

**О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С
НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ
МАЖОРАНТАМИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ**

А. М. ДЖРВАШЯН, ДЖ. Э. РЕСТРЕПО

Institute of Mathematics, University of Antioquia, Medellin, Colombia
E-mail: antmeh_jerbashian@yahoo.com; cocojoel89@yahoo.es

Аннотация. Введены некоторые ω -весовые классы гармонических в верхней полуплоскости функций, найдены представления этих классов. Дано описание граничных значений функций из рассматриваемых классов посредством понятия ω -емкости, в частном случае переходящего в аналог α -емкости Фростмана.

MSC2010 numbers: 31A05, 31A20.

Ключевые слова: гармонические функции; граничное поведение.

1. ВВЕДЕНИЕ

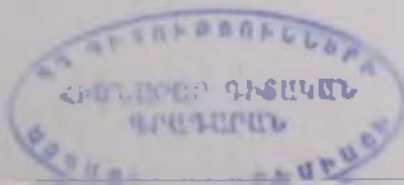
Данная статья частично распространяет на случай полуплоскости результаты [1, 2], относящиеся к граничным свойствам подклассов мероморфных функций ω -ограниченного вида в единичном круге. А именно, подобные результаты получены для некоторых ω -весовых классов гармонических функций с неотрицательными гармоническими мажорантами в верхней полуплоскости. Кроме того, в статье дано ω -весовое, гармоническое расширение результатов [3], относящихся к факторизации и граничным значениям мероморфных функций α -ограниченного вида в полуплоскости.

Ниже рассматриваются некоторые классы гармонических в G^+ функций, чьи частные ω -производные принадлежат классу $\mathcal{N}^{\omega}$ Е. Д. Соломенцева [4], т. е. удовлетворяют условию

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+iy)| dx < +\infty.$$

Для введения отмеченных производных, всюду ниже будем полагать, что $\omega(x)$ - функция класса Ω , т. е. $\omega(x) > 0$, неубывает на $(0, +\infty)$ и

$$\omega(x) \asymp x^{\alpha} \quad \text{при некотором} \quad -1 < \alpha < 0 \quad \text{и любом} \quad x \geq \Delta_0 > 0$$



($\omega(x) \asymp x^\alpha$ означает, что $C_1 x^\alpha \leq \omega(x) \leq C_2 x^\alpha$ с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2). Кроме того, полагаем, что

$$\omega_1(x) \equiv \int_0^x \omega(t) dt < +\infty, \quad 0 < x < +\infty.$$

Отметим, что в Ω в частности содержатся все функции вида $\omega(x) = x^\alpha$ при $-1 < \alpha < 0$.

Полагая, что $\omega(x) \in \Omega$ и функция $u(z)$ задана в G^+ , формально введем оператор

$$(1.1) \quad L_\omega u(z) = -L_{\omega_1} \frac{\partial}{\partial y} u(z),$$

где

$$(1.2) \quad L_{\omega_1} u(z) = \int_0^{+\infty} u(z + i\lambda) d\omega_1(\lambda)$$

- оператор, рассмотренный в [5]. Отметим, что в [5] рассмотрено также некое ядро типа Коши, связанное с оператором (1.2), с неубывающим на $(0, +\infty)$ функциональным параметром $\omega(x)$. Легко видеть, что интегрированием по частям в знаменателе подынтегрального выражения ядра из [5] получаем

$$(1.3) \quad C_\omega(z) \equiv \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{dt}{I_\omega(t)}, \quad I_\omega(t) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda} \omega(\lambda) d\lambda.$$

Всюду ниже будем пользоваться именно этим определением ядра $C_\omega(z)$, что, между прочим, применимо и в случае неубывающего функционального параметра $\omega(x)$, рассмотренного в [5].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Начнем с некоторых свойств ядра $C_\omega(z)$.

Лемма 2.1. Если $\omega(x) \in \Omega$, то функция $C_\omega(z)$ голоморфна в G^+ , и при любом $\rho > 0$ существует постоянная $M_{\rho, \omega} > 0$, зависящая только от ρ и ω , такая, что

$$(2.1) \quad |C_\omega(x + iy)| \leq \frac{M_{\rho, \omega}}{y^{1+\alpha}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y > \rho.$$

Доказательство. Пусть $0 < \rho < y < +\infty$ -любые числа. Тогда при $0 < t < 1/\Delta_0$

$$\left| \frac{e^{i(x+iy)t}}{I_\omega(t)} \right| = \frac{e^{-yt}}{t \int_0^{+\infty} e^{-xt} \omega(x) dx} \leq \frac{1}{C_1} \frac{e^{-\rho t}}{t \int_{1/t}^{+\infty} e^{-xt} x^\alpha dx} \leq \frac{1}{C_1} \frac{e^{-\rho t} t^\alpha}{\int_1^{+\infty} e^{-\lambda} \lambda^\alpha d\lambda},$$

а при $1/\Delta_0 < t < +\infty$

$$\left| \frac{e^{i(x+iy)t}}{I_\omega(t)} \right| = \frac{e^{-yt}}{t \int_0^{+\infty} e^{-xt} \omega(x) dx} \leq \frac{1}{\omega(\Delta_0)} \frac{e^{-\rho t}}{t \int_0^{\Delta_0} e^{-xt} dx} \leq \frac{1}{\omega(\Delta_0)} \frac{e^{-\rho t}}{1 - e^{-t\Delta_0}}.$$

