

СРАВНЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. П. МАРГАРЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет

E-mail: vachagan.margaryan@yahoo.com

Аннотация. В работе найдено необходимое и достаточное алгебраическое условие для сравнения с весом двумерных многочленов.

MSC2010 numbers: 12E10, 26C05.

Ключевые слова: сравнение (с весом) многочленов; гиперболичность с весом; слабая гиперболичность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть N - множество натуральных чисел $N_0 = N \cup \{0\}$, N_0^n - множество $n \in N$ мерных мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\alpha_j \in N_0$ $j = 1, \dots, n$, R^n - n -мерное вещественное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $R_+^n = \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n\}$, $R_0^n = \{\xi \in R^n, \xi_1 \cdots \xi_n \neq 0\}$, $C = R \times iR$ ($i^2 = -1$). Для любых $\xi, \eta \in R^n$, $\nu \in R_+^n$, $t > 0$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим $\|\xi\| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}$, $(\xi, \eta) = \xi_1 \cdot \eta_1 + \dots + \xi_n \cdot \eta_n$, $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n$, $|\xi|^\nu = |\xi_1|^{\nu_1} \cdots |\xi_n|^{\nu_n}$, $t \cdot \xi = (t \cdot \xi_1, \dots, t \cdot \xi_n)$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$ и $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial \xi_j$, $j = 1, \dots, n$.

Характеристическим многогранником (х.м.) конечного набора $A \subset R_+^n$ называется минимальный выпуклый многогранник $\mathcal{R} \subset R_+^n$ содержащий множество $A \cup \{0\}$. Многогранник $\mathcal{R} \subset R_+^n$ называется полный, если $\mathcal{R}$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершину на каждой оси координат. Полный многогранник $\mathcal{R} \subset R_+^n$ называется вполне правильным (в.п.), если компоненты всех внешних (относительно $\mathcal{R}$) $(n-1)$ -мерных некоординатных граней положительны.

Для в.п. многогранника $\mathcal{R}$ через $\Lambda(\mathcal{R})$ обозначим множество нормалей $(n-1)$ -мерных некоординатных граней $\mathcal{R}$

$$\Lambda(\mathcal{R}) = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \min\{\lambda_j, j = 1, \dots, n\} = 1\}.$$

Через B обозначим множество тех в.п. многогранников $\mathfrak{R}$ для которых

$$\max\{(\nu, \lambda) : \nu \in \mathfrak{R}\} \leq 1 \quad \forall \lambda \in \Lambda(\mathfrak{R}).$$

Для многогранника $\mathfrak{R} \in B$ обозначим:

$\mathfrak{R}^0$ - множество вершин $\mathfrak{R}$,

$$\partial \mathfrak{R} = \{\nu \in \mathfrak{R} : \exists \lambda \in \Lambda(\mathfrak{R}), (\nu, \lambda) = \max\{(\mu, \lambda), \mu \in \mathfrak{R}\}\}$$

и сопоставим следующую функцию

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi) \equiv \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi|^\nu.$$

Известно (см. например [1] или [2]), что многогранник $\mathfrak{R}$ является х.м. набора $\mathfrak{R}^0$. Числа

$$\rho_0(\mathfrak{R}) = \max\{|\nu| : \nu \in \mathfrak{R}^0\} \text{ и } \rho_1(\mathfrak{R}) = \min\{|\nu| : 0 \neq \nu \in \mathfrak{R}^0\}$$

называется соответственно максимальным и минимальным порядком функции $h_{\mathfrak{R}}$. Так как, очевидно, $0 \in \mathfrak{R}^0$ ($\mathfrak{R} \in B$), то с некоторой постоянной $c \geq 1$

$$(1.1) \quad c^{-1} \cdot (1 + \|\xi\|)^{\rho_1(\mathfrak{R})} \leq h_{\mathfrak{R}}(\xi) \leq c \cdot (1 + \|\xi\|)^{\rho_0(\mathfrak{R})} \leq c \cdot (1 + \|\xi\|) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$, $\gamma_{\alpha} \in C$, многочлен, где сумма распространяется по конечному набору $(P) = \{\alpha \in N_0^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$.

Представим многочлен P в виде суммы

$$(1.2) \quad P(\xi) = \sum_{j=0}^m P_j(\xi),$$

где $m = \max\{|\alpha| : \alpha \in (P)\}$ - порядок многочлена P , а P_j - однородный многочлен порядка j , $j = 0, \dots, m$.

Точка $\tau \in R^n$ называется нулем многочлена P порядка $l(\tau) \in N_0$, если

$$P^{(\alpha)}(\tau) := (D^{\alpha} P)(\tau) = 0 \quad \forall \alpha \in N_0^n, \quad |\alpha| < l(\tau) \quad \text{и} \quad \sum_{|\alpha|=l(\tau)} |P^{(\alpha)}(\tau)| \neq 0.$$

По определению при $P(\tau) \neq 0$ будем считать, что $l(\tau) = 0$. Для однородного многочлена P_m порядка m обозначим $\Sigma(P_m) = \{\tau \in R^n, \|\tau\| = 1, P_m(\tau) = 0\}$.

Определение 1.1. (см. [3], определение 10.3.4). Будем говорить, что многочлен Q слабее многочлена P и записывать $Q \prec P$, если с некоторой постоянной $c > 0$ $\tilde{Q}(\xi, 1) \leq c \cdot \tilde{P}(\xi, 1)$ при всех $\xi \in R^n$, где для данного многочлена q и числа $t > 0$

$$\tilde{q}(\xi, t) = \sqrt{\sum_{\alpha \in N_0^n} |q^{(\alpha)}(\xi)|^2 \cdot t^{2|\alpha|}}.$$

Определение 1.2. Для $\mathfrak{R} \in B$ многочлен Q $h_{\mathfrak{R}}$ слабее многочлена P и будем использовать запись $Q \stackrel{h_{\mathfrak{R}}}{\prec} P$, если с некоторой постоянной $c > 0$

$$\tilde{Q}(\xi, h_{\mathfrak{R}}(\xi)) \leq c \cdot \tilde{P}(\xi, h_{\mathfrak{R}}(\xi)) \quad \forall \xi \in R^n.$$

Определение 1.3. (см. [4] или [3]). Будем говорить, что многочлен P представленный в виде (1.2) гиперболичен (по Гордингу) относительно вектора $0 \neq \eta \in R^n$, если $P_m(\eta) \neq 0$ и существует постоянная $c \in R$ для которого $P(\xi + i \cdot t \cdot \eta) \neq 0$ при всех $t < c$ и $\xi \in R^n$.

Определение 1.4. (см. [5]). Для $\mathfrak{R} \in B$ будем говорить, что многочлен P представленный в виде (1.2) $h_{\mathfrak{R}}$ гиперболичен относительно вектора $0 \neq \eta \in R^n$, если $P_m(\eta) \neq 0$ и существует постоянная $c \in R$ для которого $P(\xi + i \cdot t \cdot \eta) \neq 0$ при $t < c \cdot h_{\mathfrak{R}}(\xi)$, $\xi \in R^n$.

