tau|^\lambda - |t_k - rt|^\lambda ||dt|}{|t_k - rt|^{1+\lambda} |\tau - rt|} + \int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|t_k - rt| |\tau - rt|}. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|t_k - rt| |\tau - rt|} \leq \int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|t_k - rt|^2} + \int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|\tau - rt|^2} = 4\pi,$$

то, применяя неравенства Гельдера получаем

$$\begin{aligned} \int_T \frac{(1-r^2)|t_k - \tau|^\lambda - |t_k - rt|^\lambda ||dt|}{|t_k - rt|^{1+\lambda} |\tau - rt|} \leq C \int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|t_k - rt|^{1+\lambda} |\tau - rt|^{1-\lambda}} \leq \\ \leq C \left(\int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|t_k - rt|^2} + \int_T \frac{(1-r^2)|dt|}{|\tau - rt|^2} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Лемма 2.1 доказана. □

Пусть $\kappa = \text{ind } a(t), t \in T$. Хорошо известно, что функция a допускает представление (см. [1], [2])

$$a(t) = S^+(t)(S^-(t))^{-1},$$

где

$$S^+(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\ln(t^{-\kappa} a(t)) dt}{t - z}\right\}, \quad z \in D^+,$$

$$S^-(z) = z^{-\kappa} \exp\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\ln(t^{-\kappa} a(t)) dt}{t - z}\right\}, \quad z \in D^-,$$

$S^+ \in C^0(\overline{D^\pm})$ и $|S^-(z)| = O(|z|^{-\kappa})$ при $z \rightarrow \infty$.

Лемма 2.2. Пусть $\alpha_k > -1$, $k = 1, \dots, m$, $N = \sum_{k=1}^m n_k$, $f \in L^1(\rho)$ и $\Phi(z)$ некоторое решение задачи R. Тогда ее можно представить в виде

а) Если $N + \kappa \geq 0$, то

$$(2.1) \quad \Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i \Pi(z)} \int_T \frac{f(t) \Pi(t) dt}{S^+(t)(t - z)} + \frac{S(z) P(z)}{\Pi(z)},$$

где $z \in D^+ \cup D^-$, $P(z)$ некоторый полином порядка $N + \kappa - 1$,

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^m (t_k - z)^{n_k},$$

б) Если $N + \kappa < 0$, то $\Phi(z)$ имеет представление (2.1), где $P(z) \equiv 0$ и функция f удовлетворяет условиям

$$(2.2) \quad \int_T \frac{f(t) \Pi(t)}{S^+(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(N + \kappa) - 1.$$

Доказательство. Пусть $N + \kappa \geq 0$. Так как $-1 < \alpha_k - n_k \leq 0$, то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T \left| \frac{\Phi^+(rt) \Pi(t)}{S^+(t)} - \frac{\Phi^-(r^{-1}t) \Pi(t)}{S^-(t)} - \frac{f(t) \Pi(t)}{S^+(t)} \right| |dt| = 0$$

Обозначим

$$\Psi_r^+(z) = \frac{\Phi^+(rz) \Pi(z)}{S^+(z)}, \quad \Psi_r^-(z) = \frac{\Phi^-(r^{-1}z) \Pi(z)}{S^+(z)},$$

$$f_r(t) = \frac{\Phi^+(rt) \Pi(t)}{S^+(t)} - \frac{\Phi^-(r^{-1}t) \Pi(t)}{S^+(t)}, \quad |t| = 1.$$

Получим граничную задачу Гильберта $\Psi_r^+(t) - \Psi_r^-(t) = f_r(t)$ относительно функции Ψ_r . Так как функция Ψ^- имеет полюс порядка $N + \kappa - 1$ в бесконечности, то

$$\Psi_r^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_r(t) dt}{t - z} + P_r(z), \quad z \in D^\pm,$$

где $P_r(z)$ полином порядка $N + \kappa - 1$. Так как

$$f_r(t) \rightarrow \frac{f(t) \Pi(t)}{S^+(t)}, \quad \Psi_r(z) \rightarrow \frac{\Phi(z) \Pi(z)}{S^+(z)}$$

при $r \rightarrow 1 - 0$, то переходы к пределу получаем доказательство утверждения а). Если $N + \kappa < 0$, то $P_r(z) \equiv 0$ и

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i \Pi(z)} \int_T \frac{f(t) \Pi(t) dt}{S^+(t)(t-z)}$$

Поскольку функция $S(z)(\Pi(z))^{-1}$ имеет полюс порядка $-(N + \kappa)$ в бесконечности, то получаем утверждение б) леммы. $\square$

Лемма 2.3. Пусть $f \in L^1(\rho)$ и

$$(2.3) \quad K(f, z) = \frac{S(z)}{2\pi i \Pi(z)} \int_T \frac{f(t) \Pi(t) dt}{S^+(t)(t-z)}, \quad z \in D^+ \cup D^-,$$

тогда

$$\|K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t)\|_{L^1(\rho_r)} \leq C \|f\|_{L^1(\rho)}$$