Таким образом, при любом $\rho > 0$ подынтегральное выражение в (1.3) имеет суммируемую мажоранту. Тем самым, интеграл (1.3) равномерно сходится в полуплоскости $y > \rho$, и $C_\omega(z)$ голоморфно в G^+ . Кроме того, аналогично получаем, что для достаточно большого $y > 0$ и любого $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\begin{aligned} |C_\omega(z)| &\leq \frac{1}{C_2} \int_0^{1/\Delta_0} \frac{e^{-y^t t^\alpha} dt}{\int_1^{+\infty} e^{-\lambda} \lambda^\alpha d\lambda} + \frac{1}{\omega(\Delta_0)} \int_{1/\Delta_0}^{+\infty} \frac{e^{-y^t t^\alpha} dt}{1 - e^{-t\Delta_0}} \\ &\leq \frac{1}{C_3} \int_0^{1/\Delta_0} e^{-y^t t^\alpha} dt + \frac{1}{C_4 \omega(\Delta_0)} \int_{1/\Delta_0}^{+\infty} e^{-y^t t^\alpha} dt \\ &\leq \frac{1}{y^{1+\alpha} C_3} \int_0^{y/\Delta_0} e^{-u} u^\alpha du + \frac{1}{y C_4 \omega(\Delta_0)} \int_{y/\Delta_0}^{+\infty} e^{-u} du \leq \frac{K_\omega}{y^{1+\alpha}}, \end{aligned}$$

где $K_\omega > 0$ - постоянная, зависящая только от ω , т. е. верна оценка (2.1). $\square$

В частном случае $\omega(x) = x^\alpha$, $-1 < \alpha < 0$, как нетрудно убедиться,

$$C_\omega(z) \equiv C_\alpha(z) = \frac{1}{(-iz)^{1+\alpha}} \quad \text{и} \quad C_\omega(z) \Big|_{\omega(\tau) \equiv 1} = \frac{1}{-iz}, \quad z \in G^+,$$

т. е. $C_\omega(z)$ переходит в обыкновенное ядро Коши. Кроме того,

$$L_\omega C_\omega(z) = \frac{1}{-iz}, \quad z \in G^+.$$

Действительно, если $\omega(x) \in \Omega$, то по теореме Фубини

$$\begin{aligned} L_\omega C_\omega(z) &= -L_{\omega_1} \frac{\partial}{\partial y} C_\omega(z) = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} C_\omega(z + i\sigma) d\omega_1(\sigma) = \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{i(z+i\sigma)t} dt}{t \int_0^{+\infty} e^{-tx} d\omega_1(x)} \right) d\omega_1(\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{iz\sigma} \frac{\int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} d\omega_1(\sigma)}{\int_0^{+\infty} e^{-tx} d\omega_1(x)} dt = \frac{1}{-iz}. \end{aligned}$$

2.2. Для применения L_ω к другим функциям нужны некоторые определения.

Определение 2.1. Область $G \subseteq \mathbb{C}$ назовем ∞ -звездобразной, если вместе с любой точкой $z \in G$ в G содержится также интервал $z + ih$, $0 < h < +\infty$.

Определение 2.2. Функция $u(z)$, заданная в ∞ -звездобразной области G , принадлежит классу M_ω ($\omega(x) \in \Omega$), если существует угловая область $\Delta(\delta_0, R_0) = \{z : |\pi/2 - \arg z| \leq \delta_0, |z| \geq R_0\}$ с какими-либо $0 < \delta_0 \leq \pi/2$ и $0 < R_0 < +\infty$, такая, что

$$(2.2) \quad \sup_{z \in K} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} u(z + i\sigma) \right| \omega(\sigma) d\sigma < +\infty$$

для любого компакта $K \subset G \cap \Delta(\delta_0, R_0)$.

Лемма 2.2. Если $\omega(x) \in \Omega$, а функция $u(z) \in M_\omega$ гармонична в ∞ -звездобразной области G , то также функция $L_\omega u(z)$ гармонична в G .

Доказательство. Если K - какой-либо компакт в G , то при некотором $d_0 > 0$ компакт $K_0 = K + id_0$ содержится внутри области $G \cap \Delta(\delta_0, R_0)$. Тем самым, при любом $z \in K$ для функции $u_1(z) \equiv \frac{\partial}{\partial y} u(x + iy)$ получаем

$$L_{\omega_1} |u_1(z)| = \int_0^{d_0} \left| \frac{\partial}{\partial y} u(z + i\sigma) \right| \omega(\sigma) d\sigma + \int_{d_0}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} u(z + i\sigma) \right| \omega(\sigma) d\sigma \equiv I_1 + I_2,$$

где

$$\sup_{z \in K} I_1 \leq \max_{z \in K, 0 \leq \sigma \leq d_0} |u_1(z + i\sigma)| \int_0^{d_0} \omega(\sigma) d\sigma < +\infty,$$

а по (2.2)

$$\begin{aligned} \int_{d_0}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} u(z + i\sigma) \right| \omega(\sigma) d\sigma &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} u(z + id_0 + i\sigma) \right| \omega(\sigma + d_0) d\sigma \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} u((z + id_0) + i\sigma) \right| \omega(\sigma) d\sigma \leq \sup_{z \in K_0} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} u(z + i\sigma) \right| \omega(\sigma) d\sigma < +\infty, \end{aligned}$$

