

О ПРОИЗВОДНЫХ ПО НАПРАВЛЕНИЮ СЕЛЕКЦИЙ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Р. А. ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com

Аннотация. В этой статье рассматривается вопрос о существовании производной по направлению селекций для некоторых многозначных отображений со звездными графиками.

MSC2010 number: 26E25; 49J52; 46J05.

Ключевые слова: Многозначное отображение; звездное множество; шатер; касательный конус.

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена изучению свойств производных многозначных отображений и отысканию достаточных условий, при которых существуют производные многозначных отображений, графики которых являются шатрами Болтянского различной гладкости ([2], [3]). Попытки дать различные определения производной многозначного отображения предпринимали очень многие ученые: среди них Хукухара, Демьянов, Рубинов, Пшеничный и многие другие. Однако использовать касательный конус к графику были предложены независимо в двух работах: Ж. П. Обеном [12] и Е.С. Половинкиным [8]. В работе [17] также используется указанная выше концепция производной в которой касательный конус к графику отображения выбирается в виде некоторого шатра Болтянского. В работах [7], [9] вводятся понятия производных многозначного отображения, опирающиеся на различные касательные конусы к графику отображения. В частности, введено и изучено понятие регулярного касательного конуса, развивающее понятие шатра Болтянского. Отметим также, что в работах [5], [6] Б. Н. Пшеничным развивается метод шатров и успешно применяется к задачам негладкой оптимизации.

В настоящей статье рассматриваются достаточные условия, при которых многозначное отображение содержит непрерывные однозначные селекции, производные которых по направлениям содержатся в многозначной производной. Задача

существования селекций многозначных отображений, обладающих определенными свойствами, весьма интересна и находит разнообразные приложения во многих областях математики. В частности, задача о существовании непрерывной селекции многозначных отображений, восходящая к классической теореме Э. Майкла ([13]) (полуспрерывное снизу многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми значениями допускает непрерывную селекцию), получила в дальнейшем широкое развитие и многочисленные приложения.

Приведены некоторые специальные классы множеств, для которых показано, что контингентный конус к ним являются строго дифференцируемым шатром (теоремы 2.1, 2.2). Доказана теорема о пересечении строго дифференцируемых шатров (теорема 2.3). Следует отметить, что соответствующие теоремы для гладких локальных шатров доказаны в работах [3], [5] (теорема 1.4, §2, глава 5, стр. 205).

Обобщена классическая теорема о неявных функциях для систем неравенств.

В §4 установлен оригинальный результат: если α -многозначное отображение с выпуклым замкнутым графиком, то существует селекция этого отображения, удовлетворяющая условию Гельдера с константой $1/2$ (теорема 4.1).

В статье приняты известные определения и обозначения выпуклого анализа. Обозначим через $B_\varepsilon(x)$ замкнутый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $x \in R^n$; $\langle v, u \rangle$ - скалярное произведение векторов $v, u \in R^n$. $\bar{M}$ - замыкание множества M . Пусть $\partial^0 g(x)$ - субдифференциал Кларка (см. [4], определение обобщенного градиента, §2.1, глава 2, стр. 34) функции g в точке x . Если $a : R^n \rightarrow R^{2^m}$ - многозначное отображение, то

$$\text{graf}(a) = \{(x, y) \in R^{n+m} : y \in a(x)\}, \quad \text{dom}(a) = \{x \in R^n : a(x) \neq \emptyset\}.$$

Однозначное отображение $y : R^n \rightarrow R^m$ называется селекцией для многозначного отображения a , если $y(x) \in a(x)$ $x \in \text{dom}(a)$.

Определение 1.1. [14]. Пусть M - подмножество пространства R^n . Тогда множество

$$M^0 = \{x \in M : \forall y \in M \ \lambda x + (1 - \lambda)y \in M, \ \forall \lambda \in [0, 1]\}$$

называется ядром звездоности множества M . Если $M^0 \neq \emptyset$, то M называется звездным множеством. Если $\text{int} M^0 \neq \emptyset$, то M называется звездным телом.

Положим $\rho(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$, $Pr_M(x) = \{y \in M : \|x - y\| = \rho(x, M)\}$.

Определение 1.2. [7]. Контингентный конус $K_M(x_0)$ для M в точке $x_0 \in M$ определяется следующим образом:

$$K_M(x_0) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \sup \frac{M - x_0}{\lambda} = \{\bar{x} \in R^n : \lim_{\lambda \downarrow 0} \inf \rho(\bar{x}, \lambda^{-1}(M - x_0)) = 0\}.$$

т.е. вектор $\bar{x} \in K_M(x_0)$, если для любых $\alpha > 0$, $\epsilon > 0$ существуют $u \in B_\epsilon(\bar{x})$, $h \in (0, \alpha]$ такие, что $x_0 + hu \in M$.

Приведем определение шатра (см. [2], определение 34.1, §9, глава 4, стр. 278).

Определение 1.3. Конус $K \subseteq K_M(x_0)$ называется шатром для M в $x_0 \in M$, если существует отображение r , определенное в некоторой окрестности U нуля, такое, что

$$x_0 + \bar{x} + r(\bar{x}) \in M, \text{ если } \bar{x} \in K \cap U \text{ и } \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0 \text{ при } \bar{x} \rightarrow 0.$$

Шатер K называется липшицевым, если r является липшицевым отображением. Шатер K называется строго дифференцируемым, если r строго дифференцируемо в нуле, т.е. для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|r(\bar{x}_1) - r(\bar{x}_2)\| < \epsilon \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \quad \forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in B_\delta(0) \subseteq U.$$

В дальнейшем, если $a : R^n \rightarrow 2^{R^m}$ многозначное отображение, график которого есть выпуклый замкнутый конус K , то положим $a^*(y^*) = \{x^* : (-x^*, y^*) \in K^*\}$, где $K^* = \{z^* \in R^{n+m} : z^*_i \geq 0 \quad \forall i \in K\}$ (см. определение локально сопряженного отображения в [5], §2, глава 3, стр.102). В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты.

Теорема 1.1. [17] Пусть $M \subseteq R^n$ - звездное тело и $x_0 \in M^0$. Тогда конус $K_M(x_0) = \overline{\text{con}(M - x_0)}$ является шатром для M в точке x_0 . Здесь

$$\text{con}(M - x_0) = \{y \in R^n : y = \lambda(x - x_0), x \in M, \lambda > 0\}.$$

Теорема 1.2. (следствие 1 теоремы 3.1 [10]). Пусть многозначное отображение $a : R^n \rightarrow 2^{R^m}$ с выпуклыми замкнутыми значениями липшицево на компактном множестве $E \subset R^n$, т.е. существует число $L > 0$ такое, что любых $x_1, x_2 \in E$ имеет место включение $a(x_1) \subseteq a(x_2) + L\|x_1 - x_2\|B_1(0)$. Предположим также, что $\bigcap_{x \in E} a(x) \neq \emptyset$. Тогда для любого $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$, $x_0 \in$

Е существует липшицево отображение $y(x)$, определенное на E , такое, что $y(x_0) = y_0$, $y(x) \in a(x)$, $x \in E$.

2. ШАТРЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть $a : R^n \rightarrow 2^{R^m}$ многозначное отображение и $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$.

Определение 2.1. Пусть $K \subseteq K_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$ -замкнутый конус. K -производной от многозначного отображения a в точке его графика $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$ называется отображение $D^K a(x_0, y_0) : R^n \rightarrow 2^{R^m}$ вида

$$D^K a(x_0, y_0)(\bar{x}) \equiv \{\bar{y} \in R^m : (\bar{x}, \bar{y}) \in K\}, \bar{x} \in R^n.$$

В дальнейшем, если $K = K_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$, то положим

$$D^{K_{\text{graf}(a)}}(z_0) \equiv D^K a(x_0, y_0).$$

Определение 2.2. [11]. Многозначное отображение a называется псевдολипшицевым в точке $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$, если существуют окрестности V и U соответственно для точек y_0 и x_0 и константа $L \geq 0$ такие, что

$$a(x_1) \cap V \subseteq a(x_2) + L\|x_1 - x_2\|B_1(0) \quad \forall x_1, x_2 \in U.$$

В дальнейшем многозначное отображение $a^0 : R^n \rightarrow 2^{R^m}$ определяется по правилу: $a^0(x) \equiv \{y \in R^m : (x, y) \in (\text{graf}(a))^0\}$, $x \in R^n$.

