Известия НАН Армении. Математика, том 51, н. 2, 2016, стр. 3–16.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ КУСОЧНО ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ НА R

Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. КЕРЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *ggg@ysu.am*; *karenkeryan@ysu.am*

Аннотация. Для допустимой последовательности $\mathcal{T}$ определяется ортонормированная система из кусочно линейных функций с нулевым интегралом на R. Найдены необходимые и достаточные условия на $\mathcal{T}$, для того, чтобы соответствующая система была базисом в $H^1(R)$.

MSC2010 numbers: 42C10; 42C25; 46E30.
Ключевые слова: Общая система Франклина; сходимость; безусловная базисность; пространства L^p.

1. Введение

В работе [1] введено понятие общей системы Франклина на R. Там же доказаны теоремы сходимости для этой системы. Для представления цели настоящей статьи, приведем некоторые определения и результаты из работы [1].

Определение 1.1. *Последовательность (разбиение) $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ назовем допустимой на R, если $\mathcal{T}$ всюду плотно в R и каждая точка $t \in R$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем один раз.*

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n+1\}$. Допустим π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n < \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n\}$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Тогда через S_n обозначим пространство функций определенных на R, которые линейны на $[\tau_i^n, \tau_{i+1}^n]$ и равны нулю вне (τ_0^n, τ_{n+1}^n). Ясно, что $\dim S_n = n$ и $S_{n-1} \subset S_n$. Следовательно, существует (с точностью до знака) единственная функция $f \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\|f\|_2 = 1$. Эту функцию назовем n-ой функцией Франклина на R соответствующей разбиению $\mathcal{T}$.

[1]Исследования выполнены при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 13-1A006

Для фиксированного n через N_i^n, $0 \le i \le n+1$, обозначим B-сплайны соответствующие π_n, т.е.

$$N_0^n(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда} \quad t = \tau_0^n, \\ 0, & \text{когда} \quad t \in (-\infty, \tau_0^n) \cup [\tau_1^n, \infty), \\ \text{линейная на} & [\tau_0^n, \tau_1^n]. \end{cases}$$

$$N_i^n(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда} \quad t = \tau_i^n, \\ 0, & \text{когда} \quad t \in (-\infty, \tau_{i-1}^n] \cup [\tau_{i+1}^n, \infty), \\ \text{линейная на} & [\tau_{i-1}^n, \tau_i^n] \quad \text{и} \quad [\tau_i^n, \tau_{i+1}^n], \end{cases}$$

$$N_{n+1}^n(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда} \quad t = \tau_{n+1}^n, \\ 0, & \text{когда} \quad t \in (-\infty, \tau_n^n] \cup (\tau_{n+1}^n, \infty), \\ \text{линейная на} & [\tau_n^n, \tau_{n+1}^n]. \end{cases}$$

Ясно, что $N_i^n \in S_n$, $1 \le i \le n$, и образуют базис этого пространства. Очевидно также, что $N_i^n \notin S_n$, когда $i = 0$ или $n+1$.

Определение 1.2. *Общая система Франклина $\{f_n(x) : n \ge 1\}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется по правилу $f_1(x) = \frac{1}{\|N_1^1\|_2} N_1^1(x)$ и для $n \ge 2$ функция $f_n(x)$ есть n-ая функция Франклина соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.*

Это определение почти повторяет определение общей системы Франклина на $[0, 1]$ (см. [2] [4]), частным случаем которого является классическая система Франклина (см. [6]).

При исследовании общей системы Франклина на $[0, 1]$ важную роль сыграли понятия регулярности последовательности $\mathcal{T}$. Эти понятия нам нужны также при изучении системы Франклина на R.

Определение 1.3. *Допустимая последовательность $\mathcal{T}$ называется сильно регулярной с параметром γ, если*

$$\gamma^{-1} \le \frac{\lambda_{i+1}^n}{\lambda_i^n} \le \gamma, \quad \text{для всех} \ \ n \ge 2, \quad i = 1, \dots, n,$$

здесь и далее $\lambda_i^n = \tau_i^n - \tau_{i-1}^n$.

Определение 1.4. *Допустимая последовательность $\mathcal{T}$ называется регулярной по парам с параметром γ, если*

$$\gamma^{-1} \le \frac{\lambda_{i+2}^n + \lambda_{i+1}^n}{\lambda_{i+1}^n + \lambda_i^n} \le \gamma, \quad \text{для всех} \ \ n \ge 2, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Так как последовательность $\mathcal{T}$ всюду плотна на R, то система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной ортонормированной системой в $L^2(R)$.

В работе [1], в частности, доказано, что система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в $L^p(R)$, $1 \le p < \infty$ и безусловным базисом в $L^p(R)$, $1 < p < \infty$. Доказаны также теоремы о локально равномерной сходимости рядов Фурье-Франклина непрерывных функций.

Однако система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ не образует базис в $H^1(R)$, так как интегралы этих функций отличны от нуля. Стромберг [7] построил систему из кусочно линейных функций, образующих безусловный базис в $H^1(R)$. В настоящей работе определяется одна система из кусочно линейных функций, определяемая допустимой последовательностью $\mathcal{T}$. Находится необходимые и достаточные условия на $\mathcal{T}$, при которых соответствующая система будет базисом в $H^1(R)$.

Условимся о некоторых обозначениях.