поскольку функция $\omega(x)$ невозрастающая. Отсюда, применением теоремы Фубини заключаем, что для любого $z \in G$ и достаточно малого $r > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{\omega} u(z + re^{i\theta}) d\theta &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{\omega_1} \frac{\partial}{\partial y} u(z + re^{i\theta}) d\theta = \\ &= -\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} u(z + re^{i\theta} + i\lambda) d\theta \right) d\omega_1(\lambda) = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} u(z + i\lambda) d\omega_1(\lambda) = L_{\omega} u(z). \end{aligned}$$

Таким образом, функции $L_{\omega} u(z)$ гармонична во всей области G . $\square$

Для доказательства того, что оператор L_{ω} - взаимнооднозначное отображением на некотором классе гармонических в ∞ -звездообразно области функций, понадобится приведенный ниже результат, который является базовым для установленных в дальнейшем представлений.

Теорема 2.1. (Е. Д. Соломенцев [4]). *Класс $\mathcal{N}^m$ субгармонических в G^+ функций $u(z)$ подчиненных условию*

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x + iy)| dx < +\infty$$

совпадает с множеством функций представимых в виде

$$u(z) = \iint_{G^+} \log \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right| d\nu(\zeta) + \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(x - t)^2 + y^2}, \quad z = x + iy \in G^+,$$

где $\mu(t)$ - функция ограниченного изменения на $(-\infty, +\infty)$, а $\nu(\xi) \geq 0$ - борелевская мера на G^+ такая, что

$$\iint_{G^+} \operatorname{Im} \zeta d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Лемма 2.3. Пусть ∞ -звездообразная область G содержит все полуплоскости $G_\rho^+ = \{z = x + iy : y > \rho\}$ с $\rho \geq \rho_0$, где $\rho_0 > 0$ фиксировано. Тогда оператор L_ω является взаимнооднозначным отображением, с точностью до слагаемого $a_0 + a_1 x$ с вещественными постоянными a_0, a_1 , на множество гармонических в G функций $u(x + iy) \in M_\omega$, подчиненных условию

$$(2.3) \quad \sup_{y > \rho_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} u(x + iy) \right| dx < +\infty.$$

Доказательство. При выполнении условия (2.3) гармоническая в G функции $u_1(z) = \frac{\partial}{\partial y} u(x + iy)$ принадлежит классу $\mathcal{H}^n$ в G_ρ^+ при любом $\rho > \rho_0$. Тем самым, из теоремы 2.1 следует, что при любом $z \in G_\rho^+$

$$\begin{aligned} u_1(z) &= \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_1(t + i\rho)}{t + i\rho - z} dt = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t + i\rho) dt \int_0^{+\infty} e^{i(z - i\rho - t)\sigma} d\sigma \\ &= \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{i(z - i\rho)\sigma} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\sigma} u_1(t + i\rho) dt \right] d\sigma \equiv \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{i(z - i\rho)\sigma} \varphi(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

где ввиду (2.3) функция $\varphi(\sigma)$ ограничена в $0 \leq \sigma < +\infty$. Поэтому

$$\begin{aligned} L_\omega u(z) &= -L_{\omega_1} \frac{\partial}{\partial y} u(x + iy) = - \int_0^{+\infty} u_1(z + i\lambda) d\omega_1(\lambda) \\ &= -\operatorname{Re} \int_0^{+\infty} d\omega_1(\lambda) \int_0^{+\infty} e^{i(z + i\lambda - i\rho)\sigma} \varphi(\sigma) d\sigma \\ &= -\operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{i(z - i\rho)\sigma} \left[\varphi(\sigma) \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} d\omega_1(\lambda) \right] d\sigma \end{aligned}$$

для любого $z = x + iy \in G_\rho^+$, где преобразование Лапласа

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{i(z - i\rho)\sigma} \left[\varphi(\sigma) \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} d\omega_1(\lambda) \right] d\sigma$$

является голоморфной в G_ρ^+ функцией, а из тождества $L_\omega u(z) \equiv 0$ в полуплоскости G_ρ^+ ($\rho > \rho_0$) следует, что $F(z) \equiv iC$ где C - вещественная постоянная.

Теперь заметим, что функции $\varphi(\sigma)$ ограничена в $0 \leq \sigma < +\infty$, а ввиду свойства $\omega(\lambda)$ функция

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} d\omega_1(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} \omega(\lambda) d\lambda$$

ограничена и непрерывна в $0 < \delta < \sigma < +\infty$, каково бы не было $\delta > 0$. Кроме того, по теореме Абели (см. напр. [6], стр. 182. Следствие 1а) из асимптотики $\omega(\lambda) \asymp \lambda^\alpha$ ($\lambda \rightarrow +\infty$, $-1 < \alpha < 0$) следует, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} d\omega_1(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} \omega(\lambda) d\lambda \asymp \frac{1}{\sigma^{1+\alpha}} \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, генерирующая функция преобразования Лапласа $F(z)$, т. е.

$$\varphi(\sigma) \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} d\omega_1(\lambda), \quad 0 < \sigma < +\infty,$$

ограничена, и поэтому $|F(iy)| \leq My^{-1}$ при $y \rightarrow +\infty$, где $M > 0$ - постоянная.