Известно (см. [5] или [6] при $\eta = (1, 0, \dots, 0)$), что если многочлен P $h_{\mathfrak{R}}$ гиперболичен относительно вектора η , то его главная часть P_m гиперболична по Гордингу относительно η . В работах [5]-[7] найдены достаточные условия на младшие члены многочлена P при выполнении которых многочлен становится $h_{\mathfrak{R}}$ гиперболическим относительно вектора η , если P_m гиперболичен по Гордингу относительно η . В работах [3] и [8] доказано, что многочлен P гиперболичен по Гордингу относительно вектора η тогда и только тогда, когда гиперболичен по Гордингу относительно η многочлен P_m и $P_j \prec P_m$ $j = 0, \dots, m-1$.

Цель настоящей работы найти необходимое и достаточное условие на многочлен Q от двух переменных, чтобы Q было $h_{\mathfrak{R}}$ слабее $\mathfrak{R} \in B$ заданного однородного многочлена.

В следующих параграфах будем считать, что $n = 2$ и рассматриваемые многочлены являются многочленами от двух $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ переменных.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предложение 2.1. Пусть $\mathfrak{R} \in B$ и

$$\chi_r(\mathfrak{R}) = \min_{\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})} \max_{\nu \in \mathfrak{R}} (\nu, \lambda) / \lambda_r \quad r = 1, 2.$$

Тогда

- (1) $1 \geq \rho_0(\mathfrak{R}) \geq \rho_1(\mathfrak{R}) > 0$,
- (2) $\mathfrak{R} \subset \{\nu \in R_+^2 : |\nu| \leq 1\}$,
- (3) для любого $\nu \in \mathfrak{R} \cup R_0^2$ $\nu_r < \chi_r(\mathfrak{R})$ $r = 1, 2$,

$$(4) (\chi_1(\mathcal{R}), 0), (0, \chi_2(\mathcal{R})) \in \mathcal{R}^0.$$

Доказательство. тривиально и поэтому не приводится. $\square$

Лемма 2.1. Пусть $B \in \mathcal{R}$. Тогда

- (1) $\chi_1(\mathcal{R}) = a_1 := \sup\{\nu_1/(1 - \nu_2) : \nu \in \partial\mathcal{R}, \nu_2 < 1\},$
- (2) $\chi_2(\mathcal{R}) = a_2 := \sup\{\nu_2/(1 - \nu_1) : \nu \in \partial\mathcal{R}, \nu_1 < 1\}.$

Доказательство. Так как утверждение пункта 1 доказывается аналогично утверждению пункта 2, то мы докажем только пункт 2.

Пусть наоборот $a_2 \neq \chi_2(\mathcal{R})$. Так как в силу пункта 4 предложения 2.1 $a_2 \geq \chi_2(\mathcal{R})$, то это означает, что $a_2 > \chi_2(\mathcal{R})$. Тогда из определений чисел a_2 и $\chi_2(\mathcal{R})$ существуют точка $\nu^0 \in \partial\mathcal{R}$, $\nu_1^0 < 1$ и вектор $\lambda^0 \in \Lambda(\mathcal{R})$ для которых

$$\nu_2^0/(1 - \nu_1^0) > \max\{(\nu, \lambda^0)/\lambda_2^0 : \nu \in \mathcal{R}\} =: \theta_0/\lambda_2^0,$$

или, что тоже самое $\nu_1^0 \cdot \theta_0 + \nu_2^0 \lambda_2^0 > \theta_0$. Так как $\lambda_1^0 \geq 1 \geq \theta_0$ (см. определение множества B), то отсюда получаем, что $(\nu^0, \lambda^0) > \theta_0$, т.е. $\nu^0 \notin \mathcal{R}$. Так как $\partial\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$, то это противоречит условию $\nu^0 \in \partial\mathcal{R}$ и доказывает, что $a_2 = \chi_2(\mathcal{R})$. Лемма 2.1 доказана. $\square$

Замечание 2.1. Пусть $\mathcal{R} \in B$. Тогда в силу пункта 4 предложения 2.1

- 1'. $\chi_1(\mathcal{R}) = \max\{\nu_1/(1 - \nu_2) : \nu \in \partial\mathcal{R}, \nu_2 < 1\},$
- 2'. $\chi_2(\mathcal{R}) = \max\{\nu_2/(1 - \nu_1) : \nu \in \partial\mathcal{R}, \nu_1 < 1\}.$

Для многоугольника $\mathcal{R} \in B$ обозначим

$$E_1(\mathcal{R}) = \{\delta : f_{\mathcal{R}}(\delta) := \max\{\nu_1 + \delta \cdot \nu_2 : \nu \in \mathcal{R}^0\} \leq \chi_1(\mathcal{R})\},$$

$$E_2(\mathcal{R}) = \{\delta : g_{\mathcal{R}}(\delta) := \max\{\delta \cdot \nu_1 + \nu_2 : \nu \in \mathcal{R}^0\} \leq \chi_2(\mathcal{R})\},$$

$$\bar{\chi}_r(\mathcal{R}) = \sup\{\delta : \delta \in E_r(\mathcal{R})\} \quad r = 1, 2.$$

Нетрудно заметить, что для любого $\mathcal{R} \in B$, $0 \leq \bar{\chi}_r(\mathcal{R}) \leq 1$ $r = 1, 2$ и в силу замкнутости множества $E_r(\mathcal{R})$ $\bar{\chi}_r(\mathcal{R}) \in E_r(\mathcal{R})$ $r = 1, 2$.

Лемма 2.2. Пусть $\mathcal{R} \in B$. Тогда

- (1) $\bar{\chi}_r(\mathcal{R}) \geq \chi_r(\mathcal{R}) \quad r = 1, 2,$
- (2) $f_{\mathcal{R}}(\delta) = \chi_1(\mathcal{R})$ при $\delta \leq \bar{\chi}_1(\mathcal{R})$, $\chi_1(\mathcal{R}) < f_{\mathcal{R}}(\delta) < \delta$ и $f_{\mathcal{R}}(\delta) \leq \rho_0(\mathcal{R})$ при $\delta \in (\bar{\chi}_1(\mathcal{R}), 1]$,
- (3) $g_{\mathcal{R}}(\theta) = \chi_2(\mathcal{R})$ при $\theta \leq \bar{\chi}_2(\mathcal{R})$, $\chi_2(\mathcal{R}) < g_{\mathcal{R}}(\theta) < \theta$ и $g_{\mathcal{R}}(\theta) \leq \rho_0(\mathcal{R})$ при $\theta \in (\bar{\chi}_2(\mathcal{R}), 1]$.