Через $c, C, C_1, C_\gamma, ...$, обозначаются постоянные зависящие только от своих индексов. Значения этих постоянных в разных формулах могут быть разными. Длину отрезка I обозначим через $|I|$. Запись $a \sim b$ означает, что существуют положительные постоянные c и C, такие что $c \cdot a \leq b \leq C \cdot a$, а запись $a \sim_\gamma b$ означает, что эти постоянные могут зависеть от γ. Через $\chi_A(x)$ обозначим характеристическую функцию множества A.

Результаты настоящей работы без доказательств анонсированы в [5].

2. Определение общей системы Франклина и ее ядро Дирихле

Через S_n^0 обозначим множество функций из S_n с нулевым интегралом. Ясно, что $S_n^0 \subset S_n$, $S_{n-1}^0 \subset S_n^0$ и $\dim S_n^0 = n-1$. Поэтому, для $n \geq 3$, существует единственная (с точностью до знака) функция $F_n \in S_n^0$, со свойствами: $\|F_n\|_2 = 1$ и F_n ортогональна S_{n-1}^0. Эту функцию назовем n-ой функцией Франклина с нулевым интегралом.

Очевидно, что $N_i^n \notin S_n^0$ и поэтому нужно искать базис в S_n^0. Обозначим

$$M_i^n(t) = \frac{N_i^n(t)}{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.1}$$

Тогда $\int_R M_i^n(t)dt = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, ..., n$, и для

$$B_i^n(t) = M_i^n(t) - M_{i+1}^n(t), \quad i = 1, 2, ..., n-1 \tag{2.2}$$

имеем $B_i^n \in S_n^0$. Очевидно, функции B_i^n, $i = 1, 2, ..., n-1$, линейно независимы и поэтому образуют базис в S_n^0.

Определение 2.1. *Система Франклина с нулевыми интегралами $\{F_n(t) : n \geq 2\}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется по правилу $F_2(t) = \frac{B_1^2(t)}{\|B_1^2\|_2}$ и для $n \geq 3$ функция $F_n(t)$ есть n-ая функция Франклина с нулевым интегралом, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.*

Через $\mathcal{D}_n(t,\tau)$ обозначим ядро проектора из пространства $L^1(R)$ в пространство S_n^0, т.е. $\mathcal{D}_n(t,\tau)=\sum_{k=2}^n F_k(t)F_k(\tau)$. Очевидно, $\mathcal{D}_n(t,\tau)=\mathcal{D}_n(\tau,t.)$

Для исследования ядра Дирихле $\mathcal{D}_n(t,\tau)$, напомним некоторые свойства ядра Дирихле $K_n(t,\tau)$ системы Франклина $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$, т.е. $K_n(t,\tau)=\sum_{k=1}^n f_k(t)f_k(\tau)$.

Ясно, что если $g\in S_n$, то $g(t)=\int_R K_n(t,\tau)g(\tau)d\tau$. Поэтому имеет место

$$\int_R K_n(t,\tau)N_i^n(\tau)d\tau=N_i^n(t),\ \ i=1,2,...,n, \tag{2.3}$$

которое, с учетом линейности функции $K_n(t,\tau)$ по каждой переменной на отрезках $[\tau_i^n,\tau_{i+1}^n]$, равносильно

$$\int_R K_n(\tau_k^n,\tau)N_i^n(\tau)d\tau=N_i^n(\tau_k^n)=\delta_{ik},\ \text{когда}\ i=1,2,...,n,\ k=1,2,...,n.$$

Учитывая линейность функции $K_n(\cdot,\tau)$ на интервалах $[\tau_i^n,\tau_{i+1}^n]$, получим

$$K_n(t,\tau)=\sum_{k=1}^n N_k^n(t)K_n(\tau_k^n,\tau).$$

В работе [1] для $K_n(t,\tau)$ доказаны следующие леммы.

Лемма 2.1. *Для всех n и t выполняется*

$$\int_R |K_n(t,\tau)|d\tau\le 3.$$

Лемма 2.2. *Для всех $n\in N$, и $0\le i\le k\le n+1$ выполняются*

$$|K_n(\tau_k^n,\tau_i^n)|\le q^{|k-i|}\frac{4}{|\tau_{k+1}^n-\tau_{i-1}^n|}, \tag{2.4}$$

где $q=\frac{2}{3}$ и $\tau_{-1}^n=\tau_0^n$, $\tau_{n+2}^n=\tau_{n+1}^n$.

Фиксируем n и для удобства вместо $\mathcal{D}_n(t,\tau)$, $K_n(t,\tau)$, $N_i^n(t)$, $M_i^n(t)$, $B_i^n(t)$, τ_i^n, λ_i^n будем писать $\mathcal{D}(t,\tau)$, $K(t,\tau)$, $N_i(t)$, $M_i(t)$, $B_i(t)$, τ_i, λ_i. Поскольку S_n^0 состоит из кусочно линейных функций, то

$$\mathcal{D}(t,\tau)=\sum_{i,j=1}^n \mathcal{D}(\tau_i,\tau_j)N_i(t)N_j(\tau)=\sum_{i=1}^n N_i(t)\mathcal{D}(\tau_i,\tau) \tag{2.5}$$

и

$$\mathcal{D}(\tau_i,\tau)=\sum_{j=1}^n \mathcal{D}(\tau_i,\tau_j)N_j(\tau). \tag{2.6}$$