Тем самым, $C = 0$, и ввиду единственности генерирующей функции

$$\varphi(\sigma) \int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} d\omega_1(\lambda) \equiv 0, \quad 0 < \sigma < +\infty,$$

где очевидно

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sigma\lambda} d\omega_1(\lambda) > 0, \quad 0 < \sigma < +\infty.$$

Таким образом $\varphi(\sigma) \equiv 0$ ($0 < \sigma < +\infty$), т. е.

$$u_1(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y} u(x+iy) = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{i(x-i\rho)\sigma} \varphi(\sigma) d\sigma \equiv 0, \quad y > \rho.$$

Однако, функция $u_1(x+iy) = \partial u(x+iy)/\partial y$ гармонична во всей полуплоскости G , и, тем самым, $\partial u(z)/\partial y \equiv 0$, $z = x+iy \in G$. Отсюда следует, что

$$u(z) \equiv a_0 + a_1 x, \quad z = x+iy \in G,$$

где a_0 и a_1 - вещественные постоянные, зависящие лишь от функции $u(z)$. $\square$

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Основной результат этого раздела относится к представлениям определенных ниже классов гармонических функций.

Определение 3.1. $\mathfrak{N}^m$ ($\omega(x) \in \Omega$) - класс вещественных, гармонических в G^+ функций $u(z)$, принадлежащих M_ω и удовлетворяющих условию (2.3) для некоторых $\rho_0 > 0$, и

$$(3.1) \quad \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |L_\omega u(x+iy)| dx < +\infty.$$

Теорема 3.1. 1°. Класс $\mathfrak{N}^m$ совпадает с множеством функций представимых в виде

$$(3.2) \quad u(z) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} C_\omega(z-t) d\mu(t), \quad z = x+iy \in G^+,$$

где a_0 и a_1 - вещественные числа, а $\mu(t)$ - функция ограниченного изменения на $(-\infty, +\infty)$.

2°. Если имеет место представление (3.2), то при любом $z = x + iy \in G^+$

$$(3.3) \quad u(z) = a_0 + a_1 x + \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{itz} \left[\frac{1}{\pi} \left(t \int_0^{+\infty} e^{-t\sigma} \omega(\sigma) d\sigma \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} d\mu(\lambda) \right] dt.$$

При этом,

$$(3.4) \quad \lim_{y \rightarrow +0} u(x + iy) = a_0 + a_1 x, \quad -\infty < x < +\infty,$$

а мера $\mu(t)$ в формулах (3.2) и (3.3) может быть найдена при помощи следующего аналога формулы обращения Стильтьеса:

$$(3.5) \quad \mu(t) = \lim_{y \rightarrow +0} \int_0^t L_\omega u(x + iy) dx, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Доказательство. 1°. Пусть справедливо представление (3.2). Ввиду оценки (2.1) интеграл в (3.2) равномерно сходится внутри G^+ , и, тем самым, функция $u(z)$ гармонична в G^+ . Далее, легко видеть, что при любом $z = x + iy \in G^+$

$$(3.6) \quad \frac{\partial}{\partial y} C_\omega(z) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{izt} dt}{\int_0^{+\infty} e^{-tx} d\omega_1(x)} = -C_{\omega_1}(z),$$

где $C_{\omega_1}(z)$ - ядро из [7], с неубывающей функцией $\omega_1(x) \asymp x^{1+\alpha}$ при $x \rightarrow +\infty$, удовлетворяющей условиям леммы 3.1 в [7]. Поэтому, ввиду (2.1), теоремы Фубини и оценки (3.2) из [7] заключаем, что при любом $z \in G_\rho^+$ при любом фиксированном $\rho > 0$ и любом $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} u(z + is) \right| d\omega_1(s) &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z + is - t) d\mu(t) \right| d\omega_1(s) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\omega_1}(z + is - t) d\mu(t) \right| \omega(s) ds \\ &\leq \left(\frac{M_{\rho, \omega, \varepsilon}}{\rho^{2+\alpha-\varepsilon}} \int_0^{\Delta_0} \omega(s) ds + M'_{\rho, \omega, \varepsilon} \int_{\Delta_0}^{+\infty} s^{-2+\varepsilon} ds \right) \bigvee_{-\infty}^{+\infty} \mu < +\infty, \end{aligned}$$

где $M_{\rho, \omega, \varepsilon}, M'_{\rho, \omega, \varepsilon} > 0$ - постоянные, зависящие только от ρ, ω и ε . Тем самым, $u(z) \in M_\omega$.

Далее, используя простую двустороннюю оценку $(a + b)^\lambda \asymp a^\lambda + b^\lambda$ ($a, b, \lambda \geq 0$), аналогично заключаем, что для любых $y > \rho > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1 + \alpha)$ имеется

постоянная $M_{\rho, \omega} > 0$, при которой

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} u(x+iy) \right| dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\omega}(z-t) d\mu(t) \right| dx \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |C_{\omega_1}(z-t)| |d\mu(t)| \right) dx \leq M_{\rho, \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{|z-t|^{1+\varepsilon}} \\ &\leq M'_{\rho, \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|s|^{1+\varepsilon} + \rho_0^{1+\varepsilon}} ds \leq M_{\rho, \rho_0, \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(|u|+1)^{1+\varepsilon}} du < +\infty, \end{aligned}$$

где $M'_{\rho, \omega} > 0$ и $M_{\rho, \rho_0, \omega} > 0$ - другие постоянные. Отсюда следует (2.3).

