Известия НАН Армении, Математика, том 51, н. 4, 2016, стр. 17-24.

О ИНТЕГРИРУЕМЫХ С ВЕСОМ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Т. В. МАРГАРЯН, В. Н. МАРГАРЯН

Российско-Армянский (Славянский) Университет
E-mails: vachagan.margaryan@yahoo.com; mar_tiko@yahoo.com

Аннотация. В работе доказывается, что решения (из весового пространства $L_{2,\delta}$) почти гипоэллиптических уравнений принадлежат классам Жевре.

MSC2010 number: 12E10, 26C05.

Ключевые слова: почти гипоэллиптический оператор; класс Жевре.

1. Определения и постановка задачи

Пусть [1] N - множество натуральных чисел $N_0 = N \cup \{0\}$, N_0^n $(n \in N)$ множество n - мерных мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_j \in N_0$, $j = 1, ..., n$, E^n и R^n - n - мерные вещественные эвклидовы пространства точек $x = (x_1, ..., x_n)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ соответственно, $R_+^n := \{\xi \in R^n : \xi_j \geq 0, \quad j = 1, ..., n\}$, $C^n = R^n \times iR^n$ $(i^2 = -1)$. Для точек $\xi, \eta \in R^n$, $\alpha \in N_0^n$ и числа t обозначим $\|\xi\| := \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$, $\xi \cdot \eta := (\xi_1 \cdot \eta_1, ..., \xi_n \cdot \eta_n)$, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $t \cdot \xi = (t \cdot \xi_1, ..., t \cdot \xi_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ либо $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, ..., n$.

Пусть $P(D) = \sum\limits_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = \sum\limits_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ его полный символ, где сумма распространяется по конечному набору $(P) := \{\alpha \in N_0^n : \gamma_\alpha \neq 0\}$.

Определение 1.1 (см.[1] определение 11.1.2 и теорему 11.1.1). *Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется гипоэллиптическим, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий*

(1) $\{u, P(D)u = 0$ *на* $\Omega\} \subset C^\infty(\Omega)$ *для любой области* $\Omega \subset E^n$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта SCS 15T-1A197

(2) *для любого* $0 \neq \alpha \in N_0^n$ $\quad P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) := D^\alpha P(\xi)/P(\xi) \to 0$ *при* $\|\xi\| \to \to \infty, \quad \xi \in R^n$.

Определение 1.2 (см.[2] и [3]). *Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется почти гипоэллиптическим, если с некоторой постоянной $c > 0$*

$$\sum_\alpha |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq c||P(\xi)| + 1| \quad \forall \xi \in R^n.$$

Для оператора $P(D)$ и чисел $\delta > 0$, $m \in N_0$ обозначим

$$L_{2,\delta} = \{u, u \cdot e^{-\delta|x|} \in L_2\}, \quad H_\delta^P = \{u \in L_{2,\delta}, \quad P(D)u \in L_{2,\delta}\},$$

$$H_\delta^{\bar{P}} := \{u \in L_{2,\delta}, \quad P^{(\alpha)}(D)u \in L_{2,\delta} \quad \text{для любого} \quad \alpha \in N_0^m\},$$

$$H_\delta^m := \{u \in L_{2,\delta}, \quad D^\alpha u \in L_{2,\delta} \quad \text{для любого} \quad \alpha \in N_0^m, \quad |\alpha| \leq m\},$$

и положим

$$H_\delta^\infty = \bigcap_{m=0}^\infty H_\delta^m, \quad H_\delta^{P,\infty} := \{u \in L_{2,\delta}, \quad P(D)u \in H_\delta^\infty\}.$$

Для вектора $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R_+^n$ и области $\Omega \subset E^n$ через $\Gamma^\lambda(\Omega)$ обозначим следующий анизотропный класс Жевре:

$\{f \in C^\infty(\Omega)$, для любого компакта $k \subset \Omega$, существует $c = c(f, k) > 0$ такая, что

$$\sup_{\alpha \in k} |D^\alpha f(\alpha)| \leq c^{|\alpha|+1} \alpha^{\lambda \cdot \alpha} \quad \text{для любого} \quad \alpha \in N_0^n\}.$$