Доказательство. Покажем, что $\bar{\chi}_1(\mathbb{R}) \geq \chi_1(\mathbb{R})$. Доказательство $\bar{\chi}_2(\mathbb{R}) \geq \chi_2(\mathbb{R})$ аналогично. Так как $f_{\mathbb{R}}$ монотонно возрастающая функция, то для доказательства неравенства $\bar{\chi}_1(\mathbb{R}) \geq \chi_1(\mathbb{R})$ достаточно показать, что $f_{\mathbb{R}}(\chi_1(\mathbb{R})) \leq \chi_1(\mathbb{R})$. В силу замечания 2.1 имеем

$$\chi_1(\mathbb{R}) \geq \nu_1 + \chi_1(\mathbb{R}) \cdot \nu_2 \quad \forall \nu \in \partial \mathbb{R}, \quad \nu_2 < 1,$$

и для некоторого $\nu^0 \in \partial \mathbb{R}$, $\nu_2^0 < 1$ $\chi_1(\mathbb{R}) = \nu_1^0 + \chi_1(\mathbb{R}) \cdot \nu_2^0$. Отсюда получаем, что

$$\chi_1(\mathbb{R}) = \sup\{\nu_1 + \chi_1(\mathbb{R}) \cdot \nu_2 : \nu \in \partial \mathbb{R}, \nu_2 < 1\}.$$

Так как $\nu_1 + \chi_1(\mathbb{R}) \cdot \nu_2$ непрерывно по ν и $\chi_1(\mathbb{R}) > 0$, то отсюда получаем, что $\chi_1(\mathbb{R}) = \sup\{\nu_1 + \chi_1(\mathbb{R}) \cdot \nu_2 : \nu \in \partial \mathbb{R}\} = \max\{\nu_1 + \chi_1(\mathbb{R}) \cdot \nu_2, \nu \in \mathbb{R}^0\} = f_{\mathbb{R}}(\chi_1(\mathbb{R}))$, следовательно $\bar{\chi}_1(\mathbb{R}) \geq \chi_1(\mathbb{R})$.

Из определения числа $\bar{\chi}_1(\mathbb{R})$, замкнутости $E_1(\mathbb{R})$ и монотонности $f_{\mathbb{R}}$ непосредственно следует, что $f_{\mathbb{R}}(\delta) > \chi_1(\mathbb{R})$ при $\delta > \bar{\chi}_1(\mathbb{R})$. Так как, очевидно, при $\delta \leq 1$ $f_{\mathbb{R}}(\delta) \leq \rho_0(\mathbb{R})$, то для завершения доказательства пункта 2 остается показать, что

$$f_{\mathbb{R}}(\delta) < \delta \quad \text{при} \quad \delta \in (\bar{\chi}_1(\mathbb{R}), 1].$$

Пусть $\delta \in (\bar{\chi}_1(\mathbb{R}), 1]$, следовательно $\delta > \chi_1(\mathbb{R})$. Тогда в силу леммы 2.1 $\delta > \sup\{\nu_1/(1-\nu_2) : \nu \in \partial \mathbb{R}, \nu_2 < 1\}$. Отсюда получаем, что при всех $\nu \in \partial \mathbb{R}$, $\nu_1 + \delta \nu_2 < \delta$.

Так как $\mathbb{R}^0 \subset \partial \mathbb{R}$, то отсюда получаем, что $f_{\mathbb{R}}(\delta) < \delta$. Поскольку утверждение пункта 3 доказывается аналогично утверждению пункта 2, то этим лемма 2.2 доказана. $\square$

Предложение 2.2. Пусть $\mathbb{R} \in B$, $\delta < 1$, $x(t) > 0$ $t \geq 1$ локально ограниченная функция для которой $t^\varepsilon \cdot x(t) \rightarrow \infty$, $t^{-\varepsilon} \cdot x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, $\tau, \eta \in R^2$, $\|\tau\| = \|\eta\| = 1$, $(\tau, \eta) = 0$ и $\xi(t) = t \cdot \tau + t^\delta \cdot x(t) \cdot \eta$.

Тогда с некоторой постоянной $c \geq 1$ при $t \geq 1$

$$1) \quad c^{-1} \cdot t^{\rho_0(\mathbb{R})} \leq h_{\mathbb{R}}(\xi(t)) \leq c \cdot t^{\rho_0(\mathbb{R})} \quad \text{если} \quad \tau \in R_0^2,$$

$$2.a) \quad c^{-1} \cdot t^{\chi_1(\mathbb{R})} \leq h_{\mathbb{R}}(\xi(t)) \leq c \cdot t^{\chi_1(\mathbb{R})} \quad \text{при} \quad \delta < \chi_1(\mathbb{R}), \quad \text{при} \quad \tau = \pm(1, 0)$$

$$2.b) \quad c^{-1} \cdot (t^{\chi_1(\mathbb{R})} + t^{f_{\mathbb{R}}(\delta)} \cdot \min\{1, x(t)\}) \leq h_{\mathbb{R}}(\xi(t)) \leq c \cdot (t^{f_{\mathbb{R}}(\delta)} \cdot \max\{1, x(t)\}) \quad \text{при} \\ \delta \geq \chi_1(\mathbb{R}), \quad \text{если} \quad \tau = \pm(1, 0),$$

$$3.a) \quad c^{-1} \cdot t^{\chi_2(\mathbb{R})} \leq h_{\mathbb{R}}(\xi(t)) \leq c \cdot t^{\chi_2(\mathbb{R})} \quad \text{при} \quad \delta < \chi_2(\mathbb{R}), \quad \text{если} \quad \tau = \pm(0, 1),$$

$$3.b) \quad c^{-1} \cdot (t^{\chi_2(\mathbb{R})} + t^{g_{\mathbb{R}}(\delta)} \cdot \min\{1, x(t)\}) \leq h_{\mathbb{R}}(\xi(t)) \leq c \cdot (t^{g_{\mathbb{R}}(\delta)} \cdot \max\{1, x(t)\}) \quad \text{при} \\ \delta \geq \chi_2(\mathbb{R}), \quad \text{если} \quad \tau = \pm(0, 1).$$

Доказательство. непосредственно следует из определений функций $h_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}}, g_{\mathbb{R}}$, чисел $\rho_0(\mathbb{R}), \chi_1(\mathbb{R}), \chi_1(\mathbb{R})$ и пунктов 2 и 4 предложения 2.1. $\square$

Предложение 2.3. Пусть для неотрицательного однородного многочлена P_m порядка m $\tau \in \sum(P_m)$. Тогда

$$Q_{l(\tau)}(\xi) = \sum_{|\alpha|=l(\tau)} \frac{P_m^{(\alpha)}(\tau) \cdot \xi^\alpha}{\alpha!} \geq 0 \quad \forall \xi \in R^2,$$

где $l(\tau)$ - порядок нуля многочлена P_m в точке τ .