Теперь заметим, что при любом $z = x + iy \in G^+$

$$\begin{aligned} L_{\omega} u(z) &= - \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial y} u(z+is) \right] d\omega_1(s) \\ &= - \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\omega}(z+is-t) d\mu(t) \right] d\omega_1(s) \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} C_{\omega_1}(z+is-t) d\mu(t) \right] d\omega_1(s) \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{i(z+is-t)\xi} d\xi}{\int_0^{+\infty} e^{-\sigma\xi} d\omega_1(\sigma)} \right) d\mu(t) \right] d\omega_1(s) \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{i(z-t)\xi} \left(\frac{\int_0^{+\infty} e^{-s\xi} d\omega_1(s)}{\int_0^{+\infty} e^{-\sigma\xi} d\omega_1(\sigma)} \right) d\xi \right] d\mu(t) \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{i(z-t)\xi} d\xi \right] d\mu(t) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t-z}, \end{aligned}$$

где все интегралы абсолютно и равномерно сходятся внутри G^+ . Тем самым

$$(3.7) \quad L_{\omega} u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(x-t)^2 + y^2}, \quad z = x + iy \in G^+,$$

откуда следует условие (3.1):

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |L_{\omega} u(x+iy)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu(t)| = \bigvee_{-\infty}^{+\infty} \mu < +\infty.$$

Тем самым, $u(z) \in \mathfrak{M}_{\omega}^m$.

Обратно, пусть $u(z) \in \mathfrak{M}_{\omega}^m$. Тогда $u(z) \in M_{\omega}$, и по лемме 2.2 функция $L_{\omega} u(z)$ гармонична в G^+ . Кроме того, $L_{\omega} u(z)$ удовлетворяет условию (3.1), и поэтому по теореме 2.1 имеет место представление вида (3.7), где $\mu(t)$ - функции ограниченного изменения на $(-\infty, +\infty)$. Откуда получаем

$$L_{\omega} u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t-z} = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{i(z-t)s} ds \right] d\mu(t), \quad z \in G^+,$$

а также, что в любой точке $z \in G^+$

$$\begin{aligned} L_\omega u(z) &= \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(t) \int_0^{+\infty} d\omega_1(\lambda) \int_0^{+\infty} \frac{e^{i(z-t+i\lambda)s} ds}{\int_0^{+\infty} e^{-\sigma s} \omega(\sigma) d\sigma} \\ &= -\operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{i(z-t+i\lambda)s} ds}{s \int_0^{+\infty} e^{-\sigma s} \omega(\sigma) d\sigma} \right) d\mu(t) \right] d\omega_1(\lambda) \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z+i\lambda-t) d\mu(t) \right] d\omega_1(\lambda) \equiv L_\omega u^*(z), \end{aligned}$$

где, очевидно,

$$u^*(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z+i\lambda-t) d\mu(t) \in \mathfrak{H}_\omega^m.$$

Очевидно также, что $u(z) - u^*(z) \in \mathfrak{H}_\omega^m$ и $L_\omega(u(z) - u^*(z)) \equiv 0$, $z \in G^+$. Тем самым, представление (3.2) следует ввиду леммы 2.3.

2°. Представление (3.3) следует из (3.2). Далее, (3.4) следует из (3.3) и (2.1), а (3.5) - классическая формула обращения Стильтьеса для меры $\mu(t)$ в (3.7). $\square$

4. ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

4.1. Начнем с предварительных определений и лемм.

Определение 4.1. Пусть $E \subseteq (-\infty, +\infty)$ - измеримое по Борелю множество (B -множество) и $\omega \in \Omega$. Будем говорить, что E - множество положительной ω -емкости, или $C_\omega(E) > 0$, если существует борелева мера (B -мера) $\tau \geq 0$ с носителем в E ($\tau \prec E$) такая, что

$$(4.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau(t) = 1$$

и

$$(4.2) \quad S_1 \equiv \sup_{1 \in G^+} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(z-t)| d\tau(t) < +\infty.$$

Если нет такой меры, т. е. $S_1 = +\infty$ для любой неотрицательной B -меры $\tau \prec E$, подчиненной условию (4.1), то скажем, что E - нулевой ω -емкости, или $C_\omega(E) = 0$.

Лемма 4.1. Пусть B -множества $E_1, E_2 \subset (-\infty, +\infty)$ таковы, что $C_\omega(E_1) = C_\omega(E_2) = 0$ при некотором $\omega \in \Omega$. Тогда $C_\omega(E_1 \cup E_2) = 0$.