Утверждение 2.1. Пусть $a : R^n \rightarrow 2^{R^m}$ -отображение со звездным и замкнутым графиком. Предположим, что $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a^0)$ и $x_0 \in \text{int dom}(a^0)$. Тогда $\bar{y} \in D^{K_{\text{graf}(a)}(z_0)}(\bar{x})$ в том и только в том случае, если

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \rho(\bar{y}, \frac{a(x_0 + \alpha\bar{x}) - y_0}{\alpha}) = 0.$$

Доказательство. Согласно теореме 3.2[17] многозначное отображение a псевдολипшицево в $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$ и следовательно, в силу предложения 3[7] $\bar{y} \in D^{K_{\text{graf}(a)}(z_0)}(\bar{x})$ тогда и только тогда, когда

$$\liminf_{\alpha \downarrow 0} \rho(\bar{y}, \frac{a(x_0 + \alpha\bar{x}) - y_0}{\alpha}) = 0.$$

Допустим, что $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Поскольку график отображения a является звездным множеством, то

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} a(x_0 + \alpha_2 \bar{x}) + (1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}) y_0 \subseteq a(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} (x_0 + \alpha_2 \bar{x}) + (1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}) x_0) = a(x_0 + \alpha_1 \bar{x}).$$

Отсюда следует, что функция $\alpha \rightarrow \rho(\bar{y}, (a(x_0 + \alpha\bar{x}) - y_0)/\alpha)$ невозрастает. Следовательно,

$$\liminf_{\alpha \downarrow 0} \rho(\bar{y}, \frac{a(x_0 + \alpha\bar{x}) - y_0}{\alpha}) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \rho(\bar{y}, \frac{a(x_0 + \alpha\bar{x}) - y_0}{\alpha}) = 0.$$

Следствие 2.1. Пусть $y(x)$ - дифференцируемая по направлению селекция для a такая, что $y(x_0) = y_0$. Тогда

$$y'(x_0, \bar{x}) \in D^{K_{\text{gras}(a)}}(x_0, y_0)(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in R^n.$$

Следствие 2.2. Пусть отображение a с выпуклыми значениями удовлетворяет всем условиям предложения 2.1. Тогда для любого $\bar{x} \in R^n$ множество $D^{K_{\text{gras}(a)}}(x_0, y_0)(\bar{x})$ выпукло.

Доказательство. По предположению множество $\alpha^{-1}(a(x_0 + \alpha\bar{x}) - y_0)$ выпукло. Отсюда следует, что функции $v \rightarrow \rho(v, \frac{a(x_0 + \alpha\bar{x}) - y_0}{\alpha})$ выпукла. Так что для любых $\mu \in [0, 1]$ и $v_1, v_2 \in D^{K_{\text{gras}(a)}}(z_0)(\bar{x})$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \downarrow 0} \rho(\mu v_1 + (1 - \mu)v_2, \frac{a(x_0 + \alpha\bar{x}) - y_0}{\alpha}) &\leq \\ \mu \lim_{\alpha \downarrow 0} \rho(v_1, \frac{a(x_0 + \alpha\bar{x}) - y_0}{\alpha}) + (1 - \mu) \lim_{\alpha \downarrow 0} \rho(v_2, \frac{a(x_0 + \alpha\bar{x}) - y_0}{\alpha}) &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mu v_1 + (1 - \mu)v_2 \in D^{K_{\text{gras}(a)}}(x_0, y_0)(\bar{x})$. $\square$

Определение 2.3. [1] Функция $g: R^n \rightarrow R$ называется строго дифференцируемой в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность V точки x_0 такая, что

$$|g(y) - g(z) - \langle g'(x_0), y - z \rangle| \leq \varepsilon \|y - z\| \quad \forall y, z \in V,$$

где $g'(x_0)$ градиент функции g в точке x_0 .

Теорема 2.1. Пусть

$$M \equiv \{x \in R^n : g(x) \leq 0\}, \quad \partial M \equiv \{x \in R^n : g(x) = 0\},$$

где g строго дифференцируемая функция в точке x_0 , $g(x_0) = 0$ и $g'(x_0) \neq 0$. Тогда подпространство $H \equiv \{\bar{x} \in R^n : \langle g'(x_0), \bar{x} \rangle = 0\}$ и полупространство $M(x_0) \equiv \{\bar{x} \in R^n : \langle g'(x_0), \bar{x} \rangle \leq 0\}$ являются строго дифференцируемыми шатрами для множеств ∂M и M в точке x_0 , соответственно.

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение теоремы. Поскольку $g'(x_0) \neq 0$, то найдется такой вектор w , $\|w\| = 1$, что $\langle g'(x_0), w \rangle < 0$. Так как g строго дифференцируема, то существует функции $R(\bar{x}) = o(\bar{x})$ такие, что

$$(2.1) \quad g(x_0 + \bar{x}) = g(x_0) + \langle g'(x_0), \bar{x} \rangle + R(\bar{x}).$$

Положим $\omega(\lambda) = \sup\{R(\bar{x}) : \|\bar{x}\| \leq \lambda\}$. Очевидно, что $\omega(\lambda)$ монотонно неубывает и $\omega(\lambda)/\lambda \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $R(\bar{x}) \leq \omega(\|\bar{x}\|)$. Если $\bar{x} \in H$ и $\mu > 0$, то из (2.1) получим

$$\begin{aligned} g(x_0 + \bar{x} + \mu\|\bar{x}\|w) &= g(x_0) + \langle g'(x_0), \bar{x} + \mu\|\bar{x}\|w \rangle + R(\bar{x} + \mu\|\bar{x}\|w) \leq \\ &\leq \|\bar{x}\|\mu \langle g'(x_0), w \rangle + \omega(\|\bar{x}\|(1 + \mu\|w\|)) = \|\bar{x}\|(\mu \langle g'(x_0), w \rangle + \\ &\quad + \frac{\omega(\|\bar{x}\|(1 + \mu\|w\|))}{\|\bar{x}\|}). \end{aligned}$$

Выберем $\delta_1 > 0$ настолько малым, чтобы выражение в круглых скобках стало меньше, чем $1/2\mu \langle g'(x_0), w \rangle$ когда $\|\bar{x}\| \leq \delta_1$. Так что

$$(2.2) \quad g(x_0 + \bar{x} + \mu\|\bar{x}\|w) \leq 1/2\mu\|\bar{x}\| \langle g'(x_0), w \rangle < 0, \forall \bar{x} \in H \cap B_{\delta_1}(0), \bar{x} \neq 0.$$

Аналогично, существует такое число $\delta_2 > 0$, что

$$(2.3) \quad g(x_0 + \bar{x} - \mu\|\bar{x}\|w) > 0 \text{ при } \bar{x} \in H \cap B_{\delta_2}(0), \bar{x} \neq 0.$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Для фиксированного $\bar{x} \in H \cap B_\delta(0)$ рассмотрим функцию $q(\bar{x}, \beta) \equiv g(x_0 + \bar{x} + \beta\|\bar{x}\|w)$ на сегменте $[-\mu, \mu]$. Из соотношений (2.2)–(2.3) следует, что $q(\bar{x}, \mu) < 0$, $q(\bar{x}, -\mu) > 0$. Следовательно, существует $\beta(\bar{x}) \in [-\mu, \mu]$ такая, что $q(\bar{x}, \beta(\bar{x})) = 0$. Теперь покажем, что точка $\beta(\bar{x})$ определяется однозначно. Для этого сначала заметим, что для фиксированного $\bar{x}$ функция $q(\bar{x}, \beta)$ монотонно убывает относительно β . Действительно, поскольку g строго дифференцируема в x_0 , то для заданного $\varepsilon < |\langle g'(x_0), w \rangle|$ и достаточно малых $\bar{x} \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{\tau \downarrow 0} \frac{q(\bar{x}, \beta + \tau) - q(\bar{x}, \beta)}{\tau} &= \\ &= \limsup_{\tau \downarrow 0} \frac{g(x_0 + \bar{x} + (\beta + \tau)\|\bar{x}\|w) - g(x_0 + \bar{x} + \beta\|\bar{x}\|w)}{\tau} \leq \\ &\leq \|\bar{x}\|(\langle g'(x_0), w \rangle + \varepsilon) < 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $q(\bar{x}, \beta)$ монотонно убывает относительно β и следовательно $\beta(\bar{x})$ определяется однозначно. Заметим также, что $\beta(\bar{x}) \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow 0$. Теперь определим отображение r следующим образом: $r(\bar{x}) = \rho(\bar{x})w \forall \bar{x} \in R^n$,