Доказательство. Предположим обратное, что при условии предложения, существует точка $\xi^0 \in R^2$ для которого $Q_{l(\tau)}(\xi^0) < 0$. Так как по формуле Тейлора для любого $t > 0$ в силу определения $l(\tau)$

$$P_m(\tau + t \cdot \xi^0) = \sum_{\alpha \in N_0^2} \frac{P_m^{(\alpha)}(\tau) \cdot (t \cdot \xi^0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{r=l(\tau)}^m t^r \cdot \sum_{|\alpha|=r} \frac{P_m^{(\alpha)}(\tau) \cdot (\xi^0)^\alpha}{\alpha!} := \sum_{r=l(\tau)}^m t^r Q_r(\xi^0),$$

то из условия $Q_{l(\tau)}(\xi^0) < 0$ при малых $t > 0$ имеем, что

$$P_m(\tau + t \cdot \xi^0) < \frac{1}{2} t^{l(\tau)} Q_{l(\tau)}(\xi^0) < 0.$$

Это противоречит условию предложения и доказывает, что при условиях предложения $Q_{l(\tau)}(\xi) \geq 0$ при всех $\xi \in R^2$. Предложение 2.3 доказано. $\square$

Предложение 2.4. Пусть $P_{m_0} \geq 0, P_{m_1} \geq 0$ однородные многочлены соответственно порядка m_0 и m_1 . Тогда для любого $\tau \in R^2, \|\tau\| = 1$ $l(\tau) = \min\{l_0(\tau), l_1(\tau)\}$, где $l(\tau), l_0(\tau)$ и $l_1(\tau)$ порядки нуля в точке τ соответственно для многочленов $P_{m_0} + P_{m_1}, P_{m_0}$ и P_{m_1} .

Доказательство. Так как утверждение предложения очевидно при $\tau \notin \sum(P_{m_0}) \cup \sum(P_{m_1})$ и при $l_0(\tau) \neq l_1(\tau)$, когда $\tau \in \sum(P_{m_0}) \cup \sum(P_{m_1})$, то пусть $\tau \in \sum(P_{m_0}) \cup \sum(P_{m_1})$ и $l_0(\tau) = l_1(\tau)$.

Предположим обратное, что $l(\tau) \neq l_0(\tau) = l_1(\tau)$. Так как очевидно $l(\tau) \geq \min\{l_0(\tau), l_1(\tau)\}$, то это означает, что $l(\tau) > l_0(\tau) = l_1(\tau)$. Тогда из определения порядка нуля имеем, что

$$(2.1) \quad P_{m_0}^{(\alpha)}(\tau) + P_{m_1}^{(\alpha)}(\tau) = 0 \quad \forall \alpha \in N_0^2, \quad |\alpha| \leq l_0(\tau).$$

Так как в силу предложения 2.3

$$Q_{l_0(\tau)} = \sum_{|\alpha|=l_0(\tau)} \frac{P_{m_0}^{(\alpha)}(\tau) \xi^\alpha}{\alpha!} \geq 0, \quad \xi \in R^2,$$

$$\Gamma_{l_1(\tau)} = \sum_{|\alpha|=l_1(\tau)} \frac{P_{m_1}^{(\alpha)}(\tau) \xi^\alpha}{\alpha!} \geq 0, \quad \xi \in R^2,$$

то учитывая, что $l_0(\tau) = l_1(\tau)$ в силу (2.1) получаем, что $Q_{l_0(\tau)} = 0$ ($\Gamma_{l_0(\tau)} = 0$), т.е.

$$P_{m_0}^{(\alpha)}(\tau) = 0 \quad \forall \alpha \in N_0^2, \quad |\alpha| = l_0(\tau).$$

Так как в силу определения $l_0(\tau)$

$$P_{m_0}^{(\alpha)}(\tau) = 0 \quad \forall \alpha \in N_0^2, \quad |\alpha| < l_0(\tau),$$

то это противоречит определению $l_0(\tau)$. Полученное противоречие доказывает справедливость предложения 2.4. $\square$

Следствие 2.1. Пусть P_m - однородный многочлен порядка m и $\tau \in \sum(P_m)$. Тогда для любого $r \in N_0$, $r < l(\tau)$ ($l(\tau)$ порядок нуля многочлена P_m в точке τ) порядок нуля многочлена

$$\sum_{|\alpha|=r} |P_m^{(\alpha)}(\xi)|^2$$

в точке τ равна $2(l(\tau) - r)$.

Доказательство. непосредственно следует из предложения 2.4. $\square$

Лемма 2.3. Пусть $\mathfrak{R} \in B$, P многочлен представленный в виде (1.2) и $\eta \in R^2 \setminus \sum(P_m)$, $\|\eta\| = 1$. Тогда для любого многочлена Q порядка не выше m существуют числа $\varepsilon, c > 0$ для которых

$$\tilde{Q}(\xi, h_{\mathfrak{R}}(\xi)) \leq c \cdot \tilde{P}(\xi, h_{\mathfrak{R}}(\xi)) \quad \forall \xi \in D(\eta, \varepsilon),$$

где $D(\eta, \varepsilon) \equiv \{\xi \in R^2, \quad \|\xi/\|\xi\| - \eta\| < \varepsilon\}$.

Доказательство. Пусть

$$\varepsilon_0 = \inf_{\tau \in \sum(P_m)} \|\eta - \tau\|.$$

Так как множество $\sum(P_m)$ замкнуто и $\eta \notin \sum(P_m)$, то $\varepsilon_0 > 0$. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_0/2$. Так как по теореме Ваерштасса

$$\delta = \inf\{|P_m(\xi)|, \quad \|\xi\| = 1, \quad \|\xi - \eta\| < \varepsilon\} > 0,$$

то с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$ в силу левой части оценки (1.1) при всех достаточно больших $\xi \in D(\eta, \varepsilon)$ имеем, что

$$\tilde{P}(\xi, h_{\mathfrak{R}}(\xi)) \geq \frac{1}{2}(|P(\xi)| + h_{\mathfrak{R}}^m(\xi)) \geq c_1 \cdot (|P_m(\xi)| - \left| \sum_{j=0}^{m-1} P_j(\xi) \right| + 1) \geq$$

$$(2.2) \quad \geq c_1 \cdot (\|\xi\|^m \cdot \delta - \left| \sum_{j=0}^{m-1} \|\xi\|^j P_j(\xi/\|\xi\|) \right| + 1) \geq c_2 (\|\xi\|^m + 1).$$

Для многочлена Q в силу условия леммы с применением правой части оценки (1.1) с некоторыми постоянными $c_3, c_4 > 0$ при всех $\xi \in R^2$ имеем, что

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\xi, h_{\mathbb{R}}(\xi)) &= \sqrt{\sum_{\alpha \in N_0^2} |Q^{(\alpha)}(\xi)| \cdot h_{\mathbb{R}}^{2|\alpha|}(\xi)} \leq c_3 \sum_{|\alpha|=m} (1 + \|\xi\|)^{m-|\alpha|} \cdot (1 + \|\xi\|)^{|\alpha|} \leq \\ &\leq c_4 \cdot (1 + \|\xi\|)^m. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (2.2) непосредственно получаем утверждение Леммы 2.3. $\square$