Доказательство. Пусть $\tau \prec E_1 \cup E_2$ - неотрицательная B -мера, подчиненная условию (4.1). Тогда интеграл (4.1), взятый по E_1 или E_2 , должен равняться некоему числу $M \in (0, 1]$. К примеру, пусть это будет интеграл по E_1 . Тогда

также мера $\tau_1 = M^{-1}\tau|_{E_1}$ с носителем в E_1 должна удовлетворять (4.1). Однако, $C_\omega(E_1) = 0$ и, тем самым

$$\sup_{z \in G^+} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(z-t)| d\tau(t) \geq M \sup_{z \in G^+} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(z-t)| d\tau_1(t) = +\infty.$$

□

Лемма 4.2. При любом $\omega \in \Omega$ уравнение Вольтерра

$$\int_0^x \omega(x-t) d\bar{\omega}(t) \equiv 1, \quad -\infty < x < +\infty,$$

имеет неубывающее решение $\bar{\omega}(x)$ такое, что $\bar{\omega}(0) = 0$ и $\bar{\omega}(x) \leq [\omega(x)]^{-1}$ для всех $-\infty < x < +\infty$. Кроме того,

$$(4.3) \quad C_\omega(z) = L_{\bar{\omega}}\left(\frac{1}{-iz}\right), \quad z \in G^+,$$

для оператора

$$L_{\bar{\omega}}f(z) \equiv \int_0^{+\infty} f(z+i\sigma) d\bar{\omega}(\sigma).$$

Доказательство. Взяв $\Omega_1(x) \equiv 1$, $\Omega_2(x) \equiv \omega(x)$ в теореме 1.2 работы [8], заключаем, что функция $\bar{\omega}(x)$ с отмеченными свойствами существует. Тем самым

$$(4.4) \quad \int_0^{+\infty} e^{-t\mu} \left(\int_0^\mu \omega(\mu-\sigma) d\bar{\omega}(\sigma) \right) d\mu = 1/t, \quad 0 < t < +\infty.$$

Однако, при любом $t > 0$

$$(4.5) \quad \int_0^{+\infty} e^{-t\sigma} d\bar{\omega}(\sigma) \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda} \omega(\lambda) d\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-t\mu} d\mu \int_0^\mu \omega(\mu-\sigma) d\bar{\omega}(\sigma)$$

ввиду абсолютной сходимости этих интегралов, что очевидно для тех, которые содержат $\omega(\lambda)d\lambda$, или $d\bar{\omega}(\sigma)$, поскольку для любого $t \in (-\infty, +\infty)$ найдутся числа $M_1 > 0$ и $\alpha \in (-1, 0)$ такие, что

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t\sigma} d\bar{\omega}(\sigma) &= e^{-t\sigma} \bar{\omega}(\sigma) \Big|_{\sigma=0}^{+\infty} + t \int_0^{+\infty} e^{-t\sigma} \bar{\omega}(\sigma) d\sigma \leq t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\sigma} d\sigma}{\omega(\sigma)} = \\ &= t \left(\int_0^{\Delta_0} + \int_{\Delta_0}^{+\infty} \right) \frac{e^{-t\sigma} d\sigma}{\omega(\sigma)} \leq \frac{t}{\omega(\Delta_0)} \int_0^{\Delta_0} e^{-t\sigma} d\sigma + M_1 t \int_{\Delta_0}^{+\infty} e^{-t\sigma} \sigma^{-\alpha} d\sigma < +\infty. \end{aligned}$$

В силу (4.4) и (4.5)

$$\frac{1}{I_\omega(t)} = \left(t \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda} \omega(\lambda) d\lambda \right)^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-t\sigma} d\bar{\omega}(\sigma)$$

при любом $t \in (0, +\infty)$, и, следовательно,

$$C_\omega(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{dt}{I_\omega(t)} = \int_0^{+\infty} e^{izt} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t\sigma} d\bar{\omega}(\sigma) \right) dt.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что при любом $z \in G^+$

$$L_{\omega} \left(\frac{1}{-iz} \right) = \int_0^{+\infty} d\tilde{\omega}(\sigma) \int_0^{+\infty} e^{i(z+\sigma)t} dt = \int_0^{+\infty} e^{izt} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t\sigma} d\tilde{\omega}(\sigma) \right) dt,$$

где интегралы абсолютно сходятся, поскольку

$$\int_0^{+\infty} d\tilde{\omega}(\sigma) \int_0^{+\infty} |e^{i(z+\sigma)t}| dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{d\tilde{\omega}(\sigma)}{y+\sigma} < +\infty, \quad z = x + iy \in G^+.$$

ввиду неравенства

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\tilde{\omega}(\sigma)}{1+\sigma} \leq \frac{1}{\omega(\Delta_0)} \int_0^{\Delta_0} \frac{d\sigma}{(1+\sigma)^2} + M_2 \int_{\Delta_0}^{+\infty} \frac{d\sigma}{(1+\sigma)^2 \sigma^\alpha} < +\infty$$

справедливых при некоторых числах $M_2 > 0$ и $\alpha \in (-1, 0)$. $\square$

Лемма 4.3. Пусть $\omega \in \Omega$ и пусть $C_{\omega}(E) > 0$ для B -множества $E \subseteq (-\infty, +\infty)$. Далее, пусть B -мера $\tau \ll E$ удовлетворяет условиям (4.1) и (4.2). Тогда, для любого $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |C_{\omega}(x-t)| d\tau(t) \leq S_1 \equiv \sup_{z \in G^+} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_{\omega}(z-t)| d\tau(t) < +\infty.$$

Доказательство. В силу (4.3) $\operatorname{Re} C_{\omega}(z) \geq 0$, $z \in G^+$, и, тем самым, функция $C_{\omega}(z)$ обладает некасательными граничными значениями почти во всех точках $-\infty < x < +\infty$. Далее по лемме Фату

$$\begin{aligned} +\infty > \liminf_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_{\omega}(x+iy-t)| d\tau(t) &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} \liminf_{y \rightarrow +0} |C_{\omega}(x+iy-t)| d\tau(t) \\ &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} |C_{\omega}(x-t)| d\tau(t) \end{aligned}$$