где $\rho(\bar{x}) = \beta(Pr_H(\bar{x}))\|Pr_H(\bar{x})\|$. По определению r для достаточно малых $\bar{x} \in H$ имеем $g(x_0 + \bar{x} + r(\bar{x})) = 0$. Нетрудно доказать также, что

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow 0} \frac{\|r(\bar{x})\|}{\|\bar{x}\|} = 0.$$

Наконец докажем, что отображение r строго дифференцируемо в нуле. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in H \cap B_\delta(0)$ имеет место

$$\begin{aligned} | \langle g'(x_0), (\rho(\bar{x}_1) - \rho(\bar{x}_2))w \rangle | &= | g(x_0 + \bar{x}_1 + \rho(\bar{x}_1)w) - g(x_0 + \bar{x}_2 + \rho(\bar{x}_2)w) \\ &- \langle g'(x_0), \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + (\rho(\bar{x}_1) - \rho(\bar{x}_2))w \rangle | \leq \varepsilon(\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| + \|w\|\|\rho(\bar{x}_1) - \rho(\bar{x}_2)\|). \end{aligned}$$

Поскольку $\|w\| = 1$, то отсюда получим

$$\|\rho(\bar{x}_1) - \rho(\bar{x}_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{|\langle g'(x_0), w \rangle| - \varepsilon} \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|.$$

Теперь если $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in B_\delta(0)$, то

$$\begin{aligned} \|\rho(\bar{x}_1) - \rho(\bar{x}_2)\| &\leq \frac{\varepsilon}{|\langle g'(x_0), w \rangle| - \varepsilon} \|Pr_H(\bar{x}_1) - Pr_H(\bar{x}_2)\| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|\langle g'(x_0), w \rangle| - \varepsilon} \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|. \end{aligned}$$

Первое утверждение теоремы доказано. Определим отображение ψ следующим образом: $\psi(\bar{x}) = r(Pr_H^w(\bar{x})) = \alpha(\bar{x})w \quad \forall \bar{x} \in R^n$, где $\alpha(\bar{x}) = \rho(Pr_H^w(\bar{x}))$. Pr_H^w -оператор проектирования на H по направлению вектора w . Пусть θ -угол, между вектором w и подпространством H . Тогда для любого $x, y \in R^n$ справедливо неравенство

$$\|Pr_H^w(x) - Pr_H^w(y)\| \leq \frac{1}{\sin \theta} \|x - y\|,$$

т.е. отображение ψ строго дифференцируемо в нуле. Допустим, что $\bar{x} \in K_M(x_0)$.

Используя теорему о среднем значении для линейщевой функции, получим

(2.4)

$$g(x_0 + \bar{x} + \psi(\bar{x})) = g(x_0 + \bar{x} + \psi(\bar{x})) - g(x_0 + Pr_H^w(\bar{x}) + \psi(\bar{x})) = \langle y^*, \bar{x} - Pr_H^w(\bar{x}) \rangle,$$

где $y^* \in \partial^0 g(\zeta)$, ζ - некоторая точка из отрезка $[x_0 + \bar{x} + \psi(\bar{x}), x_0 + Pr_H^w(\bar{x}) + \psi(\bar{x})]$.

Если $\bar{x} \in K_M(x_0)$, то для некоторого $\lambda(\bar{x}) \geq 0$ имеем $\bar{x} - Pr_H^w(\bar{x}) = \lambda(\bar{x})w$. Так как отображение $\partial g^0(x)$ полунепрерывно сверху и $\langle g'(x_0), w \rangle > 0$, то из (2.4) следует, что для достаточно малых $\bar{x} \in K_M(x_0)$ имеет место неравенство

$$g(x_0 + \bar{x} + \psi(\bar{x})) = \lambda(\bar{x}) \langle y^*, w \rangle \leq 0.$$

Теорема 2.2. Пусть $\Omega = \{x \in R^n : g_i(x) \leq 0, i \in I\}$, где I - конечное множество индексов, функции $g_i(x)$ строго дифференцируемы в точке $x_0 \in \Omega$. Предположим, что существует вектор $w, \|w\| = 1$ такой, что $\langle g'_i(x_0), w \rangle < 0, \forall i \in I(x_0)$, где $I(x_0) = \{i \in I : g_i(x_0) = 0\}$. Тогда конус

$$K_\Omega(x_0) = \{\bar{x} \in R^n : \langle g'_i(x_0), \bar{x} \rangle \leq 0, i \in I(x_0)\}$$

является строго дифференцируемым шатром для Ω в x_0 .

Доказательство. Для каждого $i \in I(x_0)$ построим отображение $\psi_i(\bar{x}) = \alpha_i(\bar{x})w$, определенное вблизи нуля, так как было сделано при доказательстве теоремы 2.1. Таким образом для достаточно малых $\bar{x} \in K_i \equiv \{\bar{x} \in R^n : \langle g'_i(x_0), \bar{x} \rangle \leq 0\}$ имеет место неравенство: $g_i(x_0 + \bar{x} + \psi_i(\bar{x})) \leq 0$.

Так как отображения ψ_i строго дифференцируемы в нуле, то для любого $\epsilon > 0$ найдутся такие числа $\delta_i > 0$, что

$$(2.5) \quad \|\psi_i(\bar{x}) - \psi_i(\bar{y})\| < \epsilon \|\bar{x} - \bar{y}\| \text{ при } \|\bar{x}\| \leq \delta_i, \|\bar{y}\| \leq \delta_i, i \in I(x_0).$$

Обозначим $\alpha(\bar{x}) = \max_{i \in I(x_0)} \alpha_i(\bar{x})$, $\psi(\bar{x}) = \alpha(\bar{x})w$, $\delta = \min_{i \in I(x_0)} \delta_i$. Учитывая соотношение (2.5), имеем

$$\begin{aligned} \|\psi(\bar{x}) - \psi(\bar{y})\| &= \left\| \max_{i \in I(x_0)} \alpha_i(\bar{x}) - \max_{i \in I(x_0)} \alpha_i(\bar{y}) \right\| \leq \\ &\leq \max_{i \in I(x_0)} \|\psi_i(\bar{x}) - \psi_i(\bar{y})\| \leq \epsilon \|\bar{x} - \bar{y}\| \text{ при } \|\bar{x}\| \leq \delta, \|\bar{y}\| \leq \delta. \end{aligned}$$

Значит, отображение ψ строго дифференцируемо в нуле и $\lim_{\bar{x} \rightarrow 0} \psi(\bar{x})/\|\bar{x}\| = 0$ при $\bar{x} \rightarrow 0$. Остается доказать, что $x_0 + \bar{x} + \psi(\bar{x}) \in \Omega$ при достаточно малых $\bar{x} \in K_\Omega(x_0)$. Имеем

$$g_i(x_0 + \bar{x} + \psi(\bar{x})) - g_i(x_0 + \bar{x} + \psi_i(\bar{x})) = \langle \psi(\bar{x}) - \psi_i(\bar{x}), y^* \rangle,$$

где $y^* \in \partial^0 g_i(\theta)$ а θ - некоторая точка отрезка, соединяющего точки $x_0 + \bar{x} + \psi(\bar{x})$ и $x_0 + \bar{x} + \psi_i(\bar{x})$. Поскольку $\alpha(\bar{x}) \geq \alpha_i(\bar{x})$ и $\langle y^*, w \rangle < 0$, если $\bar{x}$ достаточно близка к нулю, то имеем $g_i(x_0 + \bar{x} + \psi(\bar{x})) \leq g_i(x_0 + \bar{x} + \psi_i(\bar{x})) \leq 0$. Итак, если $\bar{x} \in K_\Omega(x_0)$ достаточно близка к нулю, то для всех $i \in I(x_0)$ выполнены неравенства $g_i(x_0 + \bar{x} + \psi(\bar{x})) \leq 0$, и поэтому $x_0 + \bar{x} + \psi(\bar{x}) \in \Omega$.