В работе [1] (см. [1] теорема 11.4.12) доказано, что для любого гипоэллиптического оператора $P(D)$ существует $\lambda = \lambda(P) \in R_+^n$, $\quad \lambda_j \geq 1, \quad j = 1, ..., n$ такой, что для всех областей $\Omega \subset E^n$

$$\{u, \quad P(D)u = 0 \text{ на } \Omega\} \subset \Gamma^\lambda(\Omega).$$

Характеристическим многогранником конечного набора $A \subset R_+^n$ называется минимальный выпуклый многогранник $\Re \subset R_+^n$, содержащий множество $A \cup \{0\}$. Многогранник $\Re \subset R_+^n$ называется полным, если $\Re$ имеет вершину в начале координат и отличную от начала координат вершину на каждой оси координат. Полный многогранник $\Re \subset R_+^n$ называется вполне правильный, если компоненты всех внешних (относительно $\Re$) нормалей $(n-1)$ - мерных некоординатных граней положительны.

Для вполне правильного многогранника $\Re$ и области $\Omega \subset E^n$ через $\Gamma^{\Re}(\Omega)$ обозначим следующий мультианизотропный класс Жевре

$$\Gamma^{\Re}(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) \text{ для любого компакта } k \subset \Omega \text{ существует } c = c(f,k) > 0$$

$$\text{такая, что } \sup_{\alpha \in k} |D^\alpha f(\alpha)| \le c^{j+1} j^j \ \forall \alpha \in j \cdot \Re, \ j = 0, 1, ...,$$

$$\text{где } 0 \cdot \Re = \{0\}, \text{ а } j \cdot \Re = \{\nu \in R_+^n, \quad \nu/j \in \Re\}, \ j = 1, 2, ...\}.$$

В работе [4] доказано, что если для некоторого $\lambda \in R_+^n$, $\Re = \{\nu \in R_+^n, (\nu, \lambda) \le 1\}$, то $\Gamma^{\Re}(\Omega) = \Gamma^\lambda(\Omega)$ и для любого гипоэллиптического оператора $P(D)$ существует вполне правильный многогранник $\Re$, для которого

$$\{u, P(D)u = 0 \text{ на } \Omega\} \subset \Gamma^{\Re}(\Omega).$$

Нахождению изотропных, анизотропных и мультианизотропных классов Жевре, которым принадлежат решения дифференциальных уравнений или задачи Коши посвящены работы [5] – [8].

В [3] (см. также [9]) доказано, что если $P(D)$ почти гипоэллиптический оператор, для которого $P(\xi) \to \infty$ при $\|\xi\| \to \infty$, то существует число $\delta_0 = \delta_0(P) > 0$, для которого при всех $\delta \in (0, \delta_0)$

$$\{u \in L_{2,\delta}, P(D)u = 0\} \subset H_\delta^\infty \subset C^\infty.$$

Наша цель доказать для одного класса почти гипоэллиптических уравнений, что все решения $u \in L_{2,\delta}$ уравнения $P(D)u = f$ при малых $\delta > 0$ принадлежат классам типа Жевре, как только f принадлежит таким классам.

В дальнейшем будем, считать, что почти гипоэллиптический многочлен P с некоторой постоянной $c > 0$ удовлетворяет следующей оценке

$$\|\xi\| \le c(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^n. \tag{1.1}$$

Примеры почти гипоэллиптических многочленов удовлетворяющих условию (1.1).

Пусть $n = 2$, $P_1(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1^2 \cdot \xi_2^2$, $P_2(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^4(\xi_1^2 + \xi_2^2) + +\xi_1^2$, $P_3(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2)^2 + \xi_1^2$. Не трудно проверить, что ни один из этих многочленов не является гипоэллиптическим (следовательно, и эллиптическим). Однако, все они почти гипоэллиптичны. При этом

$$\|\xi\|^2 \le |P_1(\xi)| + 1 \ \forall \xi \in R^2,$$

$$\|\xi\|^2 \le 2(|P_2(\xi)| + 1) \ \forall \xi \in R^2,$$

$$\|\xi\| \le 2(|P_3(\xi)| + 1) \ \forall \xi \in R^2.$$

Нам понадобятся следующие результаты, которые доказаны в работе [10], либо доказываются аналогичным образом, с некоторой модификацией соответствующих методов этой работы.