Доказательство. Положим $K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t) = I_1(r, t) + I_2(r, t)$, где

$$I_1(r, t) = \frac{S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)}{2\pi i \Pi(rt)} \int_T \frac{f(\tau) \Pi(\tau) d\tau}{S^+(\tau)(\tau - rt)},$$

$$I_2(r, t) = \frac{a(t)S^-(r^{-1}t)}{2\pi i} \left(\frac{1}{\Pi(rt)} \int_T \frac{f(\tau) \Pi(\tau) d\tau}{S^+(\tau)(\tau - rt)} - \frac{1}{\Pi(r^{-1}t)} \int_T \frac{f(\tau) \Pi(\tau) d\tau}{S^+(\tau)(\tau - r^{-1}t)} \right).$$

Так как $|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)| < C(1-r)^\delta$, $\delta > 0$, то получаем

$$|I_1(r, t)| \leq \frac{C(1-r)^\delta}{|\Pi(rt)|} \int_T \frac{|f(\tau)| |\Pi(\tau)| |d\tau|}{|\tau - rt|}.$$

Далее имеем $I_2(r, t) = I_2^{(1)}(r, t) + I_2^{(2)}(r, t)$, где

$$I_2^{(1)}(r, t) = \frac{a(t)S^-(r^{-1}t)}{2\pi i \Pi(rt)} \int_T \frac{f(\tau) \Pi(\tau) (1 - r^2) d\tau}{S^+(\tau) |\tau - rt|^2},$$

$$I_2^{(2)}(r, t) = \frac{a(t)S^-(r^{-1}t)}{2\pi i} ((\Pi(rt))^{-1} - (\Pi(r^{-1}t))^{-1}) \int_T \frac{f(\tau) \Pi(\tau) d\tau}{S^+(\tau)(\tau - rt)}.$$

Так как функция $a(t)S^-(r^{-1}t)$ равномерно ограничена при $r \rightarrow 1 - 0$, то

$$|I_2^{(1)}(r, t)| < \frac{C}{|\Pi(rt)|} \int_T \frac{|f(\tau)| |\Pi(\tau)| (1 - r^2) |d\tau|}{|\tau - rt|^2},$$

$$|I_2^{(2)}(r, t)| < C \left| \frac{1}{\Pi(rt)} - \frac{1}{\Pi(r^{-1}t)} \right| \int_T \frac{|f(\tau)| |\Pi(\tau)| |d\tau|}{|\tau - rt|}.$$

Далее, предполагая $\alpha_k > -1$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|I_1(r, t)\|_{L^1(\rho)} &\leq C \int_T \frac{(1-r)^\delta \rho(t)}{|\Pi(rt)|} \int_T \frac{|f(\tau)| |\Pi(\tau)| |d\tau| |dt|}{|\tau - rt|} \leq \\ &\leq C \int_T |f(\tau)| \rho(\tau) \rho^*(\tau) \int_T \frac{(1-r)^\delta |dt| |d\tau|}{|\tau - rt| \rho^*(t)}, \end{aligned}$$

где $\rho^*(t)$ определена в (1.2). В силу утверждения а) леммы 2.1

$$\sup_{\tau \in (0,1)} \rho^*(\tau) \int_T \frac{(1-r)^\delta |dt|}{|\tau - rt| \rho^*(t)} < \infty,$$

где $\delta \in (0, 1)$, $\tau \in T$. Следовательно

$$\|I_1(\tau, t)\|_{L^1(\rho)} \leq C \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Далее имеем

$$\|I_2^{(1)}(\tau, t)\|_{L^1(\rho)} \leq C \int_T |f(\tau)| \rho(\tau) \rho^*(\tau) \int_T \frac{(1-r^2) |dt|}{\rho^*(t) |\tau - rt|^2} |d\tau|.$$

В силу утверждения б) леммы 2.1

$$\sup_T \rho^*(\tau) \int_T \frac{(1-r^2) |dt|}{|\tau - rt|^2 \rho^*(t)} < \infty.$$

Поэтому

$$\|I_2^{(1)}(\tau, t)\|_{L^1(\rho)} \leq C \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Pi(rt)} - \frac{1}{\Pi(r^{-1}t)} \right| &= \left| \frac{1}{|t_k - rt|^{n_k}} \frac{1}{\Pi_k(rt)} - \frac{1}{|t_k - r^{-1}t|^{n_k}} \frac{1}{\Pi_k(r^{-1}t)} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|t_k - rt|^{n_k}} \left| \frac{1}{\Pi_k(rt)} - \frac{1}{\Pi_k(r^{-1}t)} \right| + \\ &+ \frac{1}{|\Pi_k(r^{-1}t)|} \left| \frac{1}{|t_k - rt|^{n_k}} - \frac{1}{|t_k - r^{-1}t|^{n_k}} \right| \leq C \left(\frac{(1-r)}{|t_k - rt|^{n_k}} + \frac{(1-r)}{|t_k - rt|^{n_k+1}} \right), \end{aligned}$$