Теорема 2.3. (о пересечении строго дифференцируемых шатров). Пусть выпуклые замкнутые конусы K_1 и K_2 являются строго дифференцируемыми шатрами соответственно для множеств $M_1 \subseteq R^n$ и $M_2 \subseteq R^n$ в точке $x_0 \in M_1 \cap M_2$.

Предположим также, что

$$(2.6) \quad K_1 - K_2 = R^n.$$

Тогда конус $Q \equiv K_1 \cap K_2$ является строго дифференцируемым шатром к множеству $M \equiv M_1 \cap M_2$ в точке x_0 .

Доказательство. Сначала покажем, что существуют положительно однородные и липшицевые отображения $P_1 : R^n \rightarrow K_1$, $P_2 : R^n \rightarrow K_2$ такие, что любого $x \in R^n$ имеет место равенство:

$$(2.7) \quad x = P_1(x) - P_2(x) \quad \forall x \in R^n.$$

Положим $a(x) \equiv \{y \in K_1 : (y - x) \in K_2\}$. Имея ввиду соотношение (2.6), легко заметить, что a -многозначное отображение с выпуклым замкнутым графиком и $\text{dom}(a) = R^n$. Следовательно, в силу предложения 2.4 из [17] существует липшицево, положительно однородное отображение P_1 , такое, что $P_1(x) \in a(x) \quad \forall x \in R^n$. Положим $P_2(x) = P_1(x) - x$. Очевидно, что отображение P_2 липшицево, положительно однородно и $P_2(x) \in K_2 \quad \forall x \in R^n$. Таким образом соотношение (2.7) доказано. Итак, существуют числа $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ такие, что

$$\|P_1(x_1) - P_1(x_2)\| \leq L_1 \|x_1 - x_2\|, \quad \|P_2(x_1) - P_2(x_2)\| \leq L_2 \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in R^n.$$

Кроме того, поскольку конусы K и H являются пирамидами, то существуют отображения

$$\varphi_i(\bar{x}) \equiv x_0 + \bar{x} + r_i(\bar{x}), \quad \frac{r_i(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0, \quad i = 1, 2,$$

(отображения r_i , $i = 1, 2$ строго дифференцируемы в нуле) и число $\delta > 0$ такие, что $\varphi_i(\bar{x}) \in M_i \quad \forall \bar{x} \in Q \cap B_\delta(0)$. Теперь рассмотрим систему уравнений, записав ее в векторной форме:

$$(2.8) \quad q(\bar{x}, y) \equiv \varphi_1(\bar{x} + P_1(y)) - \varphi_2(\bar{x} + P_2(y)) = 0.$$

Имея ввиду соотношение (2.7), уравнение (2.8) принимает следующий вид:

$$(2.9) \quad q(\bar{x}, y) = y + r_1(\bar{x} + P_1(y)) - r_2(\bar{x} + P_2(y)) = 0.$$

Покажем, что уравнение (2.9) удовлетворяет всем требованиям теоремы 2.3.1 о неявных функциях (см. [1], §2.3, глава 2, стр. 161). Действительно, имеем

а) q -непрерывное отображение и $q(0, 0) = 0$.

б) Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число $\delta_1 > 0$ и окрестность U нуля такие, что если $\bar{x} \in U$ и $\|y'\| \leq \delta_1$, $\|y''\| \leq \delta_1$, то $\|q(\bar{x}, y') - q(\bar{x}, y'') - (y' - y'')\| \leq \varepsilon \|y' - y''\|$.

Следовательно, по вышеуказанной теореме существуют число $C > 0$, окрестность $\bar{V}$ нуля и отображение $y(\bar{x})$, определенное в этой окрестности, такие, что $q(\bar{x}, y(\bar{x})) = 0$ и $\|y(\bar{x})\| \leq Cq(\bar{x}, 0) \forall \bar{x} \in \bar{V}$. Отсюда следует, что

$$(2.10) \quad y(\bar{x})/\|\bar{x}\| \rightarrow 0, \text{ когда } \bar{x} \rightarrow 0.$$

Положим теперь

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi_1(\bar{x} + P_1(y(\bar{x}))) = x_0 + \bar{x} + P_1(y(\bar{x})) + r_1(\bar{x} + P_1(y(\bar{x}))) = x_0 + \bar{x} + r(\bar{x}),$$

где $r(\bar{x}) = P_1(y(\bar{x})) + r_1(\bar{x} + P_1(y(\bar{x})))$. В силу (2.10) и того, что $r_1(\bar{x}) = o(\bar{x})$, $r(\bar{x})$ обладает тем же свойством. Так как K_1, K_2 -выпуклые конусы, то имеем

$$\bar{x} + P_1(y(\bar{x})) \in K_1, \bar{x} + P_2(y(\bar{x})) \in K_2 \quad \forall \bar{x} \in Q.$$

Далее, поскольку конусы K_1 и K_2 являются шатрами соответственно для множеств M_1 и M_2 , то при достаточно малых $\bar{x} \in Q$ имеем

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi_1(\bar{x} + P_1(y(\bar{x}))) = \varphi_2(\bar{x} + P_2(y(\bar{x}))) \in M_1 \cap M_2.$$

Осталось доказать, что отображение $r(\bar{x})$ строго дифференцируемо в нуле. Для этого достаточно доказать, что таковым является отображение $y(\bar{x})$. Действительно, имеем $y(\bar{x}) + r_1(\bar{x} + P_1(y(\bar{x}))) - r_2(\bar{x} + P_2(y(\bar{x}))) = 0 \forall \bar{x} \in \bar{V}$.

Отсюда так как отображения r_i , $i = 1, 2$ строго дифференцируемы в нуле, то для заданного $\epsilon > 0$ существует окрестность $\bar{U} \subseteq \bar{V}$ нуля, такая, что для любых $x_1, x_2 \in \bar{U}$ имеем

$$\|y(\bar{x}_1) - y(\bar{x}_2)\| \leq \|r_1(\bar{x}_1 + P_1(y(\bar{x}_1))) - r_1(\bar{x}_2 + P_1(y(\bar{x}_2)))\| +$$

$$\|r_2(\bar{x}_1 + P_2(y(\bar{x}_1))) - r_2(\bar{x}_2 + P_2(y(\bar{x}_2)))\| \leq 2\epsilon(\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| + C\|y(\bar{x}_1) - y(\bar{x}_2)\|),$$

где $C = \max\{L_1, L_2\}$. Отсюда следует, что

$$\|y(\bar{x}_1) - y(\bar{x}_2)\| \leq \frac{2\epsilon}{1 - 2\epsilon C} \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|,$$

т.е. отображение $y(\bar{x})$ строго дифференцируемо в нуле. Теорема 2.3 доказана.

Следствие 2.3. Пусть множество M задано системой уравнений

$$g_i(x) = 0, \quad i \in I,$$

где I - конечное множество индексов. Пусть $x_0 \in M$ и функции $g_i(x)$ строго дифференцируемы в x_0 . Предположим также, что градиенты $g'_i(x_0)$, $i \in I$ линейно независимы. Тогда подпространство $\Pi = \{\bar{x} \in R^n : \langle g'_i(x_0), \bar{x} \rangle = 0, i \in I\}$ является строго дифференцируемым шатром к множеству M в точке x_0 .