Выразим $\mathcal{D}(\tau_i,\tau)$ через $K(\tau_j,\tau)$. Очевидно, $\mathcal{D}(\tau_i,\cdot)\in S_n^0$ и оно однозначно определяется из условий

$$\int_R \mathcal{D}(\tau_i,\tau)B_k(\tau)d\tau=B_k(\tau_i),\quad \text{когда}\ \ k=1,2,...,n-1, \tag{2.7}$$

$$\int_R \mathcal{D}(\tau_i,\tau)d\tau = 0. \tag{2.8}$$

Поскольку функции $K(\tau_i,\tau)$, $i=1,2,\dots,n$, линейно независимы и принадлежат S_n, то $\mathcal{D}(\tau_i,\tau)$ можно искать в виде суммы $\sum_{j=1}^n \alpha_j^i K(\tau_j,\tau)$, где α_j^i искомые числа. Убедимся, что при подходящем выборе чисел a_i для

$$\mathcal{D}(\tau_i,\tau) = K(\tau_i,\tau) - a_i\sum_{j=1}^n K(\tau_j,\tau)(\lambda_j+\lambda_{j+1}) \tag{2.9}$$

выполняются (2.7), (2.8). Действительно, для любого a_i, из (2.1) - (2.3), имеем

$$\int_R \mathcal{D}(\tau_i,\tau)B_k(\tau)d\tau = \int_R K(\tau_i,\tau)(M_k(\tau)-M_{k+1}(\tau))d\tau -$$

$$a_i\sum_{j=1}^n(\lambda_j+\lambda_{j+1})\int_R K(\tau_j,\tau)(M_k(\tau)-M_{k+1}(\tau))d\tau =$$

$$M_k(\tau_i)-M_{k+1}(\tau_i)-a_i(\lambda_k+\lambda_{k+1})M_k(\tau_k)+$$

$$a_i(\lambda_{k+1}+\lambda_{k+2})M_{k+1}(\tau_{k+1}) = B_k(\tau_i)-a_i+a_i = B_k(\tau_i),$$

т.е. (2.7) выполнено. Если положить

$$a_i := \frac{\int_R K(\tau_i,\tau)d\tau}{\sum_{j=1}^n(\lambda_j+\lambda_{j+1})\int_R K(\tau_j,\tau)d\tau}, \tag{2.10}$$

то из (2.9) получаем (2.8).

Оценим a_i. Из $\sum_{i=0}^{n+1} N_i(\tau) = \chi_{[\tau_0,\tau_{n+1}]}(\tau)$ и (2.3) получим

$$\int_R K(\tau_j,\tau)d\tau = \int_R\sum_{m=0}^{n+1}K(\tau_j,\tau)N_m(\tau)d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1}K(\tau_j,\tau)N_0(\tau)d\tau + 1 + \tag{2.11}$$

$$\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}K(\tau_j,\tau)N_{n+1}(\tau)d\tau = 1+\frac{\lambda_1}{6}K(\tau_j,\tau_1)+\frac{\lambda_{n+1}}{6}K(\tau_j,\tau_n).$$

Следовательно, из (2.10) имеем

$$1+\frac{\lambda_1}{6}K(\tau_i,\tau_1)+\frac{\lambda_{n+1}}{6}K(\tau_i,\tau_n) = \tag{2.12}$$

$$a_i\left(\sum_{j=1}^n(\lambda_j+\lambda_{j+1})+\frac{\lambda_1}{6}\sum_{j=1}^n K(\tau_j,\tau_1)(\lambda_j+\lambda_{j+1})+\frac{\lambda_{n+1}}{6}\sum_{j=1}^n K(\tau_j,\tau_n)(\lambda_j+\lambda_{j+1})\right)$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{j=1}^n K(\tau_j,\tau_m)(\lambda_j+\lambda_{j+1}) = 2\int_R K(\tau,\tau_m)d\tau,$$

откуда, используя (2.11), получим

$$\sum_{j=1}^n K(\tau_j,\tau_m)(\lambda_j+\lambda_{j+1}) = \frac{\lambda_1}{3}K(\tau_m,\tau_1)+2+\frac{\lambda_{n+1}}{3}K(\tau_m,\tau_n). \tag{2.13}$$

Для $n \geq 3$ также имеем (см. (2.4)):

$$\left|\frac{\lambda_1}{3}K(\tau_m,\tau_1)+\frac{\lambda_{n+1}}{3}K(\tau_m,\tau_n)\right| \leq \frac{4}{3}\left(q^m+q^{n-m}\right) \leq \frac{52}{27}. \tag{2.14}$$

Следовательно, из (2.12) и (2.13) получим

$$a_i=\frac{c_i}{\tau_{n+1}-\tau_0}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{54} \leq c_i \leq 2. \tag{2.15}$$

Откуда, применяя (2.9) и Лемму 2.1, получим

$$\int_{\tau_0}^{\tau_{n+1}} |\mathfrak{D}(\tau_i,\tau)|d\tau \leq \int_{\tau_0}^{\tau_{n+1}} |K(\tau_i,\tau)|d\tau + \frac{6}{\tau_{n+1}-\tau_0}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j+\lambda_{j+1}) \leq 15. \tag{2.16}$$

Из (2.5) и (2.16) вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Для любого n выполняется*

$$\int_R |\mathfrak{D}_n(t,\tau)|d\tau \leq 15.$$

Из (2.9) и (2.13) получаем другое представление для $\mathfrak{D}(\tau_i,\tau)$:

$$\mathfrak{D}(\tau_i,\tau)=K(\tau_i,\tau)-a_i\sum_{j=1}^{n}K(\tau_j,\tau)(\lambda_j+\lambda_{j+1})= \tag{2.17}$$

$$K(\tau_i,\tau)-a_i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j+\lambda_{j+1})\sum_{m=1}^{n}N_m(\tau)K(\tau_j,\tau_m)=$$

$$K(\tau_i,\tau)-2a_i\sum_{m=1}^{n}N_m(\tau)\left(1+\frac{\lambda_1}{6}K(\tau_1,\tau_m)+\frac{\lambda_{n+1}}{6}K(\tau_n,\tau_m)\right).$$

3. Основные леммы

Напомним два эквивалентных определения пространства $H^1(R)$.