где $\Pi_k(t) = \Pi(t)(t - t_k)^{-n_k}$. Следовательно

$$\|I_2^{(2)}(\tau, t)\|_{L^1(\rho)} \leq C \int_T |f(\tau)| \rho(\tau) \|\rho^*(\tau)\| \int_T \frac{|\rho(t)| |((\Pi(rt))^{-1} - (\Pi(r^{-1}t))^{-1})| |dt|}{|\tau - rt|} |d\tau|$$

Учитывая что

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in (0,1)} \rho^*(\tau) \int_T \frac{\rho(t) |((\Pi(rt))^{-1} - (\Pi(r^{-1}t))^{-1})| |dt|}{|\tau - rt|} &\leq \sum_{k=1}^m \int_{T_k} \frac{(1-r) \rho^*(\tau) |dt|}{|\tau - rt| |t_k - rt|^{n_k - \alpha_k}} + \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_{T_k} \frac{(1-r) \rho^*(\tau) |dt|}{|\tau - rt| |t_k - rt|^{n_k - \alpha_k + 1}}, \quad \tau \in T_k \end{aligned}$$

и применяя утверждение в) леммы 2.1 получаем

$$\sup_{\tau \in (0,1)} \rho^*(\tau) \int_T \frac{\rho(t) |((\Pi(rt))^{-1} - (\Pi(r^{-1}t))^{-1})| |dt|}{|\tau - rt|} < \infty.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \|I_1(\tau, t)\|_{L^1(\rho)} &\leq C \int_T \frac{(1-r)^\delta \rho_r(t)}{|\Pi(rt)|} \int_T \frac{|f(\tau)| |\Pi(\tau)| |d(\tau)|}{|\tau - rt|} |dt| \leq \\ &\leq C \int_T |f(\tau)| \rho(\tau) \rho^*(\tau) \int_T \frac{(1-r)^\delta \rho_r(t) |dt|}{|\tau - rt| |\Pi(rt)|} |d\tau|. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\rho^*(\tau) \int_T \frac{(1-r)^\delta \rho_r(t) |dt|}{|\tau - rt| |\Pi(rt)|} \leq \rho^*(\tau) \int_T \frac{(1-r)^\delta |dt|}{\rho^*(t) |\tau - rt|}$$

и применяя лемму 2.1 завершаем доказательство леммы. $\square$

Функцию $a(t)$ отнесем к классу R^α ($a(t) \in R^\alpha$), где $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, если

$$(2.4) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho_r)} = 0.$$

К примеру $a(t) \in R^\alpha$, если $\lambda_k > -n_k - 1$ и

$$a(t) = \cos^\gamma \left(\frac{\pi}{2} \left(\prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{t_k}{t} \right)^{\lambda_k} \right) \right), \quad t \in T$$

где γ целое число, λ_k неотрицательные целые числа. Тогда $\gamma = \text{ind } a(t)$. Очевидно, что если $\gamma \geq 0$, то $S^+(z) \equiv 1$,

$$S^-(z) = \cos^{-\gamma} \left(\frac{\pi}{2} \left(\prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{t_k}{z} \right)^{\lambda_k} \right) \right).$$

Имеем

$$|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)| \leq C \left| \prod_{k=1}^m (t_k - r^{-1}t)^{\lambda_k} - \prod_{k=1}^m (t_k - t)^{\lambda_k} \right|$$

Следовательно при $t \in T_k$

$$|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)| \rho_r(t) \leq C(1-r) |t_k - rt|^{n_k + \lambda_k - 1} |t_k - t|^{\alpha_k - n_k}$$

Имея в виду что $\lambda_k + n_k > -1$ получаем $a(t) \in R^\alpha$. Аналогично можно доказать что $a(t) \in R^\alpha$, когда $\gamma < 0$.

Лемма 2.4. Пусть $a(t) \in R^\alpha$ и $\alpha_j \leq -2$ для некоторого $j \in \overline{1, m}$. Тогда если

$$P(z) = A_1(t_j - z) + A_2(t_j - z)^2 + \dots + A_{-n_j-1}(t_j - z)^{-n_j-1}$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{|t_j - t| < \delta} |S^+(rt)P(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)P(r^{-1}t)| \rho_r(t) |dt| = 0,$$

для некоторого $0 < \delta < \min |t_j - t_k|$, $j \neq k$, то $P(z) \equiv 0$.