3. О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ОТ СЕЛЕКЦИЙ
МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Утверждение 3.1. Пусть $a : R^n \rightarrow 2^{R^n}$ - отображение со звездным замкнутым графиком. Предположим, что $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a^0)$, $x_0 \in \text{int dom}(a)$ и множество $a(x_0)$ ограничено. Тогда $\text{dom}(D^{K_{\text{graf}(a)}}(x_0, y_0)) = R^n$ и существует $L > 0$ такое, что

$$(3.1) \quad D^{K_{\text{graf}(a^0)}}(x_0, y_0)(\bar{x}) \subseteq D^{K_{\text{graf}(a)}}(x_0, y_0)(\bar{x}) + L\|\bar{x}\|B_1(0) \quad \forall \bar{x} \in R^n.$$

Доказательство. Сначала покажем, что существуют окрестность $B_\delta(x_0)$ точки x_0 и константа $L > 0$ такие, что

$$(3.2) \quad a^0(\bar{x}) \subseteq a(x) + L\|x - x_0\|B_1(0) \quad \forall x \in B_\delta(x_0).$$

Так как $x_0 \in \text{int dom}(a)$, то существует число $\delta > 0$ такое, что $B_\delta(x_0) \subseteq \text{dom}(a)$. Для $x \in B_\delta(x_0)$ положим

$$\bar{x} = x_0 + \delta \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} = \left(1 - \frac{\delta}{\|x - x_0\|}\right)x_0 + \frac{\delta}{\|x - x_0\|}x.$$

Следовательно,

$$x = \frac{\|x - x_0\|}{\delta} \bar{x} + \left(1 - \frac{\|x - x_0\|}{\delta}\right)x_0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\|x - x_0\|}{\delta} a(\bar{x}) + \left(1 - \frac{\|x - x_0\|}{\delta}\right) a^0(x_0) \subseteq a(x).$$

Так что для любого $\bar{y} \in a(\bar{x})$, $y^0 \in a^0(x_0)$ имеет место включение

$$y_0 \in a(x) - \frac{\|x - x_0\|}{\delta} (\bar{y} - y_0).$$

Поскольку, по предложению 3.1 из [17] отображение a ограничено, то отсюда немедленно следует соотношение (3.2). Теперь допустим, что $y_0 \in a^0(x_0)$. Тогда для фиксированного $\bar{x} \in R^n$ и достаточно малых $\alpha > 0$ из (3.2) следует, что

$$y_0 \in a^0(x_0) \subseteq a(x_0 + \alpha \bar{x}) + L\alpha\|\bar{x}\|B_1(0).$$

Отсюда, для каждого $\alpha > 0$ найдется такой элемент $y_\alpha \in a(x_0 + \alpha \bar{x})$, что $(y_\alpha - y_0)/\alpha \in L\|\bar{x}\|B_1(0)$. Значит, существует последовательность $(y_{\alpha_n} - y_0)/\alpha_n$, сходящийся к некоторому элементу $D^{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)(\bar{x})$. Таким образом доказано, что $\text{dom}(D^{K_{\text{graf}(a)}}(x_0, y_0)) = R^n$. Теперь доказательство включения (3.1) можно проводить таким же путем как доказательство теоремы 2 из [7].

Следствие 3.1. Пусть выполнены все условия предложения 3.1. Тогда существует положительно однородное отображение $P : R^n \rightarrow R^m$ и константа $L > 0$ такие, что $P(\bar{x}) \in D^{K_{\text{ep}} f(a)}(x_0, y_0)(\bar{x})$ и $\|P(\bar{x})\| \leq L\|\bar{x}\| \quad \forall \bar{x} \in R^n$.

Утверждение 3.2. Пусть $a : R^n \rightarrow 2^{R^m}$ - отображение, график которого является такой выпуклый замкнутый конус, что $\text{dom}(a) = R^n$. Пусть $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$ ($x_0 \neq 0$). Тогда существует непрерывное и положительно однородное отображение $P : R^n \rightarrow R^m$ и константа $L > 0$ такие, что $P(x_0) = y_0$ и $P(x) \in a(x)$ и $\|P(x)\| \leq L\|x\|, x \in R^n$.

Доказательство. Известно, что (см. [11], теорема 1, глава 3, стр. 136) многозначное отображение a полунепрерывно снизу на R^n . Поэтому согласно теореме Майкла существует непрерывное отображение $z(x)$ такое, что $z(x_0) = y_0$ и $z(x) \in a(x), x \in R^n$.

Определим отображение P по правилу: $P(x) = \frac{\|x\|}{\|x_0\|} z\left(\frac{\|x_0\|}{\|x\|} x\right)$, если $x \neq 0$ и $P(0) = 0$. Легко видеть, что P положительно однородно и непрерывно. С другой стороны, поскольку график отображения a есть конус, то $P(x) \in a(x)$. Далее, если

$$L = \frac{\max_{x \in B_{\|x_0\|}(0)} \|z(x)\|}{\|x_0\|},$$

тогда $\|P(x)\| \leq L\|x\| \quad \forall x \in R^n$.

Утверждение 3.3. Пусть $a : R^n \rightarrow 2^{R^m}$ - отображение, график которого является такой выпуклый замкнутый конус, что $\text{dom}(a) = R^n$. Пусть $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$ ($x_0 \neq 0$) и для каждого $x \in R^n$ $\text{inta}(x) \neq \emptyset$. Тогда существует липшицево и положительно однородное отображение $P : R^n \rightarrow R^m$ такое, что $P(x_0) = y_0$ и $P(x) \in a(x), x \in R^n$.

Доказательство. В силу теоремы 1 из [11] (следствие 3, стр. 136) отображение a липшицево на R^n . Следовательно оно липшицево на компакте $E \equiv B_{\|x_0\|}(0)$. Поэтому согласно теореме 1.2 существует липшицева селекция z , проходящая через точку (x_0, y_0) , т.е. $z(x) \in a(x), x \in E, y(x_0) = y_0$. Рассмотрим снова отображение P , определенное в предложении 3.2. Оно липшицево на R^n (доказательство этого факта можно сделать таким же путем как доказательство предложения 4.2 из [17]). Следовательно, отображение P удовлетворяет всем требованиям нашего утверждения.

Утверждение 3.4. Пусть $a : R^n \rightarrow 2^{R^n}$ - многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми значениями и график которого является звездным множеством и пусть $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a^0)$ и $x_0 \in \text{int dom}(a^0)$.

Тогда для каждого $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{graf}(D^{K_{\text{graf}(a)}}(x_0, y_0))$ ($\bar{x} \neq 0$) найдется непрерывное и положительно однородное отображение P такое, что $P(\bar{x}) = \bar{y}$ и

$$P(\bar{x}) \in D^{K_{\text{graf}(a)}}(x_0, y_0)(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in R^n.$$

Доказательство. Согласно теореме 3.2[17] отображение a псевдoliniицево в (x_0, y_0) . Следовательно, по теореме 2 из [7] отображение $D^{K_{\text{graf}(a)}}(x_0, y_0)$ удовлетворяет условию Липшица на R^n . Следовательно, в силу следствия 2 предложения 2.1, оно имеет выпуклые значения. По известной теореме Майкла существует непрерывное отображение $z(\bar{x})$ такое, что $z(\bar{x}) = \bar{y}$, $z(\bar{x}) \in D^{K_{\text{graf}(a)}}(x_0, y_0)(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in R^n$. Положим

$$P(\bar{x}) = \frac{\|\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} z\left(\frac{\|\bar{x}\|\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right), \text{ если } \bar{x} \neq 0 \text{ и } P(0) = 0.$$

Повторяя доказательство предложения 3.2, получим требуемый результат.