Предложение 1.1. *Пусть $m \in N$. Тогда существует функция $g \in C^\infty$ такая, что с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$*

(1) $c_1^{-1} g_\delta(x) \le e^{-\delta \cdot |x|} \le c_1 \cdot g_\delta(x) \quad \forall x \in E^n$,

(2) $|D^\alpha g_\delta(x)| \le c_2 \cdot g_\delta(x) \quad \forall x \in E^n, \quad \forall \alpha \in N_0^n, \quad |\alpha| \le m$,

где $g_\delta(x) \le g(\delta \cdot x)$.

Предложение 1.2. *Пусть $P(D)$ дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $\delta_0 > 0$. Тогда существуют постоянные $c_1, c_2 \ge 1$, для которых при всех $\delta \in (0, \delta_0)$ и $u \in H_\delta^{\tilde{P}}$*

(1) $c_1^{-1} \sum\limits_\alpha \|(P^{(\alpha)}(D)u) g_\delta\|_{L_2} \le \sum\limits_\alpha \|(P^{(\alpha)}(D)u) e^{-\delta \cdot |x|}\|_{L_2} \le$
$\le c_1 \sum\limits_\alpha \|(P^{(\alpha)}(D)u) g_\delta\|_{L_2} := c_1 \|u\|_{H_\delta^{\tilde{P}}}$

(2) $c_2^{-1} \|u\|'_{H_\delta^{\tilde{P}}} \le \|u\|_{H_\delta^{\tilde{P}}} \le c_2 \|u\|'_{H_\delta^{\tilde{P}}}$,

где

$$\|u\|'_{H_\delta^{\tilde{P}}} = \sum_\alpha \|P^{(\alpha)}(D)(u g_\delta)\|_{L_2}.$$

Предложение 1.3. *Пусть $P(D)$ почти гипоэллиптический оператор. Тогда существует число $\delta_0 = \delta_0(P) > 0$ такое, что с некоторой постоянной $c \ge 1$ при всех $\delta \in (0, \delta_0)$ и $u \in H_\delta^{\tilde{P}}$*

$$c^{-1}(\|P(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_{2,\delta}}) \le \|u\|_{H_\delta^{\tilde{P}}} \le c(\|P(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_{2,\delta}}). \tag{1.2}$$

Предложение 1.4. *При условиях предложения 1.3 $\quad H_\delta^\infty$ плотно в $H_\delta^P \quad \delta \in (0, \delta_0)$.*

Следствие 1.1. *При условиях предложения 1.3 $\quad H_\delta^P = H_\delta^{\tilde{P}} \quad \delta \in (0, \delta_0)$.*

2. Основной результат

Лемма 2.1. *Пусть $P(D)$ почти гипоэллиптический оператор, символ $P(\xi)$ которого удовлетворяет оценке (1.1). Тогда при малых $\delta \in (0, \delta_0)$, δ_0 число из предложения 1.3 $H_\delta^{P,\infty} = H_\delta^\infty$.*

Доказательство. Так как вложение $H_\delta^\infty \subset H_\delta^{P,\infty}$ очевидно, то остается показать, что $H_\delta^{P,\infty} \subset H_\delta^\infty$, т.е. для любых $u \in H_\delta^{P,\infty}$ и $\alpha \in N_0^n$ $\quad D^\alpha u \in L_{2,\delta}$.