Пусть $\psi(t)=\max(0,1-|t|)$, $\psi_\zeta(t)=\frac{1}{\zeta}\psi(\frac{t}{\zeta})$. Для $f\in L^1(R)$ положим

$$f^*(t)=\sup_{\zeta>0}\left|\int_R f(\tau)\psi_\zeta(t-\tau)d\tau\right|.$$

Определение 3.1. (см. [8]) *Будем говорить, что $f\in H^1(R)$, если $f^*\in L^1(R)$. При этом полагаем $\|f\|_{H^1}=\|f^*\|_1$.*

Определение 3.2. *Говорят, что $\phi\in L^1(R)$ является атомом, если существует интервал $I\in R$, такой что $\operatorname{supp}\phi\subset I$, $\sup|\phi|\leq\frac{1}{|I|}$ и $\int_I\phi(t)dt=0$.*

Определение 3.3. *$f\in H^1(R)$, если существуют атомы ϕ_i и действительные числа c_i такие, что $f=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\phi_i$. При этом полагается $\|f\|_{H^1}=\inf(\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|)$, где нижняя грань берется по всевозможным представлениям функции f атомами.*

Определение 3.3 впервые было дано в работе [9] и там же было доказано, что нормы в определениях 3.1 и 3.3 эквивалентны.

Далее нам будет полезна следующая простая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть* $\operatorname{supp}\varphi \subset [\alpha, \beta]$ *и* $\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt = d$. *Тогда для любого* $b > \beta + 2(\beta - \alpha)$ *имеет место*

$$\int_\alpha^b \varphi^*(t)dt \geq \frac{|d|}{9} \ln \frac{b-\beta}{\beta-\alpha}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Действительно, для $t > 2\beta - \alpha$ и $\zeta = 3(t-\beta)$ имеем

$$\varphi^*(t) \geq \left| \int_\alpha^\beta \varphi(\tau)\psi_\zeta(t-\tau)d\tau \right| > |d| \frac{1}{9(t-\beta)}.$$

Интегрируя последнее неравенство получим (3.1). □

Пусть ϕ атом, т.е. для некоторого интервала I выполняются условия:

$$\operatorname{supp}\phi \subset I, \quad \sup|\phi(t)| \leq |I|^{-1}, \quad \int_I \phi(t)dt = 0. \tag{3.2}$$

Через $\mathcal{P}(\phi)$ обозначим проекцию ϕ на S_n^0, т. е. $\mathcal{P}(\phi)(t) = \int_R \mathcal{D}(t,\tau)\phi(\tau)d\tau$. Обозначим также

$$K^1(t,\tau) = 2\sum_{i=1}^n N_i(t)a_i \sum_{m=1}^n N_m(\tau)\left(1 + \frac{\lambda_1}{6}K(\tau_1,\tau_m) + \frac{\lambda_{n+1}}{6}K(\tau_n,\tau_m)\right), \tag{3.3}$$

$$P(\phi)(t) = \int_R K(t,\tau)\phi(\tau)d\tau \quad \text{и} \quad P_1(\phi)(t) = \int_R K^1(t,\tau)\phi(\tau)d\tau. \tag{3.4}$$

Тогда, из (2.17) будем иметь

$$\mathcal{P}(\phi)(t) = P(\phi)(t) - P_1(\phi)(t). \tag{3.5}$$

Лемма 3.2. *Существует постоянная* $C_1 > 0$, *такая что*

$$\sup \|\mathcal{P}(\phi)\|_{H^1} > C_1 \cdot \ln\Delta - 8,$$

где $\Delta = \max\limits_{1\leq i\leq n-1}\left\{\frac{\lambda_i+\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1}+\lambda_{i+2}}, \frac{\lambda_{i+1}+\lambda_{i+2}}{\lambda_i+\lambda_{i+1}}\right\}$, *а верхняя грань берется по всевозможным атомам* ϕ.

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathcal{P}^*(\phi)(t) \geq P^*(\phi)(t) - P_1^*(\phi)(t). \tag{3.6}$$

Из (3.3), (2.15), (2.14) следует, что

$$|K^1(t,\tau)| \leq \frac{8}{\tau_{n+1} - \tau_0}. \tag{3.7}$$

Следовательно, с учетом (3.2), получим $|P_1(\phi)(t)| \le \frac{8}{\tau_{n+1}-\tau_0}$. Поэтому

$$|P_1^*(\phi)(t)| \le \frac{8}{\tau_{n+1} - \tau_0}. \tag{3.8}$$

Дословно повторяя шаги доказательства леммы 5.2 из работы [3], получим

$$\int_{\tau_0}^{\tau_{n+1}} P^*(t)dt \ge C_1 \cdot \ln \Delta.$$

Комбинируя последнее неравенство с (3.8), (3.6) получим, что

$$\sup \|\mathcal{P}(\phi)\|_{H^1} \ge \int_{\tau_0}^{\tau_{n+1}} \mathcal{P}^*(t)dt \ge C_1 \cdot \ln \Delta - 8.$$

Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *Допустим последовательность $\mathcal{T}$ регулярная по парам с параметром γ и существует такая постоянная $\theta > 0$, что для любой функции $F \in H^1(R)$ выполняется*

$$\|\mathcal{P}(F)\|_{H^1} \le \theta \cdot \|F\|_{H^1}. \tag{3.9}$$

Тогда существует постоянная $C_{\gamma,\theta} > 0$, такая что

$$\frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \ldots + \lambda_{n+1}^n} > C_{\gamma,\theta} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_n^n + \lambda_{n+1}^n}{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \ldots + \lambda_{n+1}^n} > C_{\gamma,\theta}. \tag{3.10}$$

Доказательство. Допустим противное: выполняется (3.9) и не выполняется (3.10). Тогда для любого натурального k существует n_k, такое что

$$\frac{\lambda_1^{n_k} + \lambda_2^{n_k}}{\tau_{n_k+1}^{n_k} - \tau_0^{n_k}} < \frac{1}{k} \quad \text{или} \quad \frac{\lambda_{n_k}^{n_k} + \lambda_{n_k+1}^{n_k}}{\tau_{n_k+1}^{n_k} - \tau_0^{n_k}} < \frac{1}{k}. \tag{3.11}$$

Фиксируем достаточно большое k (будет уточнено ниже) и допустим для n_k выполняется первое из неравенств (3.11). Далее, с целью упрощения записи, вместо n_k напишем n, а вместо λ_i^n, τ_i^n, $N_i^n(t)$ будем писать λ_i, τ_i, $N_i(t)$, соответственно. Итак, выполняются

$$\gamma^{-1} \le \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}} \le \gamma, \quad \text{для} \quad i = 1, 2..., n-1,$$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1}} < \frac{1}{k}. \tag{3.12}$$

Положим

$$\phi(x) = \frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}(N_1(x) - N_1(x + \lambda_1 + \lambda_2)).$$

Очевидно, что ϕ является атомом и поэтому $\|\phi\|_{H^1} = 1$. Оценим $\|\mathcal{P}(\phi)\|_{H^1}$ снизу. Пусть опять $P(\phi)(t)$ и $P_1(\phi)(t)$ определяются формулами (3.4) и имеет место представление (3.5). Из (3.3), (2.14) и (2.15), получим

$$(3.13)\qquad \frac{1}{729}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n} N_i(t)\sum_{j=1}^{n} N_j(\tau)}{(\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1})} < K^1(t,\tau) < 8\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n} N_i(t)\sum_{j=1}^{n} N_j(\tau)}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}}.$$

Из этого следует, что

$$(3.14)\qquad |P_1(\phi)(t)| < \frac{8}{\tau_{n+1}-\tau_0},$$

откуда получим

$$(3.15)\qquad |P_1^*(\phi)(t)| < \frac{8}{\tau_{n+1}-\tau_0}.$$

Заметим, что $P(\phi) = P(\frac{1}{2(\lambda_1+\lambda_2)}N_1) = \frac{1}{2(\lambda_1+\lambda_2)}N_1$, следовательно, используя (3.14) и (3.12), будем иметь для $k \geq 64$

$$(3.16)\qquad \int_{\tau_0}^{\tau_2}\mathcal{P}(\phi)(t)dt > \frac{1}{4} - 8\frac{\tau_2-\tau_0}{\tau_{n+1}-\tau_0} > \frac{1}{8}.$$

Положим $P_2(t) := \mathcal{P}(\phi)(t)\cdot\chi_{[\tau_0,\tau_2]}(t)$, и

$$(3.17)\qquad P_3(t) := \mathcal{P}(\phi)(t)\cdot\chi_{[\tau_2,\tau_{n+1}]}(t) = P_1(\phi)(t)\cdot\chi_{[\tau_2,\tau_{n+1}]}(t).$$

Применяя Лемму 3.1, из (3.16) получим

$$(3.18)\qquad \int_{\tau_0}^{\tau_{n+1}} P_2^*(t)dt > C\ln\frac{\tau_{n+1}-\tau_2}{\tau_2-\tau_0} > C\ln(k-1).$$

Откуда, применяя (3.15) и (3.17), получим

$$\|\mathcal{P}(\phi)\|_{H^1} \geq \int_{\tau_0}^{\tau_{n+1}} P^*(\phi)(t)dt \geq C\ln(k-1) - 8,$$

что противоречит (3.9), если взять $k \geq 64$, так чтобы $C\ln(k-1) - 8 > \theta$. Лемма 3.3 доказана. □

4. Доказательство основного результата

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{T}$ допустимая последовательность и $\{F_n(t)\}_{n=2}^{\infty}$ соответствующая система Франклина с нулевыми интегралами. Тогда для того, чтобы система $\{F_n(t)\}_{n=2}^{\infty}$ была базисом в $H^1(R)$ необходимо и достаточно выполнение условий:*

(i) *последовательность $\mathcal{T}$ регулярна по парам с параметром γ,*

(ii) *существует постоянная $\theta > 0$, такая что для всех n выполняются*

$$\frac{\lambda_1^n+\lambda_2^n}{\lambda_1^n+\lambda_2^n+\ldots+\lambda_{n+1}^n} > \theta \quad и \quad \frac{\lambda_n^n+\lambda_{n+1}^n}{\lambda_1^n+\lambda_2^n+\ldots+\lambda_{n+1}^n} > \theta.$$

Доказательство. **Необходимость** условий (i), (ii) следует из лемм 3.2, 3.3.