Доказательство. Так как

$$S^+(rt)P(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)P(r^{-1}t) = I_1(r, t) + I_2(r, t),$$

где

$$I_1(r, t) = (S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t))P(rt),$$

$$I_2(r, t) = a(t)S^-(r^{-1}t)(P(rt) - P(r^{-1}t)),$$

то из условия $a(t) \in R^a$ следует что $\|I_1(r, t)\|_{L^1(\rho_r)} \rightarrow 0$. Пусть $A_1 \neq 0$, тогда имеем

$$|P(rt) - P(r^{-1}t)| > (1-r).$$

где $|t_j - t| < C(1-r)$, $C > 0$. Поэтому

$$\int_T |I_2(rt)|\rho_r(t)|dt| \geq \int_{|t_j - rt| < C(1-r)} \frac{(1-r)|dt|}{|t_j - rt|^{-n_j} |t_j - t|^{n_j - \alpha_j}}$$

Так как $|t_j - rt| = O(1-r)$ при $|t_j - t| < C(1-r)$, то

$$\int_{|t_j - t| < C(1-r)} |I_2(rt)|\rho_r(t)|dt| \geq (1-r)^{n_j+1} \int_0^{C(1-r)} \frac{d\theta}{\theta^{n_j - \alpha_j}} \geq C(1-r)^{2+\alpha_j}.$$

Следовательно $A_1 = 0$.

Предположим $A_k \neq 0$. Пусть k нечетное число и $A_1 = A_2 = \dots = A_{k-1} = 0$. Тогда при $|t_j - t| < C(1-r)$ имеем

$$|P(rt) - P(r^{-1}t)| > (1-r)|t_j - t|^{k-1}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \int_{|t_j - t| < \delta} |I_2(rt)|\rho_r(t)|dt| &\geq \int_{|t_j - t| < C(1-r)} \frac{(1-r)|t_j - t|^{k+\alpha_j - n_j - 1}}{|t_j - rt|^{-n_j}} |dt| \\ &> (1-r)^{n_k+1} \int_0^{C(1-r)} \theta^{k+\alpha_j - n_j - 1} d\theta = C(1-r)^{k+\alpha_j+1}. \end{aligned}$$

Поскольку $k + \alpha_j + 1 \leq 0$, то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{|t_j - t| < \delta} |I_2(r, t)|\rho_r(t)|dt| > 0.$$

Если k четное число, то

$$\begin{aligned} \int_{|t_j - t| < \delta} |I_2(rt)|\rho_r(t)|dt| &> (1-r)^{n_j+1} \int_{C(1-r)^2}^{C(1-r)} \theta^{k+\alpha_j - n_j - 1} d\theta = \\ &= (1-r)^{k+\alpha_j+1} (A - B(1-r)^{k+\alpha_j - n_j}). \end{aligned}$$

Так как $k + \alpha_j - n_j > 0$, то получаем доказательство леммы. $\square$

В дальнейшем будем предполагать, что

$$(2.5) \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_m, \quad \alpha_{m_0} \leq -1, \alpha_{m_0+1} > -1$$

Лемма 2.5. Пусть $k_j \geq -n_j$, $j = 1, 2, \dots, m_0$, тогда

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|S^+(rt) \prod_{j=1}^{m_0} (t_j - rt)^{k_j} - a(t)S^-(r^{-1}t) \prod_{j=1}^{m_0} (t_j - r^{-1}t)^{k_j}\|_{L^1(\rho_r)} = 0.$$

Доказательство. Так как

$$S^+(rt) \prod_{\alpha_j \leq -1} (t_j - rt)^{k_j} - a(t)S^-(r^{-1}t) \prod_{\alpha_j \leq -1} (t_j - r^{-1}t)^{k_j} = I_1(r, t) + I_2(r, t),$$

где

$$I_1(r, t) = (S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)) \prod_{\alpha_j \leq -1} (t_j - rt)^{k_j},$$

$$I_2(r, t) = a(t)S^-(r^{-1}t) \left(\prod_{\alpha_j \leq -1} (t_j - rt)^{k_j} - \prod_{\alpha_j \leq -1} (t_j - r^{-1}t)^{k_j} \right),$$

то учитывая, что $|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)| < C(1-r)^\delta$ и $\delta > 0$ получаем

$$\int_T |I_1(r, t)| \rho_r(t) |dt| \leq C(1-r)^\delta \left(\sum_{j=1}^m \int_{T_j} \frac{|t_j - rt|^{k_j} |dt|}{|t_j - rt|^{-n_j} |t_j - t|^{n_j - \alpha_j}} \right)$$

и

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T |I_1(r, t)| |dt| = 0.$$

Далее, так как при $t \in T_j$

$$\left| \prod_{\alpha_j \leq -1} (t_j - rt)^{k_j} - \prod_{\alpha_j \leq -1} (t_j - r^{-1}t)^{k_j} \right| \leq C|(t_j - rt)^k - (t_j - r^{-1}t)^k| < C(1-r)|t_j - rt|^{k-1},$$

то

$$\int_T |I_2(r, t)| \rho_r(t) |dt| \leq C(1-r) \left(\sum_{j=1}^m \int_{T_j} \frac{|dt|}{|t_j - rt| |t_j - t|^{n_j - \alpha_j}} \right).$$

Учитывая что $n_j - \alpha_j < 1$, получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T |I_2(r, t)| |dt| = 0.$$