при любом $x \in (-\infty, +\infty)$, и, тем самым,

$$\sup_{y > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_{\omega}(z-t)| d\tau(t) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |C_{\omega}(x-t)| d\tau(t).$$

Переход к супремуму по $x \in (-\infty, +\infty)$ завершает доказательство. $\square$

4.2. Для доказательства основной теоремы данного раздела нужна также

Лемма 4.4. Пусть $\omega \in \Omega$, а $f(z)$ - голоморфная в G^+ функция вида

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\omega}(z-t) d\mu(t), \quad z \in G^+,$$

где $\mu(t)$ - функция ограниченного изменения на $(-\infty, +\infty)$. Тогда множество тех $x \in (-\infty, +\infty)$, где некасательное граничное значение $f(x)$ не существует в виде конечного предела, обладает нулевой ω -емкостью.

Доказательство. В силу (4.3), $\operatorname{Re} C_\omega(z) \geq 0$, $z \in G^+$. Тем самым, $f(z)$ является разностью двух голоморфных в G^+ функций с неотрицательными вещественными частями. Следовательно, $f(z)$ ограниченного вида в G^+ и поэтому имеет конечные некасательные граничные значения почти во всех точках $-\infty < x < +\infty$. Далее, в силу теоремы Линделёфа существование конечного некасательного предела в какой-либо точке $x \in (-\infty, +\infty)$ эквивалентно существованию того же предела в перпендикулярном направлении:

$$(4.6) \quad \lim_{y \rightarrow +0} f(x + iy) (= f(x)).$$

Для доказательства существования последнего предела вне множества нулевой ω -емкости, запишем

$$(4.7) \quad f(x + iy) = f(x + i\lambda) - i \int_y^\lambda f'(x + i\sigma) d\sigma$$

с любыми y, λ ($0 < y < \lambda < +\infty$). Так как $\omega \in \Omega$, то при помощи оценки (3.6) и вычислении, аналогичного приведенному в начале доказательства теоремы 3.1, заключаем, что при любых $y > \rho > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1 + \alpha)$

$$\begin{aligned} \int_y^{+\infty} |f'(x + i\sigma)| d\sigma &= \int_y^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(x + i\sigma - t) d\mu(t) \right| d\sigma \\ &\leq \int_y^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(x + i\sigma - t)| |d\mu(t)| \right) d\sigma \leq M_{\rho, \omega} \int_y^{+\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{|x + i\sigma - t|^{1+\varepsilon}} \\ &\leq M'_{\rho, \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{\|x - t\| + y)^{\varepsilon}} \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{(1 + \tau)^{1+\varepsilon}} \leq M''_{\rho, \omega} y^{-\varepsilon} \bigvee_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) < +\infty, \end{aligned}$$

где $M_{\rho, \omega}$, $M'_{\rho, \omega}$ и $M''_{\rho, \omega}$ - положительные постоянные. Поэтому, предельным переходом $\lambda \rightarrow +\infty$ в (4.7) получаем

$$(4.8) \quad f(x + iy) = f(x + i\infty) - i \int_y^{+\infty} f'(x + i\sigma) d\sigma, \quad y > 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

где интеграл абсолютно сходится и $f(x + i\infty)$ - конечный предел.

Пусть E_0 - множество тех $x \in (-\infty, +\infty)$, для которых

$$\left| \int_0^{+\infty} f'(x + i\sigma) d\sigma \right| = +\infty,$$

и пусть E - множество тех $x \in (-\infty, +\infty)$, где (4.6) не является конечным пределом. Тогда $E \subseteq E_0$ в силу (4.8), и равенство $C_\omega(E_0) = 0$ влечет $C_\omega(E) = 0$. Действительно, если $C_\omega(E) > 0$, то существовала бы неотрицательная B -мера $\tau \prec E$, для которой были бы верны (4.1) и (4.2). Но $E \subseteq E_0$, поэтому $\tau \prec E_0$, и получаем $C_\omega(E_0) > 0$ ввиду определения 4.1. Таким образом, остается показать,

что $C_\omega(E_0) = 0$. Предположим обратное: $C_\omega(E_0) > 0$. Тогда найдется неотрицательная B -мера $\tau_0 \ll E_0$, для которой верны (4.1) и (4.2). По (4.1),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_0(x) = \int_{E_0} d\tau_0(x) = 1.$$

Кроме того, очевидно, что

$$(4.9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} f'(x+i\sigma) d\sigma \right| d\tau_0(x) = +\infty.$$

С другой стороны, в силу (4.3) $C'_\omega(z) = -\int_0^\infty \frac{d\bar{\omega}(t)}{(z+t)^2}$. Поэтому, применив теорему Фубини и (4.3) получим

$$\begin{aligned} \int_y^{+\infty} f'(x+i\sigma) d\sigma &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} C'_\omega(x+i\sigma-t) d\sigma \right) d\mu(t) \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} d\bar{\omega}(\lambda) \int_y^{+\infty} \frac{d\sigma}{(x+i\sigma-t+i\lambda)^2} \right) d\mu(t) \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(i \int_0^{+\infty} d\bar{\omega}(\lambda) \int_{y+\lambda}^{+\infty} d_s \frac{1}{(x-t+is)} \right) d\mu(t) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{d\bar{\omega}(\lambda)}{z-t+i\lambda} \right) d\mu(t) \\ &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} L_{\bar{\omega}} \left(\frac{1}{z-t} \right) d\mu(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} C_\omega(z-t) d\mu(t). \end{aligned}$$