Предложение 2.5. (см. [10]). Пусть P_m - однородный многочлен порядка m от двух переменных, $\tau \in \Sigma(P_m)$, $\eta \in R^2$, $\|\eta\| = 1$ и $(\tau, \eta) = 0$. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ для которого

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |D_{\eta}^{l(\tau)} P_m(\tau)| |(\xi, \tau)|^{m-l(\tau)} \cdot |(\xi, \eta)|^{l(\tau)} &\leq |P_m(\xi)| \leq \\ &\leq \frac{3}{2} |D_{\eta}^{l(\tau)} P_m(\tau)| |(\xi, \tau)|^{m-l(\tau)} \cdot |(\xi, \eta)|^{l(\tau)} \quad \forall \xi \in D(\tau, \varepsilon), \end{aligned}$$

где $l(\tau)$ порядок нуля многочлена P_m в точке τ , $D_{\eta}^{l(\tau)} P_m(\tau) \neq 0$ а D_{η} - производная по направлению η .

Доказательства следующих двух утверждений тривиальны, поэтому мы их опускаем.

Предложение 2.6. Для любых $m, l, r \in N_0$, $0 \leq r \leq l$ и $\delta, \rho \in R$

$$(1) \quad m - l + (l - r)\delta + \rho r \leq \max\{m - l(1 - \delta), m - l(1 - \rho)\},$$

$$(2) \quad \text{если } l \geq 2, \quad \delta \neq \rho \text{ то при всех } r: \quad 1 \leq r \leq l - 1$$

$$m - l + (l - r)\delta + \rho r < \max\{m - l(1 - \delta), m - l(1 - \rho)\}.$$

Предложение 2.7. Пусть $m_0, m_1, l_0, l_1 \in N_0$, $\delta_0 \in (0, 1)$, $m_0 \geq m_1$, $m_0 \geq l_0$, $m_1 \geq l_1$ и $m_0 - l_0(1 - \delta_0) \geq m_1 - l_1(1 - \delta_0)$. Тогда

$$(1) \quad m_0 - l_0(1 - \delta) \geq m_1 - l_1(1 - \delta) \quad \forall \delta \in (\delta_0, 1),$$

$$(2) \quad \text{если либо } m_0 > m_1 \text{ либо } m_0 - l_0(1 - \delta_0) > m_1 - l_1(1 - \delta_0), \text{ то}$$

$$m_0 - l_0(1 - \delta) > m_1 - l_1(1 - \delta) \quad \forall \delta \in (\delta_0, 1).$$

3. СРАВНЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть $\delta_0, \delta_1 \in (0, 1)$, $\delta_1 \geq \delta_0$, $f(\delta) = \delta_0$, $\delta \leq \delta_1$, $\delta_0 < f(\delta) < \delta$, $\delta \in (\delta_1, 1)$, $x(t)$, $t \geq 1$ локально ограниченная положительная функция для которой $t^\varepsilon x(t) \rightarrow \infty$, $t^{-\varepsilon} x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, $h(t, \delta)$ $t \geq 1$, $\delta < 1$ функция для которой с некоторой постоянной $c \geq 1$ при $t \geq 1$

$$(3.1) \quad c^{-1} \cdot t^{\delta_0} \leq h(t, \delta) \leq c \cdot t^{\delta_0} \quad \delta < \delta_0,$$

$$(3.2) \quad c^{-1}(t^{\delta_0} + t^{f(\delta)} \cdot \min\{1, x(t)\}) \leq h(t, \delta) \leq c \cdot t^{f(\delta)} \max\{1, x(t)\}, \quad \delta \in [\delta_0, 1].$$

Лемма 3.1. Пусть числа $m_0, m_1, l_0, l_1, \delta_0$ удовлетворяют условиям предложения 2.7 а f, x, h и δ_1 выше описанные функции и число. Тогда для любого $\delta < 1$

$$(3.3) \quad F(\delta) := \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} G_1(t)/G_2(t) < \infty,$$

$$\text{где } G_r(t) = \sum_{j=0}^{l_r} t^{m_r - l_r + (l_r - j)\delta} \cdot x^{l_r - j}(t) \cdot h^j(t, \delta), \quad r = 0, 1.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие возможные случаи 1) $\delta = \delta_0$, 2) $\delta < \delta_0$, 3) $\delta_0 < \delta < \delta_1$ (при $\delta_1 > \delta_0$) и 4) $\delta_1 < \delta < 1$.

В случае 1), в силу оценки (3.2) т.к. $f(\delta_0) = \delta_0$, с некоторой постоянной $c_1 > 0$ имеем

$$(3.4) \quad F(\delta_0) \leq c_1 \cdot \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m_1 - l_1 - 1(1 - \delta_0)} \cdot (1 + x^{l_1}(t))}{\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m_0 - l_0(1 - \delta_0)} \cdot (1 + x^{l_0}(t))}.$$

Если $m_1 - l_1(1 - \delta_0) < m_0 - l_0(1 - \delta_0)$, то в силу условия на функцию $x(t)$ отсюда получаем, что $F(\delta_0) = 0$. Если же $m_1 - l_1(1 - \delta_0) = m_0 - l_0(1 - \delta_0)$, то из условий $m_0 \geq m_1$ и $\delta_0 < 1$ имеем, что $l_0 \geq l_1$, следовательно $F(\delta_0) \leq 2c_1$. Этим выполнение соотношения (3.3) в случае 1) доказано.

Рассмотрим случай 2). Так как в этом случае $f(\delta) = \delta_0 > \delta$, то в силу оценки (3.1) и условия на функцию $x(t)$ с некоторыми постоянными $c_3 \geq c_2 \geq 1$ при достаточно больших t имеем, что

$$G_0(t) \geq c_2^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{l_0} t^{m_0 - l_0 + (l_0 - j)\delta + j\delta_0} \cdot x^{l_0 - j}(t) \geq c_3^{-1} \cdot t^{m_0 - l_0(1 - \delta_0)},$$

$$G_1(t) \leq c_2 \cdot \sum_{j=0}^{l_1} t^{m_1 - l_1 + (l_1 - j)\delta + j\delta_0} \cdot x^{l_1 - j}(t) \leq c_3 \cdot t^{m_1 - l_1(1 - \delta_0)}.$$

Откуда $F(\delta) \leq c_3^2$. Этим выполнение соотношения (3.3) и в случае 2) доказана.