Лемма 2.5 доказана. □

Лемма 2.6. Пусть $\alpha_k \leq -2$ для некоторого $k, 1 \leq k \leq m$, $a(t) \in R^\alpha$ и $\Phi_k(z) = (t_k - z)^{-n_k} \prod_{j=1}^m (t_j - z)^{n_j}$. Если функция

$$\varphi_k(z) = \left(\frac{A_1}{(t_k - z)} + \dots + \frac{A_{-n_k}}{(t_k - z)^{-n_k}} \right) \Phi_k(z),$$

удовлетворяет условию

$$\int_T |S^+(rt) \varphi_k^+(rt) - a(t) S^-(r^{-1}t) \varphi_k^-(rt)| \rho_r(t) |dt| \rightarrow 0,$$

то $\varphi_k(z)$ представима в виде $\varphi_k(z) = A_0 + (t_k - z)^{-n_k} \Phi_0(z)$, где $\Phi_0(z)$ аналитическая функция в точке t_k , A_0 некоторое комплексное число.

Доказательство. В силу леммы 2.5

$$\int_{|t_k - t| < \varepsilon} |(t_k - \tau t)^{-n_k} \varphi_k(\tau t) S^+(rt) - a(t)(t_k - \tau^{-1}t)^{-n_k} \varphi_k(\tau^{-1}t) S^-(\tau^{-1}t)| \rho_r(t) |dt| \rightarrow 0,$$

когда $r \rightarrow 1 - 0$, то функция

$$\phi_k(z) = \varphi'_k(t_k)(t_k - z) + \dots + \frac{\varphi_k^{(-n_k-1)}(t_k)(t_k - z)^{-n_k-1}}{(-n_k)!}$$

также удовлетворяет условию

$$\int_{|t_k - t| < \varepsilon} |S^+(rt)\phi_k(\tau t) - a(t)S^-(\tau^{-1}t)\phi_k(\tau^{-1}t)| \rho_r(t) |dt| \rightarrow 0.$$

В силу леммы 2.4 числа $A_1, \dots, A_{-n_k}$ однозначно определяются из условий

$$\begin{cases} A_{-n_k} F'(t_k) + A_{-n_k-1} F(t_k) = 0 \\ A_{-n_k} F''(t_k) + A_{-n_k-1} F'(t_k) + A_{-n_k-2} F(t_k) = 0 \\ \dots \\ A_{-n_k} F^{(-n_k)}(t_k) + A_{-n_k-1} F^{(-n_k-1)}(t_k) + \dots + A_1 F(t_k) = 0. \end{cases}$$

Выбирая A_{-n_k} произвольным образом из этой системы однозначно определяем числа $A_1, A_2, \dots, A_{-n_k-1}$. Учитывая леммы 2.4 и 2.5 завершаем доказательство леммы 2.6. $\square$

3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Теорема 3.1. Пусть $f \in L^1(\rho)$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|K^+(f, \tau t) - a(t)K^-(f, \tau^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho_r)} = 0,$$

где $K(f, z)$ определяется формулой (2.3). Таким образом $K(f, z)$ решение задачи R , когда $N + \kappa \geq 0$. Если $N + \kappa < 0$, то $K(f, z)$ является решением задачи R тогда и только тогда когда f удовлетворяет условиям (2.2).

Доказательство. Пусть $f \equiv 0$ в некоторых непересекающихся окрестностях $T_{1k} \in T$ точек t_k . Обозначим через T_1 объединение этих интервалов. Тогда функция

$$\Phi_1(z) = \int_T \frac{f(\tau)\Pi(\tau)d\tau}{S^+(\tau)(\tau - z)}$$

аналитична в T_1 . Ряд Тейлора этой функции в точках t_i , $i = 1, \dots, m$ имеет вид

$$\Phi_1(z) = A_0^{(i)} + A_1^{(i)}(z - t_i) + \dots + A_k^{(i)}(z - t_i)^k + \dots,$$

где $A_k^{(i)} = \frac{k!}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)\Pi(\tau)d\tau}{S^+(\tau)(\tau - t_i)^{k+1}}$, $i = 1, \dots, m$.

Имеем

$$K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t) = I_1(r, t) + I_2(r, t),$$

где

$$I_1(r, t) = \frac{S^+(rt)\Phi_1(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)\Phi_1(r^{-1}t)}{\Pi(rt)},$$

$$I_2(r, t) = a(t)S^-(r^{-1}t)\Phi_1(r^{-1}t)((\Pi(rt))^{-1} - (\Pi(r^{-1}t))^{-1}).$$

Так как

$$|\Phi_1(rt) - \Phi_1(r^{-1}t)| < A(1-r), \quad t \in T_1,$$

то учитывая что

$$|S^+(rt)\Phi_1(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)\Phi_1(r^{-1}t)| < C(1-r)^\delta, \quad \delta > 0, t \in T_1,$$

получим

$$|\int_{T_1} I_1(rt)\rho_r(t)dt| \leq C \int_{T_1} \frac{(1-r)^\delta \rho_r(t)|dt|}{\Pi(rt)} \leq C(1-r)^\delta \int_{T_1} |\rho^*(t)| \rightarrow 0, r \rightarrow 1-0.$$