Доказательство будем проводить по индукции по $|\alpha|$. Пусть $|\alpha| = 1$. Так как $H_\delta^{P,\infty} \subset H_\delta^P$, то в силу оценки (1.1), равенства Парсеваля, предложения 1.1, следствия 1.1 и оценки (1.2) с некоторыми постоянными $c_1, c_2, \chi > 0$ для любого $u \in H_\delta^{P,\infty}$ $\quad \delta \in (0, \delta_0)$ имеем, что

$$\|\xi^\alpha \hat{ug_\delta}\|_{L_2} \leq c_1(\|P(\xi)(\hat{ug_\delta})\|_{L_2} + \|u\|_{L_{2,\delta}}) = c_1(\|P(D)(ug_\delta)\|_{L_2} + \|u\|_{L_{2,\delta}}) \leq$$

$$\leq c_1(\sum_\alpha \| \frac{(\mathrm{P}^{(\alpha)}(\mathrm{D})\mathrm{u})\mathrm{D}^\alpha \mathrm{g}_\delta}{\alpha!} \|_{L_2} + \|u\|_{L_{2,\delta}}) \leq c_2(\sum_\alpha \|(P^{(\alpha)}(D)u)g_\delta\|_{L_2} + \|u\|_{L_{2,\delta}}) \leq$$

$$\leq \chi(\|P(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_{2,\delta}}) < \infty, \tag{2.1}$$

где $\hat{v}$ преобразование Фурье функции $v \in L_2$.

Так как $u \in L_{2,\delta}$, в силу оценки (2.1) $D^\alpha(ug_\delta) \in L_2$ $\quad (|\alpha| = 1)$, то в силу формулы Лейбница и предложения 1.1 с некоторой постоянной $c_3 > 0$

$$\|(D^\alpha u)g_\delta\|_{L_2} \leq \|D^\alpha(ug_\delta)\|_{L_2} + \|uD^\alpha g_\delta\|_{L_2} \leq \|D^\alpha(ug_\delta)\|_{L_2} + c_3\|u\|_{L_{2,\delta}} < \infty,$$

т.е. $H_\delta^{P,\infty} \subset H_\delta^1$.

Предположим $H_\delta^{P,\infty} \subset H_\delta^k$ $\quad k \in N$ и покажем, что $H_\delta^{P,\infty} \subset H_\delta^{k+1}$. Пусть $\alpha \in N_0^n$ любой мультииндекс длины $k+1$. Не умаляя общности будем считать, что $\alpha_1 \geq 1$ и положим $\beta = (\alpha_1 - 1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Т.к. $|\beta| = k$, то в силу предположения индукции для любого $u \in H_\delta^{P,\infty}$ $\quad v = D^\beta u \in H_\delta^P$. Тогда в силу доказанной части $D_j v \in L_{2,\delta}$, $\quad j = 1, ..., n$, следовательно, $D^\alpha u = D_1 v \in L_{2,\delta}$. Отсюда в силу произвольности мультииндекса $\alpha \in N_0^n$; $\quad |\alpha| = k+1$ и $u \in H_\delta^{P,\infty}$ получаем, что $H_\delta^{P,\infty} \subset H_\delta^{k+1}$, следовательно,

$$H_\delta^{P,\infty} \subset \bigcap_{r=1}^\infty H_\delta^r = H_\delta^\infty.$$

Лемма 2.1 доказана. □

Следствие 2.1. *При условиях леммы 2.1*

$$N(P, \delta, f) \subset H_\delta^\infty \quad (\delta \in (0, \delta_0)),$$

если $f \in H_\delta^\infty$, *где*

$$N(P, \delta, f) := \{u \in L_{2,\delta}, \quad P(D)u = f\}.$$

Доказательство. непосредственно следует из леммы 2.1. □

Предложение 2.1. *При условиях леммы 2.1 для любых* $u \in H_\delta^{P,\infty}$, $\delta \in (0, \delta_0)$ *и* $\alpha \in N_0^n$ $|\alpha| \geq 1$

$$\|D^\alpha u\|_{L_{2,\delta}} \leq \sum_{j=1}^{|\alpha|} \chi^j \|D^{\beta^j} P(D) u\|_{L_{2,\delta}} + \chi^{|\alpha|} \cdot \|u\|_{L_{2,\delta}}, \tag{2.2}$$

где $\beta^j \in N_0^n$, $|\beta^j| = |\alpha| - j$, $j = 1, ..., |\alpha|$, $\alpha \geq \beta^1 \geq ... \geq \beta^{|\alpha|}$ *некоторые мультииндексы, а* χ *постоянная из оценки (2.1).*

Доказательство. будем проводить по индукции по $|\alpha|$. При $|\alpha| = 1$ оценка (2.2) совпадает с оценкой (2.1). Пусть оценка (2.2) доказана для всех $\alpha \in N_0^n$ $|\alpha| = k$, $k \in N$. Докажем его для $\alpha \in N_0^n$ $|\alpha| = k + 1$.