Рассмотрим случай 3). Так как в этом случае $f(\delta) = \delta_0$, то в силу оценки (3.2) с некоторой постоянной $c_4 > 0$ имеем, что

$$F(\delta) \leq c_4 \cdot \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{l_1} t^{m_1-l_1+(l_1-j)\delta+\delta_0 \cdot j} \cdot x^{l_1-j}(t) \cdot (1+x^j(t))}{\sum_{j=0}^{l_0} t^{m_0-l_0+(l_0-j)\delta+\delta_0 \cdot j} \cdot x^{l_0-j}(t) \cdot [1+(\min\{1, x(t)\})^j]}$$

Так как в случае 3) $\delta > \delta_0$, то в силу предложения 2.6 и условия на функцию $x(t)$ отсюда с некоторой постоянной $c_5 > 0$ имеем, что

$$(3.5) \quad F(\delta) \leq c_5 \cdot \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{m_1-l_1(1-\delta)} \cdot x^{l_1}(t)}{t^{m_0-l_0(1-\delta)} \cdot x^{l_0}(t)}.$$

Если либо $m_0 > m_1$ либо $m_0 - l_0(1 - \delta_0) > m_1 - l_1(1 - \delta_0)$, то в силу предложения 2.7 и условия на функцию $x(t)$ имеем, что $F(\delta) = 0$. Если же $m_0 = m_1$, $m_0 - l_0(1 - \delta_0) = m_1 - l_1(1 - \delta_0)$ (см. усл. леммы), то $l_0 = l_1$ так как $\delta_0 < 1$ и по этому $F(\delta) \leq c_5$. Этим выполнение соотношения и в случае 3 доказана.

Рассмотрим случай 4). В силу оценки (3.2) с некоторой постоянной $c_6 > 0$ имеем, что

$$F(\delta) \leq c_6 \cdot \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{l_1} t^{m_1-l_1+(l_1-j)\delta+f(\delta)j} \cdot x^{l_1-j}(t) \cdot (1+x^j(t))}{\sum_{j=0}^{l_0} t^{m_0-l_0+(l_0-j)\delta} \cdot [t^{\delta_0 \cdot j} + t^{f(\delta)j}(\min\{1, x(t)\})^j] \cdot x^{l_0-j}(t)}$$

Так как в случае 4) $\delta_0 < f(\delta) < \delta$, то в силу предложения 2.6 и условия на функцию $x(t)$ с некоторой постоянной $c_7 > 0$ получаем оценку (3.5). Теперь проводя аналогичные рассуждения как после оценки (3.5) получим, что $F(\delta) < \infty$ и в случае 4). Лемма 3.1 доказана. $\square$

Теорема 3.1. Пусть $\mathfrak{R} \in B$, $\rho_0(\mathfrak{R}) < 1$, P_{m_0} и P_{m_1} однородные многочлены соответственно порядка $m_0 \geq m_1$. Многочлен P_{m_1} $h_{\mathfrak{R}}$ слабее многочлена P_{m_0} тогда и только тогда, когда

$$(3.6) \quad m_1 - l_1(\tau)(1 - \delta_0(\tau)) \leq m_0 - l_0(\tau)(1 - \delta_0(\tau)) \quad \forall \tau \in \sum(P_{m_0}),$$

где $l_0(\tau), l_1(\tau)$ порядки нуля в точке τ соответственно многочленов P_{m_0} и P_{m_1} , а

$$\delta_0(\tau) \equiv \begin{cases} \rho_0(\mathfrak{R}), & \text{если } \tau \in \sum(P_{m_0}) \cap R_0^2 \\ \chi_1(\mathfrak{R}), & \text{если } \tau \in \sum(P_{m_0}), \tau_2 = 0 \\ \chi_2(\mathfrak{R}), & \text{если } \tau \in \sum(P_{m_0}), \tau_1 = 0 \end{cases}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\tau \in \sum(P_{m_0})$, $\xi^s := s \cdot \tau + s^{\delta_0(\tau)} \eta$, $s = 1, 2, \dots$, где $\eta \in R^2$, $\|\eta\| = 1$ и $(\tau, \eta) = 0$. Не трудно заметить, что с некоторой постоянной $c_1 \geq 1$ имеем (см. определение $\delta_0(\tau)$)

$$(3.7) \quad c_1^{-1} \cdot s^{\delta_0(\tau)} \leq h_{\mathcal{R}}(\xi^s) \leq c_1 \cdot s^{\delta_0(\tau)}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Так как, в силу условия $\rho_0(\mathcal{R}) < 1$, для любого $\tau \in \sum(P_{m_0})$ $\delta_0(\tau) < 1$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ при достаточно больших s $\xi^s \in D(\tau, \varepsilon)$ (определение $D(\tau, \varepsilon)$ в лемме 2.3). Тогда в силу предложения 2.6 с некоторой постоянной $c_2 > 0$ при достаточно больших s имеем

$$(3.8) \quad \bar{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathcal{R}}(\xi^s)) \geq |P_{m_1}(\xi^s)| \geq c_2 \cdot s^{m_1 - l_1(\tau)} \cdot s^{l_1(\tau) \cdot \delta_0(\tau)}.$$

Для многочлена P_{m_0} с применением формулы Тейлора в силу оценки (3.7) с некоторыми постоянными $c_3, c_4 > 0$ при всех s имеем

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \bar{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathcal{R}}(\xi^s)) &\leq c_3 \left[\sum_{|\alpha| \leq l_0(\tau)} s^{m_0 - l_0(\tau) + (l_0(\tau) - |\alpha|)\delta_0(\tau)} \cdot s^{\delta_0(\tau)|\alpha|} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l_0(\tau) < |\alpha| \leq m_0} s^{m_0 - |\alpha|} \cdot s^{\delta_0(\tau) \cdot |\alpha|} \right] \leq c_4 \cdot s^{m_0 - l_0(\tau)(1 - \delta_0(\tau))} \end{aligned}$$

Так как по условию теоремы $P_{m_1} \stackrel{h_{\mathcal{R}}}{\prec} P_{m_0}$, то из оценок (3.8) - (3.9) непосредственно получаем неравенство (3.6). $\square$

Достаточность. Предположим обратное, что при условиях теоремы существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty} \subset R^2$, $\|\xi^s\| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ для которой

$$(3.10) \quad \bar{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathcal{R}}(\xi^s)) / \bar{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathcal{R}}(\xi^s)) \rightarrow \infty \quad \text{когда} \quad s \rightarrow \infty.$$

Так как $m_0 \geq m_1$, то отсюда не умоляя общности на основании леммы 3.1 имеем, что последовательность $\{\tau^s := \xi^s / \|\xi^s\|\}_{s=1}^{\infty}$ имеет предел и этот предел принадлежит множеству $\sum(P_{m_0})$. Пусть $\tau^s \rightarrow \tau \in \sum(P_{m_0})$ при $s \rightarrow \infty$, $\eta \in R^2$, $\|\eta\| = 1$ и $(\eta, \tau) = 0$. Так как векторы η, τ являются ортонормальным базисом в R^2 , то для любого $s = 1, 2, \dots$ существуют числа $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ такие, что

$$(3.11) \quad \xi^s = \varphi(s) \cdot \tau + \psi(s) \cdot \eta, \quad s = 1, 2, \dots$$