Для $t \in T_1$ имеем

$$|\int_{T_1} I_2(r, t)\rho_r(t)dt| \leq C \sum_{k=1}^m \int_{T_1^k} (1-r) \left(\frac{1}{|t_k - rt|^{n_k}} + \frac{1}{|t_k - rt|^{n_k+1}} \right) |\rho_r(t)||dt| \leq$$

$$\leq C(1-r) \sum_{k=1}^m \left(\int_{T_1^k} |t - t_k|^{\alpha_k - n_k} |dt| + \int_{T_1^k} |t - t_k|^{\alpha_k - n_k - 1} |dt| \right) \rightarrow 0, r \rightarrow 1.$$

Далее, пусть $t \in T \setminus T_1$. Так как $f(t)\Pi(t) \in L^1(T)$ то функции

$$\Phi_2(z) = \frac{S(z)}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)\Pi(\tau)d\tau}{S^+(\tau)(\tau - z)}$$

удовлетворяет условию

$$\|\Phi_2^+(rt) - a(t)\Phi_2^-(r^{-1}t) - f(t)\Pi(t)\|_{L^1} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 1-0.$$

Следовательно, теорема доказана для функции обращающейся в нуль в окрестностях точек t_k , $k = 1, \dots, m$. Пусть теперь f есть произвольная функция из $L^1(\rho)$.

Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти функцию $f_\varepsilon \in L^1(\rho)$ такую, что $f_\varepsilon \equiv 0$ в T_1 и $\|f - f_\varepsilon\|_{L^1(\rho)} < \varepsilon$. Из леммы 2.3 следует

$$\begin{aligned} & \|K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho_r)} \leq \\ & \leq \|K^+(f - f_\varepsilon, rt) - a(t)K^-(f - f_\varepsilon, r^{-1}t)\|_{L^1(\rho_r)} + \\ & \|K^+(f_\varepsilon, rt) - a(t)K^-(f_\varepsilon, r^{-1}t) - f_\varepsilon\|_{L^1(\rho_r)} + \|f - f_\varepsilon\|_{L^1(\rho)} \leq \\ & \leq C\|f - f_\varepsilon\|_{L^1(\rho)} + \|K^+(f_\varepsilon, rt) - a(t)K^-(f_\varepsilon, r^{-1}t) - f_\varepsilon\|_{L^1(\rho_r)}. \end{aligned}$$

Так как

$$\|K^+(f_\varepsilon, rt) - a(t)K^-(f_\varepsilon, r^{-1}t) - f_\varepsilon\|_{L^1(\rho_r)} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 1-0$$

получаем доказательство теоремы 3.1. □

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ R В СЛУЧАЕ $\alpha_k > -1$, $k = 1, 2, \dots, m$

Теорема 4.1. *Справедливы следующие утверждения:*

а) Если $\kappa \geq 0$, то общее решение однородной задачи R можно представить в виде

$$(4.1) \quad \Phi_0(z) = S(z) \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_j^{(k)}}{(t_k - z)^j} + P(z) \right),$$

где $P(z)$ полином порядка $\kappa - 1$ при $\kappa > 0$ и $P(z) \equiv 0$ при $\kappa = 0$.

б) Если $\kappa < 0$ и $N + \kappa > 0$, то общее решение однородной задачи R можно представить в виде

$$(4.2) \quad \Phi_0(z) = \frac{S(z)P(z)}{\Pi(z)},$$

где $P(z)$ некоторый полином порядка $N + \kappa - 1$.

в) Если $N + \kappa \leq 0$, то однородная задача имеет только нулевое решение.

Доказательство. Пусть $P(z) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k z^k$. Поскольку $|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)| < A(1-r)^\delta$, то будем иметь

$$|S^+(rt)P(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)P(r^{-1}t)| < C(1-r)^\delta.$$

Поэтому

$$\|S^+(rt)P(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)P(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} \rightarrow 0, r \rightarrow 1-0.$$

Положим

$$\Phi_{jk}(z) = S(z)(t_k - z)^{-j}, \quad j < n_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Получим

$$\begin{aligned} |\Phi_{jk}^+(rt) - a(t)\Phi_{jk}^-(r^{-1}t)| &\leq |S^+(rt)(t_k - rt)^{-j} - a(t)S^-(r^{-1}t)(t_k - r^{-1}t)^{-j}| \\ &\leq \frac{|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)|}{|t_k - rt|^j} + |a(t)S^-(r^{-1}t)| \left| \frac{1}{(t_k - rt)^j} - \frac{1}{(t_k - r^{-1}t)^j} \right| \\ &\leq C \left(\frac{(1-r)^\delta}{|t_k - rt|^j} + \left| \frac{1}{(t_k - rt)^j} - \frac{1}{t_k - r^{-1}t} \right| \right) \leq C \left(\frac{(1-r)^\delta}{|t_k - rt|^j} + \frac{(1-r)}{|t_k - rt|^{j+1}} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|\Phi_{jk}^+(rt) - a(t)\Phi_{jk}^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} &\leq \\ &\leq C \left(\int_T \frac{(1-r)^\delta \rho(t) |dt|}{|t_k - rt|^j} + \int_T \frac{(1-r) \rho(t) |dt|}{|t_k - rt|^{j+1}} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $j < n_k$ и $n_k - \alpha_k < 1$ то последние интегралы стремятся к нулю при $r \rightarrow 1-$. Утверждение а) теоремы доказано. Аналогично доказываются утверждения б) и в). $\square$