Достаточность. Из всюду плотности последовательности $\mathcal{T}$ следует, что $\bigcup_n S_n^0$ всюду плотно в $H^1(R)$. Поэтому достаточно доказать, что существует постоянная $C_{\gamma,\theta}$, такая что для любого n и любого $F \in H^1(R)$ выполняется

$$\|\mathcal{P}_n(F)\|_{H^1} \le C_{\gamma,\theta}\|F\|_{H^1}. \tag{4.1}$$

Учитывая определение 3.3, достаточно доказать (4.1) в случае, когда F является атомом, т.е.

$$\operatorname{supp} F \subset [x,y], \quad \sup|F(t)| \le \frac{1}{y-x} \quad \text{и} \quad \int_x^y F(t)dt = 0. \tag{4.2}$$

Зафиксируем n. В дальнейших записях для простоты индекс n опускаем, т.е. вместо τ_i^n, λ_i^n, $\mathcal{P}_n(F)$, будем писать τ_i, λ_i, $\mathcal{P}(F)$, соответственно.

Возможны следующие случаи.

(1) $x < \tau_1$,

(2) $y > \tau_n$,

(3) $[x,y] \subset [\tau_j, \tau_k]$, где $1 \le j < k \le n$.

В первом случае обсудим два подслучая: $y > \tau_3$ или $y \le \tau_3$. В первом подслучае из второго условия теоремы и из регулярности последовательности $\mathcal{T}$ по парам имеем

$$|[x,y]| \ge \lambda_2 + \lambda_3 > \frac{1}{\gamma}(\lambda_1 + \lambda_2) > \frac{\theta}{\gamma}(\tau_{n+1} - \tau_0). \tag{4.3}$$

Следовательно $\sup|F(t)| < c_{\theta,\gamma}(\tau_{n+1} - \tau_0)^{-1}$ и с учетом леммы 2.3, получаем

$$|\mathcal{P}(F)(t)| \le C_{\theta,\gamma}(\tau_{n+1} - \tau_0)^{-1}.$$

Принимая во внимание $\operatorname{supp}\mathcal{P}(F) \subset [\tau_0, \tau_{n+1}]$, $\int_R \mathcal{P}(F)(t)dt = 0$, получим $\|\mathcal{P}(F)\|_{H^1} < C_{\theta,\gamma}$. Во втором подслучае ($y \le \tau_3$) из (2.4) получим

$$|P(F)(t)| \le \int_x^y |K(t,\tau)||F(\tau)|d\tau \le \max_{\tau\in[x,y]} |K(t,\tau)| < \frac{4}{\lambda_1 + \lambda_2} < C_{\theta,\gamma}(\tau_{n+1} - \tau_0)^{-1}.$$

Из (3.4) и (3.7) следует

$$|P_1(F)(t)| < \frac{C}{\tau_{n+1} - \tau_0}.$$

Следовательно $|\mathcal{P}(F)(t)| \le C_{\theta,\gamma}(\tau_{n+1} - \tau_0)^{-1}$. Отсюда, с учетом $\operatorname{supp}\mathcal{P}(F) \subset [\tau_0, \tau_{n+1}]$ и $\int_R \mathcal{P}(F)(t)dt = 0$, имеем $\|\mathcal{P}(F)\|_{H^1} < C_{\theta,\gamma}$.

Второй случай доказывается аналогично первому.

Третий случай. Допустим $P(F)(t) = \int_R K(t,\tau)F(\tau)d\tau$ имеет представление

$$P(F)(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_i(t).$$

Обозначим $N_i^- = N_i \cdot \chi_{(\tau_{i-1}^n, \tau_i^n]}$, $N_i^+ = N_i \cdot \chi_{(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n]}$. Рассмотрим функции

$$\psi_i = \frac{1}{3}\alpha_{i-1} N_{i-1}^+ + \frac{2}{3}\alpha_i N_i + \frac{1}{3}\alpha_{i+1} N_{i+1}^-, \quad \text{для} \quad 1 \le i \le n. \tag{4.4}$$

где $\alpha_0 = \alpha_{n+1} = 0$. Учитывая, что $N_i = N_i^- + N_i^+$, из (4.4) получим

$$P(F)(t) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) + \frac{\alpha_1}{3} N_1^-(t) + \frac{\alpha_n}{3} N_n^+(t). \tag{4.5}$$

Обозначим $L_i = \mathrm{supp} N_i$. Напомним, что $\mathrm{supp} N_i = [\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]$, для $1 \le i \le n$.

Нетрудно вычислить, что для $1 \le i \le n$

$$\int_R \psi_i(t)dt = \int_R P(F)(t) N_i(t)dt = \int_R F(t) N_i(t)dt. \tag{4.6}$$

Заметим, что если $1 \le i < j$ или $k < i \le n$, то $\mathrm{supp} F \cap L_i = \emptyset$. Поэтому

$$\int_R F(t) N_i(t)dt = 0.$$

Следовательно, из (4.6) получим

$$\int_R \psi_i(t)dt = 0, \quad \text{когда} \quad 1 \le i < j \text{ или } k < i \le n.$$

Поэтому

$$\|\psi_i\|_{H^1} \le \|\psi_i\|_\infty |L_i|, \quad \text{когда} \quad 1 \le i < j \text{ или } k < i \le n. \tag{4.7}$$