Пусть $\beta' \in N_0^n$, $|\beta'| = k$, $\beta' \leq \alpha$ и $v = D^{\beta'} u$.

Так как $v \in H_\delta^P$, то в силу оценки (2.1) так как $|\alpha - \beta'| = 1$, имеем, что

$$\|D^{\alpha-\beta'} v\|_{L_{2,\delta}} \leq \chi(\|P(D)v\|_{L_{2,\delta}} + \|v\|_{L_{2,\delta}}),$$

т.е.

$$\|D^\alpha u\|_{L_{2,\delta}} \leq \chi(\|D^{\beta'} P(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \|D^{\beta'} u\|_{L_{2,\delta}}).$$

Так как $|\beta'| = k$, следовательно, в силу предложения индукции

$$\|D^{\beta'} u\|_{L_{2,\delta}} \leq \sum_{j=1}^{|\beta'|} \chi^j \|D^{\gamma^j} P(D) u\|_{L_{2,\delta}} + \chi^{|\beta'|} \|u\|_{L_{2,\delta}},$$

где $\gamma^j \in N_0^n$, $|\gamma^j| = |\beta'| - j$, $j = 1, ..., |\beta'|$, $\beta' \geq \gamma' \geq ... \geq \gamma^{|\beta'|}$ некоторые мультииндексы, то отсюда непосредственно получаем оценку (2.2) и при мультииндексах длины $k + 1$. Этим оценка (2.2) в силу индукции доказана. □

Через A_0 обозначим множество целых аналитических функций от вещественных переменных, а Γ_δ^λ $\lambda \in R_+^n$, $\delta > 0$ множество

$$\{f \in H_\delta^\infty, \quad \exists c = c(f) > 0, \quad \|D^\alpha f\|_{L_{2,\delta}} \leq c^{|\alpha|+1} \alpha^{\lambda \cdot \alpha} \quad \forall \alpha \in N_0^n\}.$$

Нетрудно заметить, что $A_0 \subset \Gamma^{(1,1,...,1)}$ и $\Gamma_\delta^\lambda \subset \Gamma^\lambda$.

Теорема 2.1. *Пусть* $P(D)$ *почти гипоэллиптический оператор, символ которого удовлетворяет оценке (1.1). Тогда при малых* $\delta > 0$

$$N(P, \delta, 0) \subset A_0.$$

Доказательство. Так как $N(P,\delta,0) \subset H_\delta^{P,\infty}$, то из оценки (2.2), для любых $u \in N(P,\delta,0)$ и $\alpha \in N_0^n$ имеем, что

$$\|D^\alpha u\|_{L_{2,\delta}} \leq \chi^{|\alpha|}\|u\|_{L_{2,\delta}}.$$

Отсюда для любого компакта $k \subset R^n$ в силу предложения 1.1 с некоторой постоянной $c_1 = c_1(k) > 0$ имеем, что

$$\|D^\alpha u\|_{L_2(k)} := \left(\int\limits_k |D^\alpha u|^2 dx\right)^{1/2} \leq c_1\chi^{|\alpha|}\|u\|_{L_{2,\delta}}.$$

Следовательно, т.к. $u \in L_{2,\delta}$, с некоторой постоянной $c_2 = c_2(k,u) > 0$

$$\|D^\alpha u\|_{L_2(k)} \leq c_2 \cdot \chi^{|\alpha|} \quad \forall \alpha \in N_0^n.$$