Теорема 3.1. Пусть $a : R^n \rightarrow 2^{R^n}$ - многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми значениями, график которого является звездным телом. Пусть

$$(x_0, y_0) \in \text{graf}(a^0), x_0 \in \text{int dom}(a^0).$$

Тогда для любого $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{graf}(D^{K_{\text{graf}(a)}}(x_0, y_0))$ ($\bar{x} \neq 0$) существует дифференцируемое по направлению отображение y , определенное в некоторой окрестности V точки x_0 такое, что $y(x_0) = y_0$, $y(x) \in a(x) \quad \forall x \in V$.

$$y'(x_0, \bar{x}) \in D^{K_{\text{graf}(a)}}(x_0, y_0)(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in R^n, \quad y'(x_0, \bar{x}) = \bar{y}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1.1 конус $K_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$ является шатром к графику отображения a в точке (x_0, y_0) . Это означает, что существует отображение $r(\bar{z}) \equiv r(\bar{x}, \bar{y}) = (r_1(\bar{x}, \bar{y}), r_2(\bar{x}, \bar{y})) = o(\bar{z})$, определенное в некоторой окрестности U нуля, такое, что $z_0 + \bar{z} + r(\bar{z}) \in \text{graf}(a)$ для $\bar{z} \in K_{\text{graf}(a)}(z_0) \cap U$, т.е.

$$y_0 + \bar{y} + r_2(\bar{x}, \bar{y}) \in a(x_0 + \bar{x} + r_1(\bar{x}, \bar{y})) \quad \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in K_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0) \cap U.$$

Здесь, вместо $\bar{y}$ поставим $P(\bar{x})$, определенное в предложении 3.4. После постановки для достаточно малых $\bar{x}$ получим

$$(3.3) \quad y_0 + P(\bar{x}) + r_2(\bar{x}, P(\bar{x})) \in a(x_0 + \bar{x} + r_1(\bar{x}, P(\bar{x}))).$$

Так как a является псевдодифференцируемым в точке (x_0, y_0) , то из (3.3) следует, что найдется константа $L > 0$ и окрестность нуля $\bar{V}$ такие, что

$$(3.4) \quad y_0 + P(\bar{x}) + r_2(\bar{x}, P(\bar{x})) \in a(x_0 + \bar{x}) + L\|r_1(\bar{x}, P(\bar{x}))\|B_1(0) \quad \forall \bar{x} \in \bar{V}.$$

Поскольку $r_1(\bar{x}, P(\bar{x})) = o(\bar{x})$ и $r_2(\bar{x}, P(\bar{x})) = o(\bar{x})$, то из (3.4) следует, что существует такое отображение $r_3(\bar{x}) = o(\bar{x})$, что

$$y_0 + P(\bar{x}) + r_3(\bar{x}) \in a(x_0 + \bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in \bar{V}.$$

Таким образом, если $V = x_0 + \bar{V}$, то положим $y(x) \equiv y_0 + P(x - x_0) + r_3(x - x_0)$, $x \in V$. Легко заметить, что отображение y удовлетворяет всем требованиям теоремы.

Теорема 3.2. Пусть $a : R^n \rightarrow 2^{R^m}$ - многозначное отображение и выпуклый замкнутый конус $K \subseteq K_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$ является строго дифференцируемым шатром к $\text{graf}(a)$ в точке (x_0, y_0) . Предположим также, что $\text{dom}(D^K a(x_0, y_0)) = R^n$ и для каждого $\bar{x} \in R^n$ $\text{int} D^K a(x_0, y_0)(\bar{x}) \neq \emptyset$.

Тогда для любого $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$ ($\bar{x} \neq 0$)

1. существует липшицево отображение y , определенное в некоторой окрестности V точки x_0 такое, что $y(x) \in a(x)$, $\forall x \in V$, $y(x_0) = y_0$. 2. Существует производная $y'(x_0, \bar{x})$ по каждому направлению $\bar{x}$. Она липшицева по переменной $\bar{x}$ на R^n и $y'(x_0, \bar{x}) \in D^K a(x_0, y_0)(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in R^n$, $y'(x_0, \hat{x}) = \hat{y}$.

Доказательство. По предложению 3.3 существует положительно однородное и липшицево отображение P такое, что $P(\bar{x}) \in D^K a(x_0, y_0)(\bar{x})$, $\bar{x} \in R^n$, $P(\bar{x}) = \bar{y}$. Так как выпуклый конус K является строго дифференцируемым шатром к $\text{graf}(a)$ в точке (x_0, y_0) , то существует строго дифференцируемое в нуле отображение $r(\bar{z}) \equiv (r_1(\bar{z}, \bar{y}), r_2(\bar{z}, \bar{y})) = o(\bar{z})$ такое, что для достаточно малых $\bar{z} \in K$ имеет место включение: $y_0 + \bar{y} + r_2(\bar{z}, \bar{y}) \in a(x_0 + \bar{z} + r_1(\bar{z}, \bar{y}))$.

Покажем, что уравнение

$$q(\bar{x}, u) \equiv u + r_1(\bar{x} + u, P(\bar{x} + u)) = 0$$

удовлетворяет всем требованиям вышеуказанной теоремы 2.3.1 из [1] о неявных функциях. Действительно, имеем

а) q -непрерывное отображение и $q(0, 0) = 0$.

б) Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число $\delta > 0$ и окрестность U нуля такие, что если $\bar{x} \in U$ и $\|u'\| \leq \delta$, $\|u''\| \leq \delta$, то $\|q(\bar{x}, u') - q(\bar{x}, u'') - (u' - u'')\| \leq \varepsilon\|u' - u''\|$. Следовательно, согласно вышеуказанной теореме существуют число $C > 0$,

окрестность $\bar{V}$ нуля и отображение $u(\bar{x})$, определенное в этой окрестности, такие, что $q(\bar{x}, u(\bar{x})) = 0$ и $\|u(\bar{x})\| \leq Cq(\bar{x}, 0)$, $\bar{x} \in \bar{V}$. Отсюда следует, что $u(\bar{x})/\|\bar{x}\| \rightarrow 0$ когда $\bar{x} \rightarrow 0$. Можно доказать (как это было сделано при доказательстве теоремы 2.3), что отображение $u(\bar{x})$ строго дифференцируемо в нуле. Положим $h(\bar{x}) = (\bar{x} + u(\bar{x}), P(\bar{x} + u(\bar{x})))$. Очевидно, что $h(\bar{x}) \in K$. Следовательно, при достаточно малых $\bar{x}$

$$y_0 + P(\bar{x} + u(\bar{x})) + r_2(h(\bar{x})) \in a(x_0 + \bar{x} + u(\bar{x}) + r_1(h(\bar{x}))) = a(x_0 + \bar{x}).$$

Поэтому, если положим

$$V = x_0 + \bar{V}, \quad y(x) = y_0 + P(x - x_0 + u(x - x_0)) + r_2(h(x - x_0)) \quad \forall x \in V,$$

то легко заметить, что отображение y липшицево и удовлетворяет всем требованиям теоремы.

Следствие 3.2. Пусть многозначное отображение a задано при помощи систем неравенств: $a(x) = \{y \in R^m / g_i(x, y) \leq 0, i \in I\}$, где I — конечное множество индексов.

Пусть $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$ и функции g_i , $i \in I$ строго дифференцируемы в (x_0, y_0) . Положим $I(x_0, y_0) = \{i \in I / g_i(x_0, y_0) = 0\}$. Предположим также, что существует вектор $w \in R^n$ такой, что

$$(3.5) \quad \langle g'_{iy}(x_0, y_0), w \rangle < 0, \quad i \in I(x_0, y_0).$$

При условии (3.5) по теореме 1.12 из [5] (§1, гл. 4, стр. 140) для любого фиксированного $\bar{x} \in R^n$ система

$$\langle g'_{iy}(x_0, y_0), \bar{y} \rangle + \langle g'_{ix}(x_0, y_0), \bar{x} \rangle < 0, \quad i \in I(x_0, y_0)$$

разрешима относительно $\bar{y}$, т.е. $\text{int} D^K a(x_0, y_0)(\bar{x}) \neq \emptyset$. При сделанных предположениях согласно теореме 2.2 выпуклый конус

$$K = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in R^{n+m} / \langle g'_{iy}(x_0, y_0), \bar{y} \rangle + \langle g'_{ix}(x_0, y_0), \bar{x} \rangle \leq 0, i \in I(x_0, y_0)\}$$

является строго дифференцируемым шатром к $\text{graf}(a)$ в точке (x_0, y_0) . Теперь используя результат теоремы 3.2 получим следующее утверждение.