Очевидно, за счет выбора вектора η , можно считать (не умаляя общности), что $\psi(s) \geq 0$ при всех s . Так как $\tau^s \rightarrow \tau$ при $s \rightarrow \infty$, то из представления (3.11) следует, что $\varphi(s) / \|\xi^s\| \rightarrow 1$, $\psi(s) / \varphi(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Покажем, что при достаточно больших s $\psi(s) > 0$. Предположим обратное, что существует подпоследовательность последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$ которую так

же обозначим через $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ для которого $\psi(s) = 0$, $s = 1, 2, \dots$. Тогда с некоторой постоянной $c_5 > 0$ в силу следствия 1 имеем, что

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathbb{R}}(\xi^s)) &\leq \sqrt{\sum_{|\alpha|=l_0(\tau)} |P_{m_0}^{(\alpha)}(\xi^s)|^2 \cdot h_{\mathbb{R}}^{2|\alpha|}(\xi^s)} \geq \\ &\geq c_5 \cdot \varphi^{m_0-l_0(\tau)}(s) \cdot h_{\mathbb{R}}^{l_0(\tau)}(\xi^s), \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Так как, см. пункт 4) предложения 2.1 и определение чисел $\rho_0(\mathbb{R})$, $\delta_0(\tau)$, с некоторой постоянной $c_6 \geq 1$ при $\xi^s = \varphi(s) \cdot \tau$

$$(3.12) \quad c_6^{-1} \cdot \varphi^{\delta_0(\tau)} \leq h_{\mathbb{R}}(\xi^s) \leq c_6 \cdot \varphi^{\delta_0(\tau)}(s), \quad s = 1, 2, \dots$$

то отсюда с некоторой постоянной $c_7 > 0$ при всех $s = 1, 2, \dots$ имеем, что

$$(3.13) \quad \tilde{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathbb{R}}(\xi^s)) \geq c_7 \cdot \varphi^{m_0-l_0(\tau)(1-\delta_0(\tau))}(s).$$

Так как $\rho_0(\mathbb{R}) < 1$, то в силу средней части оценки (1.1), оценки (3.12) и определения $l_1(\tau)$ с некоторыми постоянными $c_8, c_9 > 0$ имеем, что

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathbb{R}}(\xi^s)) &\geq \sqrt{\sum_{l_1(\tau) \leq |\alpha| \leq m_1} |\varphi^{m_1-|\alpha|}(s) P_{m_1}^{(\alpha)}(\tau)|^2 \cdot h_{\mathbb{R}}^{2|\alpha|}(\xi^s)} \leq \\ (3.14) \quad &\leq c_8 \cdot \varphi^{m_1-l_1(\tau)}(s) \cdot h_{\mathbb{R}}^{l_1(\tau)}(\xi^s) \leq c_9 \cdot \varphi^{m_1-l_1(\tau)(1-\delta_0(\tau))}(s), \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Оценки (3.13) и (3.14) в силу неравенства (3.6) противоречат соотношению (3.10) и доказывают, что при достаточно больших s (не умаляя общности будем считать для всех s) $\psi(s) > 0$.

Пусть $\rho_s = \ln(\psi(s))/\ln \varphi(s)$, т.е. $\psi(s) = \varphi^{\rho_s}(s)$, $s = 1, 2, \dots$. Так как $\psi(s)/\varphi(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то не умаляя общности будем считать, что $\rho_s \leq 1$, $s = 1, 2, \dots$

Покажем, что при условия теоремы, если выполняется соотношение (3.10), то

$$(3.15) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \rho_s > 0.$$

Предположим обратное, что существует подпоследовательность последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ которую также обозначим через $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ для которого существует число $\delta \leq 0$ для которого $\rho_s \rightarrow \delta$ при $s \rightarrow \infty$. Так как для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших s $\xi^s \in D(\tau, \varepsilon)$, то с некоторыми постоянными $c_{10}, c_{11} > 0$ в силу следствия 2.1, предложений 2.2, 2.5 и определения числа $\delta_0(\tau)$ при достаточно больших s имеем

$$\tilde{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathbb{R}}(\xi^s)) \leq c_{10} \cdot \left[\sum_{r=0}^{l_1(\tau)} h_{\mathbb{R}}^r(\xi^s) \cdot \sum_{|\alpha|=r} |P_{m_1}^{(\alpha)}(\xi^s)| + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=l_1(\tau)+1}^{m_1} h_{\mathfrak{R}}^r(\xi^s) \cdot \sum_{|\alpha|=r} |P_{m_1}^{(\alpha)}(\xi^s)| \leq \\
 & \leq c_{11} \cdot \left[\sum_{r=0}^{l_1(\tau)} \varphi^{r \cdot \delta_0(\tau)}(s) \cdot \varphi^{m_1-l_1(\tau)}(s) \cdot (\varphi^{\rho^s}(s))^{l_1(\tau)-r} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{r=l_1(\tau)+1}^{m_1} \varphi^{r \cdot \delta_0(\tau)}(s) \cdot \varphi^{m_1-r}(s) \right].
 \end{aligned}$$

Так как $\rho_s \rightarrow \delta \leq 0$ при $s \rightarrow \infty$ и $0 < \delta_0(\tau) < 1$, то отсюда с некоторой постоянной $c_{12} > 0$ в силу средней части оценки (1.1) при достаточно больших s имеем, что

$$(3.16) \quad \bar{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) \leq c_{12} \cdot \varphi^{m_1-l_1(\tau)(1-\delta_0(\tau))}(s).$$

Аналогично для многочлена P_{m_0} с некоторыми постоянными $c_{13}, c_{14} > 0$ при достаточно больших s имеем, что

$$\begin{aligned}
 (3.17) \quad \bar{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) & \geq c_{13} \cdot \sum_{|\alpha|=l_0(\tau)} |P_{m_0}^{(\alpha)}(\xi^s)|^2 \cdot h_{\mathfrak{R}}^{l_0(\tau)}(\xi^s) \geq \\
 & \geq c_{14} \cdot \varphi^{m_0-l_0(\tau)(1-\delta_0(\tau))}(s).
 \end{aligned}$$

Оценки (3.16) и (3.17) в силу неравенства (3.6) противоречат соотношению (3.10) и доказывают справедливость (3.15).