Отсюда непосредственно получаем утверждение теоремы 2.1. □

Теорема 2.2. *Пусть $P(D)$ почти гипоэллиптический оператор, символ которого удовлетворяет оценке (1.1). Тогда при малых $\delta > 0$ для любого $f \in \Gamma_\delta^\lambda \quad (\lambda \in R_+^n) \quad N(P,\delta,f) \subset \Gamma_\delta^\lambda$.*

Доказательство. Так как, в силу условий теоремы, $N(P,\delta,f) \subset H_\delta^{P,\infty}$, то для любых $u \in N(P,\delta,f)$ и $\alpha \in N_0^n$, в силу оценки (2.2), определения множества Γ_δ^λ и условия $f \in \Gamma_\delta^\lambda$, с некоторой постоянной $c_1 = c_1(f) > 0$ имеем, что

$$\|D^\alpha u\|_{L_{2,\delta}} \leq \sum_{j=1}^{|\alpha|} \chi^j \|D^{\beta^j} f\|_{L_{2,\delta}} + \chi^{|\alpha|}\|ug_\delta\|_{L_{2,\delta}} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{|\alpha|} \chi^j \cdot c_1^{|\beta^j|+1}(\beta^j)^{\lambda\cdot\beta^j} + \chi^{|\alpha|}\|ug_\delta\|_{L_{2,\delta}},$$

где $\beta^j \in N_0^n, \quad |\beta^j| = |\alpha| - j, \quad j = 1,...,|\alpha|, \quad \alpha \geq \beta' \geq ... \geq \beta^{|\alpha|}$ некоторые мультииндексы. Так как $(\beta^j)^{\lambda\beta^j} \leq \alpha^{\lambda\alpha}, \quad |\beta^j| = |\alpha| - j, \quad j = 1,...,|\alpha|$, то отсюда с некоторой постоянной $c_2 \geq \max\{\chi,\, c_1,\, \|ug_\delta\|_{L_{2,\delta}}\}$ имеем, что

$$\|D^\alpha u\|_{L_{2,\delta}} \leq (|\alpha|+1)c_2^{|\alpha|}\alpha^{\lambda\cdot\alpha} \quad \forall \alpha \in N_0^n.$$

Отсюда непосредственно получаем утверждение теоремы 2.2. □

Abstract. We prove that the solutions (from the weighted space $L_{2,\delta}$) of almost hypoelliptic equations belong to the Gevrey classes.

Список литературы

[1] Л. Хермандер, "Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными", Москва, Мир, **2** (1986).

[2] G. G. Kazaryan, " On Almost Hypoelliptic Polynomials", Doklady Ross. Acad. Nauk **396** (6), 701 – 703, (2004).

[3] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, " Об одном классе почти гипоэллиптических операторов", Изв. НАН Арм., **41**(6), 39 – 56, (2006).

[4] G. H. Hakobyan, V. N. Margaryan, "On Gevrey class solutions of hypoelliptic equations", Изв. НАН Арм., **33** (1), 1 – 13, (1998).

[5] L. Zangirati, " Iterates of quasielliptic operators and Gevrey Classes", Boll Un. Mat. Ital., B(5), 18(2), 411 – 428, (1981).

[6] L. Albano, L. Rodino, " Analytic and Gevrey regularity for linear partial differential operators", Topics in Mathematical Analisis, World Scient Publ., Singapore, 23 – 43 (1989).

[7] C. Bouzar, R. Chaili, "Gevrey vectors of Multiquasielliptic systems", Proc. Amer. Math. Soc, 131(5), 1565 – 1572, (2003).

[8] D. Calvo, " Multianisotropic Gevrey classes and Couchy Problem", Ph.D Thesis, Piza (2000).

[9] В. Г. Карапетян, В. Н. Маргарян, " О почти гипоэллиптических операторах в обобщенных пространствах Соболева", Мат. в высшей школе, 4(4), 9 – 16 (2008).

[10] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, " О решениях почти гипоэллиптических уравнений в весовых пространствах Соболева", Изв. НАН Арм., **45**(4), 33 – 46 (2010).

Поступила 21 апреля 2015