Теорема 3.3. (о неявных функциях для систем неравенств). Пусть выполнены вышеуказанные предположения. Тогда для каждого $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$, $(\bar{x} \neq 0)$.

1. существует липшицево отображение y , определенное в некоторой окрестности V точки x_0 такое, что $g_1(x, y(x)) \leq 0, \forall x \in V, y(x_0) = y_0 >$.

2. Существует производная $y'(x_0, \bar{x})$ по каждому направлению $\bar{x}$. Она липшицева по переменной $\bar{x}$ на R^n и $y'(x_0, \bar{x}) \in D^K a(x_0, y_0)(\bar{x}) \forall \bar{x} \in R^n, y'(x_0, \bar{x}) = \bar{y}$.

Теорема 3.4. Пусть $a : R^n \rightarrow 2^{R^m}$ - многозначное отображение, график которого есть замкнутое тело. Пусть K - касательный конус Кларка (см. [11], определение 3. §1, глава 7, стр. 397) к множеству $\text{graf}(a)$ в точке $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$. Предположим также, что $\text{dom}(D^K a(x_0, y_0)) = R^n$.

Тогда для любого $(\bar{x}, \bar{y}) \in K(\bar{x} \neq 0)$

1. существует отображение y , определенное в некоторой окрестности V точки x_0 такое, что $y(x) \in a(x), \forall x \in V, y(x_0) = y_0$. 2. Существует производная $y'(x_0, \bar{x})$ по каждому направлению $\bar{x}$. Она липшицева по переменной $\bar{x}$ на R^n и

$$y'(x_0, \bar{x}) \in D^K a(x_0, y_0)(\bar{x}) \forall \bar{x} \in R^n, y'(x_0, \bar{x}) = \bar{y}.$$

Доказательство. При сделанных предположениях по теореме 2 [11] (§5, глава 7, стр. 418) многозначное отображение a псевдολипшицево в точке (x_0, y_0) . А по теореме 4.3 [17] конус K является липшицевым шатром к множеству $\text{graf}(a)$ в точке (x_0, y_0) . Заметим также, что для каждого $\bar{x} \in R^n \text{int} D^K a(x_0, y_0)(\bar{x}) \neq \emptyset$. Тогда по предложению 3.3 существует липшицево и положительно однородное отображение $P : R^n \rightarrow R^m$ такое, что $P(\bar{x}) = \bar{y}$ и $P(\bar{x}) \in D^K a(x_0, y_0)(\bar{x}) \forall \bar{x} \in R^n$. Теперь повторяя доказательство теоремы 3.1 получим требуемый результат. $\square$

Отметим, что в вышеуказанных предположениях существенным требованием является условие: $\text{dom}(a) = R^n$. Поэтому важным является следующее утверждение.

Теорема 3.5. Пусть $a_1 : R^n \rightarrow 2^{R^m}, a_2 : R^n \rightarrow 2^{R^m}$ - многозначные отображения, графики которых являются такие выпуклые замкнутые конусы K_1, K_2 , что $\text{dom}(a_1) = \text{dom}(a_2) = R^n$. Предположим также, что $\text{int} a_1(0) \cap a_2(0) \neq \emptyset$. Тогда $\text{dom}(a_1 \cap a_2) = R^n$.

Доказательство. Положим $K = K_1 \cap K_2, a(x) = a_1(x) \cap a_2(x), x \in R^n$. В работе [5] (см. теорема 2.2. §2) доказано, что условия $\text{dom}(a_1) = R^n, \text{dom}(a_2) = R^n$ эквивалентны условиям $a_1^*(0) = a_2^*(0) = \{0\}$. Так как $\text{int} a_1(0) \cap a_2(0) \neq \emptyset$, то для некоторого вектора u имеют место: $u \in \text{int} a_1(0), u \in a_2(0)$. Поэтому, в силу

теоремы 5.9 из [15], глава 5, стр. 155

$$(0, u) \in \text{intgraf}(a_1) \cap \text{graf}(a_2) = \text{int}K_1 \cap K_2.$$

Отсюда, в силу теоремы 3.2 (см. [5], §3, глава 1) имеем $K^* = (K_1 \cap K_2)^* = K_1^* + K_2^*$. Поэтому $a^*(0) = \{x^* : (-x^*, 0) \in K^* = K_1^* + K_2^*\}$. Это означает, что существуют векторы $(x_1^*, y_1^*) \in K_1$, $(x_2^*, y_2^*) \in K_2$, такие, что $-x^* = x_1^* + x_2^*$, $y_1^* + y_2^* = 0$. Поскольку $u \in \text{int}a_1(0)$, то существует окрестность $B_\delta(u)$, такая, что $(0, v) \in K_1 \forall v \in B_\delta(u)$. Значит, $\langle x_1^*, 0 \rangle + \langle y_1^*, v \rangle \geq 0$, т.е.

$$(3.6) \quad \langle y_1^*, u \rangle + \langle y_1^*, w \rangle \geq 0 \quad \forall w \in B_\delta(0).$$

С другой стороны, поскольку $(0, u) \in K$, то $\langle u, y_1^* \rangle \geq 0$, $\langle u, y_2^* \rangle \geq 0$. Поскольку $y_1^* = -y_2^*$, то отсюда следует, что $\langle y_1^*, u \rangle = 0$. Учитывая это и соотношение (3.6), получим $\langle y_1^*, w \rangle \geq 0 \quad \forall w \in B_\delta(0)$. Отсюда немедленно следует, что $y_1^* = 0$. Следовательно, $y_2^* = 0$. Окончательно, получаем $a^*(0) = \{0\}$.

Следствие 3.3. Пусть $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, k$ выпуклые и положительно однородные функции, определенные на R^n а $g(x)$ линейная функция. Пусть существует вектор w такой, что $f_i(w) < 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, $g(w) = 0$. Тогда для любого вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}) \in R^{k+1}$ система

$$f_i(x) \leq \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad g(x) = \alpha_{k+1}$$

разрешима.

4. О СЕЛЕКЦИЯХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ВЫПУКЛЫМИ ЗАМКНУТЫМИ ГРАФИКАМИ

Теорема 4.1. Пусть $a : R^n \rightarrow 2^{R^n}$ -отображение с выпуклым замкнутым графиком определено в некоторой окрестности U точки x_0 . Пусть $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$. Тогда

1. существуют число $L > 0$ и отображение y , определенное в некоторой окрестности $\bar{U} \subseteq U$ точки x_0 , такие, что $y(x) \in a(x)$, $x \in \bar{U}$, $y(x_0) = y_0$ и

$$\|y(x_1) - y(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|^{1/2} \quad \forall x_1, x_2 \in \bar{U}.$$

2. Существует производная $y(x_0, \bar{x})$ по каждому направлению $\bar{x}$. Она липшицева по $\bar{x}$ на R^n и $y(x_0, \bar{x}) \in D^{K_{a(a)}}(x_0, y_0)(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in R^n$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $b: R^n \rightarrow 2^{R^n}$, определенное по праву: $b(x) \equiv a(x) \cap B_1(y_0) \forall x \in U$. Поскольку a является полунепрерывным снизу отображением, то существует окрестность $\bar{U} \subseteq U$ такая, что $b(x) \neq \emptyset \forall x \in \bar{U}$. Отсюда b - выпуклое отображение с выпуклыми компактными значениями. Следовательно, оно является липшицевым отображением с некоторой константой L_1 (см. [5], теорема 1.2, стр. 100). Значит, $\text{dom}(D^{K_{\text{graf}(b)}}(x_0, y_0)) = R^n$ (см. предложение 3.1). В силу теоремы 1.1 конус $K_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$ является шатром к множеству $\text{graf}(a)$ в точке (x_0, y_0) . Легко заметить, что $K_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0) = K_{\text{graf}(b)}(x_0, y_0)$. Отсюда, существует отображение $r(\bar{z}) = r(\bar{x}, \bar{y}) \equiv (r_1(\bar{x}, \bar{y}), r_2(\bar{x}, \bar{y})) = o(\bar{z})$ такое, что для достаточно малых $(\bar{x}, \bar{y}) \in K_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$ имеет место включение:

$$(4.1) \quad y_0 + \bar{y} + r_2(\bar{x}, \bar{y}) \in b(x_0 + \bar{x} + r_1(\bar{x}, \bar{y}))$$