Следовательно, для любого $z = x+iy \in G^+$

$$\left| \int_y^{+\infty} f'(x+i\sigma) d\sigma \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(z-t)| d\mu(t),$$

и по определению (1.3) ядра $C_\omega(z)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_y^{+\infty} f'(x+i\sigma) d\sigma \right| d\tau_0(x) &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_0(x) \int_{-\infty}^{+\infty} |\overline{C_\omega(x+iy-t)}| d\mu(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(t+iy-x)| d\tau_0(x) \leq S_1 \bigvee_{-\infty}^{+\infty} \mu < +\infty. \end{aligned}$$

Отсюда, по лемме Фату

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} f'(x+iy) dy \right| d\tau_0(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{+\infty} f'(x+iy) dy \right| d\tau_0(t) \\ &\leq \liminf_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_y^{+\infty} f'(x+iy) dy \right| d\tau_0(t) \leq S_1 \bigvee_{-\infty}^{+\infty} \mu < +\infty. \end{aligned}$$

что противоречит (4.9). □

Приведенная ниже теорема дает описание граничного поведения функций классов $\mathcal{H}_\omega^m$ ($\omega(x) \in \Omega$) в терминах ω -емкостей.

Теорема 4.1. Любая функция $u(z) \in \mathcal{H}_\omega^m$ ($\omega \in \Omega$) имеет ненулевые, конечные, некасательные граничные значения во всех точках $x \in (-\infty, +\infty)$, кроме, быть может, множества нулевой ω -емкости.

Доказательство. Утверждение очевидно в силу леммы 4.4 и представления (3.2) функции $u(z) \in \mathcal{H}_\omega^m$, где a_0 и a_1 — вещественные постоянные, а $\mu(t)$ — функция ограниченного изменения на $(-\infty, +\infty)$. $\square$

Замечание 4.1. Ввиду (3.4), сужение класса $\mathcal{H}_\omega^m$ дополнительным условием

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x_{1,2} + iy) = 0 \quad \text{при каких либо значениях } x_1 \neq x_2$$

является классом гармонических в G^+ функций, представимых только интегралом правой части формулы (3.2). Однако, $\operatorname{Re} C_\omega(z) \geq 0$, $z \in G^+$, ввиду (4.3), и поэтому функции суженного класса имеют неотрицательные гармонические мажоранты в G^+ и обладают граничными свойствами теоремы 4.1.

Ниже приводим еще одну теорему о граничных значениях функций классов $\mathcal{H}_\omega^m$.

Теорема 4.2. Пусть $\omega \in \Omega$, B -множество $E \subseteq (-\infty, +\infty)$ положительной ω -емкости, и пусть $a_1 = 0$ в представлении (3.2) функции $u(z) \in \mathcal{H}_\omega^m$. Тогда

$$(4.10) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)| d\tau(x) < +\infty$$

для той же B -меры τ , что в (4.2), для которой $C_\omega(E) > 0$.

Доказательство. Очевидно

$$|u(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(z-t)| d\mu(t) + a_0, \quad -\infty < t < +\infty,$$

и, тем самым, пользуясь теоремой Фубини и неравенством (4.2) получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+iy)| d\tau(x) &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(x+iy-t)| d\tau(x) + M_{a_0} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\omega(t+iy-x)| d\tau(x) + M_{a_0} \leq \frac{S_1}{2\pi} \bigvee_{-\infty}^{+\infty} \mu + M_{a_0} < +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, применив теорему 4.1 и лемму Фату приходим к (4.10). $\square$

Abstract. Some ω -weighted classes of harmonic functions are introduced in the upper half-plane, the representations of these classes are found. A description of the boundary values of the functions from the considered classes is given by means of a notion of ω -capacity on the real axis, which becomes an analog of Frostman's α -capacity in a particular case.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. M. Džrbašjan, "Theory of Factorization and Boundary Properties of Functions Meromorphic in the Disc", in: Proc. International Congress of Mathematicians (Vancouver 1974), 2. Canad. Math. Congress, Montreal (1975).
- [2] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, Классы и Граничные Свойства Функций Мероморфных в Круге, Наука, Москва (1993).
- [3] A. M. Jerbashian, Functions of α -Bounded Type in the Half-Plane, Springer, Advances in Complex Analysis and Applications, 4 (2005).
- [4] Е. Д. Соломенцев, "О классах функций субгармонических в полупространстве", Вестник МГУ, Сер. Мат., 5, 73 - 91 (1959).
- [5] A. M. Jerbashian, V. A. Jerbashian, "Functions of ω -Bounded Type in the Half-Plane" CMFT: Calculation Methods and Function Theory, 7, no. 2, 205 - 238 (2007).
- [6] D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton (1946).
- [7] A. M. Jerbashian, "On $\mathcal{A}_\omega$ Spaces in the Half-Plane", in: Operator Theory: Advances and Applications, 158, 141 - 158, Birkhauser Verlag, Basel/Switzerland (2005).
- [8] А. М. Джрбашян, "О вложении классов N_ω типа Незавалинны", Изв. РАН. 03, no. 4, 59 - 78 (1999).

Поступила 11 января 2015