Оценим норму $\left\|\sum_{\mathrm{supp} F \cap L_i = \emptyset} \psi_i\right\|_{H^1}$. Для $i < j$ из (2.4) и регулярности последовательности $\mathcal{T}$ по парам с параметром γ имеем

$$\|\psi_i\|_\infty \le \max_{t \in [\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]} |P(F)(t)| \le \max_{\substack{t \in [\tau_{i-1}, \tau_{i+1}] \\ \tau \in [\tau_j, \tau_k]}} |K(t,\tau)| \le q^{j-i+2} \frac{4\gamma}{|L_i|}. \tag{4.8}$$

Аналогично получается

$$\|\psi_i\|_\infty \le q^{i-k+2} \frac{4\gamma}{|L_i|}, \quad \text{когда} \quad i > k. \tag{4.9}$$

Из (4.7) – (4.9) следует

$$\left\| \sum_{\mathrm{supp} F \cap L_i = \emptyset} \psi_i \right\|_{H^1} < C_\gamma.$$

Обозначим

$$\psi(t) = \sum_{i=j}^{k} \psi_i(t). \tag{4.10}$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{i=j}^{k} N_i(t) = 1, \quad \text{когда} \quad t \in [\tau_j, \tau_k]. \tag{4.11}$$

Поэтому из (4.10), (4.6), (4.11), (4.2) следует

$$\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_{k+1}} \psi(t)dt = \sum_{i=j}^{k} \int_{I_i} F(t)N_i(t)dt = \int_{\tau_j}^{\tau_k} F(t)\sum_{i=j}^{k} N_i(t)dt = 0.$$

Отсюда, используя $\operatorname{supp}\psi \subset [\tau_{j-1}, \tau_{k+1}]$, имеем $\|\psi\|_{H^1} \leq \|\psi\|_\infty(\tau_{k+1}-\tau_{j-1})$. Чтобы оценить $\|\psi\|_\infty$ рассмотрим два подслучая: $k-j \leq 3$ и $k-j \geq 4$. В первом подслучае из регулярности последовательности $\mathcal{T}$ по парам с параметром γ мы будем иметь

$$|[\tau_{j-1}, \tau_{k+1}]| \sim_\gamma |[\tau_l, \tau_{l+2}]|, \text{ для } j-1 \leq l \leq k-1.$$

Следовательно, из (2.4) и $\|F\|_1 \leq 1$, получим

$$\sup|\psi(t)| \leq \max_{j-1\leq l\leq k+1}\{|\alpha_l|\} \leq \max_{j-1\leq l\leq k+1}|P(F)(\tau_l)| \leq \max_{\substack{j-1\leq l\leq k+1\\ s\leq t\leq u}}|K(t,\tau_l)| \leq \frac{C_\gamma}{\tau_{k+1}-\tau_{j-1}}.$$

Откуда получим оценку $\|\psi\|_{H^1} < C_\gamma$. Во втором подслучае мы имеем $[\tau_{j+1}, \tau_{k-1}] \subset [x,y] \subset [\tau_j, \tau_k]$ и $k-1 \geq (j+1)+2$. Следовательно, используя сильную регулярность по парам с параметром γ последовательности $\mathcal{T}$ и Лемму 2.1 получим $|\operatorname{supp}\psi| \subset [\tau_{j-1}, \tau_{k+1}]$ и

$$\sup|\psi(t)| \leq 3\sup|F(t)| \leq \frac{3}{\tau_{k-1}-\tau_{j+1}} \leq \frac{C_\gamma}{\tau_{k+1}-\tau_{j-1}},$$

откуда будем иметь $\|\psi\|_{H^1} \leq C_\gamma$.

Итак, для завершения доказательства теоремы достаточно оценить (см. (4.5)) $\|\frac{\alpha_1}{3}N_1^- + \frac{\alpha_n}{3}N_n^+ - P_1(F)\|_{H^1}$ в третьем случае. Из (4.6) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n}\int_R \psi_i(t)dt = \int_R F(t)\sum_{i=1}^{n} N_i(t)dt = \int_{\tau_1}^{\tau_n} F(t)dt = 0.$$

Следовательно, получаем

$$\int_R \left(\frac{\alpha_1}{3}N_1^-(t) + \frac{\alpha_n}{3}N_n^+(t) - P_1(F)(t)\right)dt = 0 \tag{4.12}$$

Используя (2.4), неравенство $\|F\|_1 \leq 1$ и условие (ii) из Теоремы 4.1 получаем

$$|\alpha_1| \leq \frac{C_\theta}{\tau_{n+1}-\tau_0}, \quad |\alpha_n| \leq \frac{C_\theta}{\tau_{n+1}-\tau_0}. \tag{4.13}$$

Теперь оценим $P_1(F)(t)$. Так как в этом случае $\mathrm{supp}F \subset [\tau_1, \tau_k] \subset [\tau_1, \tau_n]$, и $\sum\limits_{i=1}^{n} N_i(\tau) = 1$, для $\tau \in [\tau_1, \tau_n]$ следовательно, имеем

$$\int_R F(\tau) \sum_{i=1}^{n} N_i(\tau) d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_n} F(\tau) d\tau = 0,$$