Так как b липшицево отображение, то из (4.1) немедленно следует, что для заданного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $(\bar{x}, \bar{y}) \in K_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0) \cap B_\delta(0)$ имеет место включение:

$$(4.2) \quad y_0 + \bar{y} \in b(x_0 + \bar{x}) + \varepsilon \sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2} B_1(0).$$

Заметим также, что отображение $D^{K_{\text{graf}(a)}}(x_0, y_0)$ удовлетворяет условию Липшица. Пусть z_s -селектор Штейнера для отображения $D^{K_{\text{graf}(a)}}(x_0, y_0)$. Известно (см. например [10], лемма 2.1.4, стр. 192), что это отображение удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L_2 . Определим отображение P по следующему правилу: $P(\bar{x}) = \|\bar{x}\| z_s(\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|})$, если $\bar{x} \neq 0$ и $P(0) = 0$. Очевидно, что $P(\bar{x}) \in D^{K_{\text{graf}(a)}}(x_0, y_0)(\bar{x}) \forall \bar{x}$ и $P(\lambda \bar{x}) = \lambda P(\bar{x})$ при $\lambda \geq 0$. Покажем, что отображение P удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой $L_3 > 0$. Действительно, имеем

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \|P(\bar{x}_1) - P(\bar{x}_2)\| &\leq \|\bar{x}_1\| \left\| z_s\left(\frac{\bar{x}_1}{\|\bar{x}_1\|}\right) - z_s\left(\frac{\bar{x}_2}{\|\bar{x}_2\|}\right) \right\| + \left\| z_s\left(\frac{\bar{x}_2}{\|\bar{x}_2\|}\right) \right\| (\|\bar{x}_1\| - \|\bar{x}_2\|) \leq \\ &\leq \|\bar{x}_1\| L_2 \left| \frac{\|\bar{x}_1\|}{\|\bar{x}_1\|} - \frac{\|\bar{x}_2\|}{\|\bar{x}_2\|} \right| + C \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \leq (2L_2 + C) \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|, \end{aligned}$$

где $C = \max_{\bar{x} \in B_1(0)} \|z_s(\bar{x})\|$. Из соотношений (4.2)-(4.3) следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$y_0 + P(\bar{x}) \subseteq b(x_0 + \bar{x}) + \varepsilon \sqrt{\|\bar{x}\|^2 + \|P(\bar{x})\|^2} B_1(0) \subseteq b(x_0 + \bar{x}) + \varepsilon \sqrt{1 + L_3^2} \|\bar{x}\| B_1(0)$$

$\forall \bar{x} \in B_\delta(0)$. Пусть $y(x) = Pr_{b(x)}(y_0 + P(x - x_0))$. Для каждого $\bar{x}$, $\|\bar{x}\| = 1$ имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \lambda \bar{x}) - y_0}{\lambda} = P(\bar{x}).$$

Осталось доказать, что отображение y удовлетворяет условию Гельдера. В работе [15] (определение 4(11), стр. 134) определено ρ -расстояние между множествами C и D следующим образом:

$$\hat{d}_\rho(C, D) \equiv \inf \{ \eta \geq 0 : C \cap B_\rho(0) \subseteq D + B_\eta(0), D \cap B_\rho(0) \subseteq C + B_\eta(0) \}.$$

Доказано (см. [15], упражнение 7.67, стр. 290), что, если множества C и D - выпуклые компакты и $y(x)$ - непрерывное отображение на $B_\delta(0)$, то существует число $\rho > 0$ такое, что

$$\|Pr_{Cy}(x) - Pr_{Dy}(x)\| \leq 3\rho^{1/2} \hat{d}_\rho^{1/2}(C, D) \quad \forall x \in B_\delta(x_0).$$

Так как b - липшицево отображение с некоторой константой L_3 и множество $b(x)$ - компакт, то число ρ можно выбрать настолько большим, что $b(x) \subseteq B_\rho(0)$, $x \in B_\delta(x_0)$. Итак, если $x_1, x_2 \in B_\delta(x_0)$, то

$$\begin{aligned} \|y(x_1) - y(x_2)\| &= \|Pr_{b(x_1)}(y_0 + P(x_1 - x_0)) - Pr_{b(x_2)}(y_0 + P(x_2 - x_0))\| \leq \\ &\leq \|Pr_{b(x_1)}(y_0 + P(x_1 - x_0)) - Pr_{b(x_1)}(y_0 + P(x_2 - x_0))\| + \\ &+ \|Pr_{b(x_1)}(y_0 + P(x_2 - x_0)) - Pr_{b(x_2)}(y_0 + P(x_2 - x_0))\| \leq \\ &\leq L_3 \|x_1 - x_2\| + 3\rho^{1/2} \hat{d}_\rho^{1/2}(b(x_1), b(x_2)) \leq \|x_1 - x_2\|^{1/2} (L_3 \|x_1 - x_2\|^{1/2} + 3(L_1\rho)^{1/2}) \\ &\leq ((2\delta)^{1/2} L_3 + 3(L_1\rho)^{1/2}) \|x_1 - x_2\|^{1/2} \leq L \|x_1 - x_2\|^{1/2}, \end{aligned}$$

где $L = ((2\delta)^{1/2} L_3 + 3(L_1\rho)^{1/2})$.

Abstract. The paper is devoted to the question of existence of directional derivatives of selections of some set-valued mappings with starlike graphs.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, Оптимальное Управление, Москва, Наука (1979).
- [2] В. Г. Болтянский, Оптимальное Управление Дискретными Системами, Москва, Наука (1973).
- [3] В. Г. Болтянский, "Метод шатров в теории экстремальных задач", УМН, **30**, no. 3, 3 - 55 (1975).
- [4] Ф. Кларк, Негладкая Оптимизация, Москва, Наука (1988).
- [5] Б. Н. Пшеничный, Выпуклый Анализ и Экстремальные Задачи, Москва, Наука (1982).
- [6] Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, "О необходимых условиях экстремума для негладких функций", Известия НАН Армении, Математика, **18**, no. 4, 318 - 325 (1983).
- [7] Е. С. Половинкин, "О некоторых свойствах производных многозначных отображений", ТРУДЫ МФТИ, **4**, no. 4, 144 - 154 (2012).

- [8] Е. С. Половинкин, Теория Многозначных Отображений, Москва, Изд-во МФТИ (1983).
- [9] Е. С. Половинкин, Многозначный Анализ и Дифференциальные Включения, Москва, Физматлит (2014).
- [10] Е. С. Половинкин, М. В. Баланов, Элементы Выпуклого и Сильно Выпуклого Анализа, Москва, Физматлит (2004).
- [11] Ж. П. Обен, И. Экланд, Прикладной Нелинейный Анализ, Москва, Наука (1988).
- [12] J.-P. Aubin, "Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear and differential inclusions", *Advances in Math. Suppl. Studies*, Acad. Press, 160 – 272 (1981).
- [13] E. Michael, "Continuous selections", *Ann. Math.*, **63**, 281 – 361 (1956).
- [14] К. Лейхтвейс, Выпуклые Множества, Москва, Наука (1985).
- [15] R. T. Rockafellar, J. B. Wets, *Variational Analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1997).
- [16] А. Р. Хачатрян, "Представление липшицевых многозначных отображений", *Известия НАН Армении. Математика*, **39**, no. 3, 61 – 71 (2004).
- [17] Р. А. Хачатрян, "О многозначных отображениях со звездными графиками", *Известия НАН Армении. Математика*, **47**, no. 1, 51 – 78 (2012).

Поступила 29 июня 2015