Теорема 4.2. *Справедливы следующие утверждения*

а) если $N + \kappa \geq 0$, то общее решение задачи R можно представить в виде

$$(4.3) \quad \Phi(z) = K(f, z) + \Phi_0(z),$$

где $K(f, z)$ определяется формулой (2.1), а $\Phi_0(z)$ общее решение однородной задачи R,

б) если $N + \kappa < 0$, то задача R разрешима тогда и только тогда когда f удовлетворяет условиям (2.2). При этом решение можно представить в виде (2.1).

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ R В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ α_k , $k = 1, 2, \dots, m$

Теорема 5.1. *Пусть $a(t) \in R^\alpha$. Тогда*

а) Если $N + \kappa \geq 0$, то решение задачи R можно представить в виде

$$(5.1) \quad \Phi(z) = K(f, z) + S(z)(A_0 + P(z)(\Pi(z))^{-1},$$

где A_0 произвольное комплексное число при $\kappa > 0$ и $A_0 = 0$ при $\kappa \leq 0$, $P(z)$ полином порядка $N + \kappa - 1$.

б) Если $N + \kappa < 0$ и $\kappa > 0$, то $\Phi(z)$ имеет представление (4.3), где $\Phi_0(z) \equiv 0$ и f удовлетворяет следующим условиям:

$$(5.2) \quad \int_T \frac{f(t)}{S^+(t)} \Pi(t) t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(N + \kappa) - 1$$

в) Если $N < 0$ и $\kappa \leq 0$, то задача R имеет единственное решение $\Phi(z) = K(f, z) + A_0 S(z)$, где

$$(5.3) \quad A_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(t) \Pi(t) dt}{S^+(t) t^{N+1}}$$

и f удовлетворяет условиям (5.2), если $\kappa \neq -N - 1$.

г) Если $N + \kappa < 0$ и $N \geq 0$, то задача R имеет одно решение $\Phi(z) = K(f, z)$ и f удовлетворяет условиям (5.2).

Доказательство. Если Φ решение задачи R, то будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T \left| \frac{\Phi^+(rt)}{S^+(t)} - \frac{\Phi^-(r^{-1}t)}{S^-(t)} - \frac{f(t)}{S^+(t)} \|P_{jr}(t)\| \overline{P_j(t)} \right| dt = 0,$$

где

$$P_{jr}(z) = \prod_{k=1}^j (t_k - rz)^{n_k}, \quad \bar{P}_j(z) = \prod_{k=j+1}^m (t_k - z)^{n_k}.$$

Обозначив

$$\Psi_r^+(z) = \frac{\Phi^+(rz)}{S^+(z)} P_{jr}(z) \bar{P}_j(z), \quad \Psi_r^-(z) = \frac{\Phi^-(r^{-1}z)}{S^-(z)} P_{jr}(z) \bar{P}_j(z),$$

получаем задачу Гильберта для функции $\Psi_r(z)$

$$\Psi_r^+(t) - \Psi_r^-(t) = f_r(t),$$

где $f_r(t) = \frac{f(t)}{S^+(t)} P_{jr}(t) \bar{P}_j(t)$. Так как функция $\Psi_r^-(z)$ имеет полюс порядка $-n_k$ в точке $t = r^{-1}t_k$, $k = 1, 2, \dots, j$ и в бесконечности $|\Psi_r^+(z)| < C|z|^{N+\kappa-1}$, то обозначив

$$Q_{kr}(z) = \frac{A_1^k(r)}{(t_k - rz)} + \dots + \frac{A_{n_k}^k(r)}{(t_k - rz)^{-n_k}}$$

главную часть разложения Лорана функции $\Psi_r^-(z)$ в точке $r^{-1}t_k$, будем иметь

$$\Psi_r^+(t) - (\Psi_r^-(t) - \sum_{k=1}^{m_0} Q_{kr}(t)) = f_r(t) + \sum_{k=1}^{m_0} Q_{kr}(t).$$

Далее положив $N + \kappa \geq 0$, получаем

$$\Psi_r(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{T}} \frac{f_r(t)}{(t - z)} dt + \sum_{k=1}^{m_0} Q_{kr}(z) + P_r(z),$$