откуда используя (3.3), (3.4) (см. также (2.15), (2.14)), получим

$$|P_1(F)(t)| = \tag{4.14}$$

$$\left| 2 \int_R F(\tau) \sum_{i=1}^{n} N_i(t) a_i \sum_{m=1}^{n} N_m(\tau) \left(\frac{\lambda_1}{6} K(\tau_1, \tau_m) + \frac{\lambda_{n+1}}{6} K(\tau_n, \tau_m) \right) d\tau \right| \leq$$

$$2 \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq m \leq n}} |a_i| \cdot \left| \frac{\lambda_1}{6} K(\tau_1, \tau_m) + \frac{\lambda_{n+1}}{6} K(\tau_n, \tau_m) \right| \leq \frac{C}{\tau_{n+1} - \tau_0}.$$

Из (4.13), (4.14) следует

$$\left| \frac{\alpha_1}{3} N_1^-(t) + \frac{\alpha_n}{3} N_n^+(t) - P_1(F)(t) \right| \leq \frac{C_\theta}{\tau_{n+1} - \tau_0},$$

которое комбинируя с (4.12) получим

$$\left\| \frac{\alpha_1}{3} N_1^- + \frac{\alpha_n}{3} N_n^+ - P_1(F) \right\|_{H^1} \leq C_\theta.$$

Теорема 4.1 доказана. □

Замечание 4.1. *Несмотря на то, что определения системы Франклина на $[0, 1]$ и на R с нулевым интегралом аналогичны, однако, необходимые и достаточные условия для базисности этих систем соответственно в пространствах $H^1[0, 1]$ и $H^1(R)$ не аналогичны. В работе [10] доказано, что общая система Франклина является базисом в $H^1[0, 1]$, тогда и только тогда, когда порождающая последовательность $\mathcal{T}$ является регулярной по парам. Для периодической общей системы Франклина теорема такого же характера доказана в [11].*

Пример последовательности удовлетворяющий условиям (i), (ii) Теоремы 4.1. Пусть ξ_m, $m = 1, 2, ...$, возрастающая последовательность положительных чисел. Определим допустимую последовательность $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ следующим образом. На первом шаге положим $t_0 = 0$, $t_1 = -\xi_1$, $t_2 = \xi_1$. На втором шаге добавим точки $t_3 = -\xi_2$, $t_4 = -\xi_1/2$, $t_5 = \xi_1/2$, $t_6 = \xi_2$, допустим $\mathcal{T}_{2^n-2} = \{t_i : 0 \leq i \leq 2^n - 2\}$ определено. На n-ом шаге положим $t_{2^n-1} = -\xi_n$, Потом добавим слева на право средние точки интервалов образованные точками $\mathcal{T}_{2^n-2}$. И положим $t_{2^{n+1}-2} = \xi_n$. Продолжая так до бесконечности получим допустимую последовательность $\mathcal{T}$. Ясно, что если

$$(4.15) \qquad 0 < \inf_{m>1} \frac{\xi_{m+1} - \xi_m}{\xi_m - \xi_{m-1}} \quad \text{и} \quad \sup_{m>1} \frac{\xi_{m+1} - \xi_m}{\xi_m - \xi_{m-1}} < \infty,$$

тогда последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярна (следовательно, и сильно регулярна по парам). Очевидно, что последовательность $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию (ii), тогда и только тогда

$$(4.16) \qquad \inf_{m>1} \frac{\xi_m}{\xi_{m-1}} > 1.$$

Так как для $\xi_m = s^m$, при $s > 1$, условия (4.15), (4.16) удовлетворены, следовательно, последовательность $\mathcal{T}$ определенная как выше для $\xi_m = s^m$, при $s > 1$, будет удовлетворять условиям Теоремы 4.1, а соответствующая система Франклина с нулевым средними $\{F_n(t)\}_{n=2}^{\infty}$ будет базисом в $H^1(R)$.

Abstract. For an admissible sequence $\mathcal{T}$ we define an orthonormal system consisting of piecewise linear functions with vanishing integrals on R. Necessary and sufficient conditions on $\mathcal{T}$ are found for the corresponding system to be a basis in $H^1(R)$.

Список литературы

[1] Г. Г. Геворкян, К. А. Керян, "Об одном обобщении общей системы Франклина на R", Известия НАН Армении, Серия Математика, **40**, no.6, 29-42 (2014).

[2] Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions", Funct. Approx. Comment. Math. **25**, 129 – 143 (1997).

[3] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) **374**, 1 – 59 (1998).

[4] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin system in $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$", Studia Math. **164**, 161 – 204 (2004).

[5] Г. Г. Геворкян, К. А. Керян "Об одном базисе пространства $H^1(R)$, состоящем из кусочно линейных функций", Доклады НАН Армении, **114**, no. 3, 187 – 191 (2014).

[6] Ph. Franklin, "A set of continuos orthogonal functions", Math. Ann. **100**, 522 – 528 (1928).

[7] J. O. Stromberg, "A modified Franklin system and higher-order spline systems on R^n as unconditional bases for Hardy spaces", Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, vol. I, II, Chicago, Ill., 475 – 494 (1981).

[8] C. Fefferman, E. M. Stein, "H^p spaces of several variables", Acta Mathematica, 129, 137 – 193 (1972).

[9] R. R. Coifman, "A real variable characterization of H^p", Studia Math., **51**, 269 – 274 (1974).

[10] G.G Gevorkyan, A. Kamont, "General Franklin system as bases in $H^1[0,1]$", Studia Math. **167**, 259 – 292 (2005).

[11] K. A. Keryan, M. P. Pogosyan, "A general Franklin periodic system as a basis in $H^1[0,1]$", Известия НАН Армении, Серия Математика, **40**, no. 1, 56 – 79 (2005).

Поступила 27 апреля 2015