где $P_r(z)$ некоторый полином порядка $N + \kappa - 1$ при $N + \kappa > 0$ и $P_r(z) \equiv 0$ при $N + \kappa = 0$. Так как $f_r(t) \rightarrow f(t)\Pi(t)(S^+(t))^{-1}$ в L^1 получаем

$$\Phi(z) = K(f, z) + \frac{S(z)(\sum_{k=1}^{m_0} Q_k(z) + P(z))}{\Pi(z)},$$

где

$$Q_k(z) = \frac{C_1^k}{(t_k - z)} + \dots + \frac{C_{-n_k}^k}{(t_k - z)^{-n_k}}, \quad k = 1, \dots, m_0.$$

Очевидно, что функция $\frac{S(z)P(z)}{\Pi(z)}$ удовлетворяет однородному условию (1.3). Поэтому функция

$$\frac{\sum_{k=1}^{m_0} Q_k(z)}{\Pi(z)},$$

тоже удовлетворяет условию (1.3). Учитывая лемму 2.6 получаем следующее представление функции $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = K(f, z) + S(z)(A_0 + P(z)(\Pi(z))^{-1}).$$

Предположим $N + \kappa < 0$, $\kappa > 0$. Поскольку $a(t) \in R^\alpha$, то $A_0 S(z)$ является решением однородной задачи R, следовательно общее решение задачи R можно представить в виде:

$$\Phi(z) = K(f, z) + S(z)A_0.$$

где A_0 есть произвольное комплексное число.

Если $N > 0$, $\kappa \leq 0$. То функция $S(z)$ имеет полюс порядка $-\kappa$ в бесконечности, следовательно $A_0 S(z)$ не решение однородной задачи R. Чтобы имело место условие $\Phi(\infty) = 0$, необходимо найти A_0 из (5.1) и потребовать чтобы f удовлетворяла условиям (5.2) при $\kappa \neq -N - 1$.

При $N + \kappa < 0$, $N \leq 0$ очевидно что $A_0 = 0$ и f удовлетворяет условиям (11). $\square$

Теорема 5.2. Пусть $a(t) \in R^\alpha$. Тогда а) Если $N + \kappa > 0$, то общее решение однородной задачи R можно представить в виде:

$$\Phi(z) = S(z)(A_0 + P(z)(\Pi(z))^{-1})$$

где A_0 произвольное комплексное число при $\kappa > 0$ и $A_0 = 0$ при $\kappa \leq 0$, $P(z)$ полином порядка $N + \kappa - 1$.

б) Если $N + \kappa \leq 0$ и $\kappa > 0$, то $\Phi(z) = A_0 S(z)$, где A_0 произвольное комплексное число.

в) Если $N + \kappa \leq 0$ и $\kappa \leq 0$, то однородная задача R имеет только нулевое решения $\Phi(z) \equiv 0$.

Abstract. In the unit disc bounded by the circle $T = \{z, |z| = 1\}$ we consider the Riemann boundary value problem in the weighted space $L^1(\rho)$, where $\rho(t) = \prod_{k=1}^m |t - t_k|^{\alpha_k}$, $t_k \in T$, $k = 1, 2, \dots, m$, and α_k , $k = 1, 2, \dots, m$ are real numbers.

The question of interest is to determine an analytic outside the circle T function $\Phi(z)$, $\Phi(\infty) = 0$ to satisfy $\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho_r)} = 0$, where $f \in L^1(\rho)$, $a(t) \in C^\delta(T)$, $\delta > 0$, and ρ_r are some continuations of function ρ inside the circle. The normal solvability of this problem is established.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Москва, Наука (1968).
- [2] Ф. Д. Гахов. Краевые Задачи, Москва, Наука (1977).
- [3] И. Н. Векуа, Новые Методы Решения Эллиптических Задач (1948).
- [4] Б. В. Хведелидзе, "О разрывной задаче Римана-Привалова для нескольких функций", Сообщение АП Груз. ССР, 17, no. 10, 865 - 872 (1956).

- [5] И. Е. Симоненко, "Красная задача Римана с непрерывными коэффициентами", ДАН СССР, no. 4, 746 – 749 (1965).
- [6] Г. С. Литвинчук, Красные Задачи и Сингулярные Интегральные Уравнения. М. Наука (1977).
- [7] Г. М. Айрапетян, "Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1 ", Изв. АН Арм. ССР мат., XXV, no. 1. 3 – 20 (1990).
- [8] Г. М. Айрапетян, А. С. Асатрян, "О граничной задаче Римана в L^∞ ", Известия НАН Армении. Математика, 33, no. 5. 4 – 11 (1998).
- [9] Г. М. Айрапетян, М. С. Айрапетян, "Граничная задача Гильберта в весовых пространствах $L^1(\rho)$ ", Известия НАН Армении, 43, no. 2, 25 – 42 (2008).
- [10] К. Казарян, Ф. Сория, И. Спитковский, "Краевая задача Римана в пространствах с весом допускающим особенности", ДАН. 353, no. 6, 717 – 719 (1997).
- [11] K. S. Kazarian, "Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals". Studia Math., 86, 97 – 130 (1987).
- [12] Г. М. Голузин, Геометрическая Теория Функции Комплексного Переменного, М. Наука (1966).

Поступила 3 июля 2015