Очевидно, за счет выбора подпоследовательности последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$, можно считать, что существует число $\delta \in (0, 1]$ для которого $\rho_s \rightarrow \delta$ при $s \rightarrow \infty$. Покажем, что $\delta < 1$. Пусть, наоборот, $\delta = 1$. Тогда из представления (3.11) имеем, что $\xi^s = \varphi(s)\tau + \varphi(s) \cdot \theta_s \cdot \eta$, где $\theta_s := \psi(s)/\varphi(s) = \varphi^{\rho_s-1}(s)$, $s = 1, 2, \dots$. Так как $\psi(s)/\varphi(s) \rightarrow \infty$, $\rho_s \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$, то

$$(3.18) \quad \theta_s \rightarrow 0, \quad \varphi^\varepsilon(s) \cdot \theta_s \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Из определений функции $h_{\mathfrak{R}}$ и числа $\rho_0(\mathfrak{R})$ с некоторой постоянной $c_{15} > 0$ при всех $s = 1, 2, \dots$ имеем, что

$$(3.19) \quad c_{15}^{-1} \cdot \theta_s \cdot \varphi^{\rho_0(\mathfrak{R})}(s) \leq h_{\mathfrak{R}}(\xi^s) \leq c_{15} \cdot \varphi^{\rho_0(\mathfrak{R})}(s).$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших s $\xi^s \in D(\tau, \varepsilon)$, то в силу предложения 2.5 с некоторой постоянной $c_{16} > 0$ при достаточно больших s имеем

$$(3.20) \quad \bar{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) \geq |P_{m_0}(\xi^s)| \geq c_{16} \cdot \varphi^{m_0}(s) \cdot \theta_s^{l_0(\tau)}.$$

Для многочлена P_{m_1} в силу предложения 2.5, следствия 2.1 и оценки (3.19) при достаточно больших s с некоторыми постоянными $c_{17}, c_{18} > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) &\leq c_{17} \cdot \left[\sum_{r=0}^{l_1(\tau)} h_{\mathfrak{R}}^r(\xi^s) \cdot \sum_{|\alpha|=r} |P_{m_1}^{(\alpha)}(\xi^s)| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=l_1(\tau)+1}^{m_1} h_{\mathfrak{R}}^r(\xi^s) \cdot \sum_{|\alpha|=r} |P_{m_1}^{(\alpha)}(\xi^s)| \right] \leq \\ &\leq c_{18} \cdot \left[\sum_{r=0}^{l_1(\tau)} \varphi^{r \cdot \delta_0(\tau)}(s) \cdot \varphi^{m_1-l_1(\tau)}(s) \cdot (\varphi(s)\theta_s)^{l_1(\tau)-r} + \sum_{r=l_1(\tau)+1}^{m_1} \varphi^{r \cdot \delta_0(\tau)}(s) \cdot \varphi^{m_1-r}(s) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу условия $\rho_0(\mathfrak{R}) < 1$ и соотношения (3.18), с некоторой постоянной $c_{19} > 0$ при достаточно больших s имеем

$$(3.21) \quad \tilde{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) \leq c_{19} \cdot \varphi^{m_1}(s) \cdot \theta_s^{l_1(\tau)}.$$

Если $m_0 > m_1$, то оценки (3.20) и (3.21) противоречат соотношению (3.10) в силу (3.18). Если же $m_0 = m_1$, то противоречие с соотношением (3.10) получается из соотношения (3.18) и неравенства (3.6), так как в этом случае $l_1(\tau) \geq l_0(\tau)$. Полученное противоречие доказывает, что $\delta \in (0, 1)$.

Пусть $\delta \in (0, 1)$. Тогда из представления (3.11) имеем, что $\xi^s = \varphi(s) \cdot \tau + \varphi^\delta(s) \cdot \theta_s \cdot \eta$, где $\theta_s := \varphi^{\rho_s - \delta}(s) = \psi(s)/\varphi^\delta(s)$ $s = 1, 2, \dots$. При этом для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$(3.22) \quad \varphi^\varepsilon(s) \cdot \theta_s \rightarrow \infty, \quad \varphi^{-\varepsilon}(s) \cdot \theta_s \rightarrow 0 \quad \text{когда} \quad s \rightarrow \infty.$$

Через $x(t)$ обозначим локально ограниченную функцию для которого $\theta_s = x(\varphi(s))$, а через $h(t, \delta)$ функцию $h_{\mathfrak{R}}(t \cdot \tau + t^\delta \cdot x(t) \cdot \eta)$. В силу предложения 2.2 функция $h(t, \delta)$ удовлетворяет оценкам (3.1), (3.2) с $f(\delta) = g_{\mathfrak{R}}(\delta)$ при $\tau = \pm(0, 1)$, $f(\delta) = f_{\mathfrak{R}}(\delta)$ при $\tau = \pm(1, 0)$, $\delta_0 = \delta(\tau)$, $\delta_1 = \bar{\chi}_1(\mathfrak{R})$ при $\tau = \pm(1, 0)$ и $\delta_1 = \bar{\chi}_2(\mathfrak{R})$ при $\tau = \pm(0, 1)$.

В силу предложения 2.6, следствия 2.1, соотношения (3.22) и средней части оценки (1.1) с некоторыми постоянными $c_j > 0$ $j = \overline{21, 23}$ при достаточно больших s имеем, что

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) &\leq c_{21} \left[\sum_{r=0}^{l_1(\tau)} \varphi^{m_1-l_1(\tau)}(s) \cdot (\varphi^\delta(s) \cdot \theta_s)^{l_0(\tau)-r} h^r(\varphi(s), \delta) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=l_1(\tau)+1}^{m_1} \varphi^{m_1-r}(s) \cdot h^r(\varphi(s), \delta) \right] \leq \end{aligned}$$

$$\leq c_{22} \cdot \sum_{r=0}^{l_1(\tau)} \varphi^{m_1-l_1(\tau)}(\varphi^\delta(s)\theta_s)^{l_1(\tau)-r} \cdot h^r(\varphi(s), \delta),$$

$$\bar{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) \geq c_{23} \cdot \sum_{r=0}^{l_0(\tau)} \varphi^{m_0-l_0(\tau)}(s) \cdot (\varphi^\delta(s)\theta_s)^{l_0(\tau)-r} \cdot h^r(\varphi(s), \delta).$$

Отсюда в силу леммы 2.4 получаем, что

$$\overline{\lim_{s \rightarrow \infty}} \bar{P}_{m_1}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) / \bar{P}_{m_0}(\xi^s, h_{\mathfrak{R}}(\xi^s)) < \infty.$$

Это противоречит соотношению (3.10) и доказывает достаточную часть теоремы.

Теорема 3.1 доказана. $\square$

Лемма 3.2. (см. [5]). Пусть $\mathfrak{R} \in B$ и P_{m_0} - однородный многочлен порядка m_0 . Многочлен Q представленный в виде (1.2) $h_{\mathfrak{R}}$ слабее многочлена P_{m_0} тогда и только тогда, когда 1) $m \leq m_0$ и 2) $Q_j \prec_{h_{\mathfrak{R}}} P_{m_0}$ $j = 0, \dots, m$.

Теорема 3.2. Пусть $\mathfrak{R} \in B$, $\rho_0(\mathfrak{R}) < 1$ и P_{m_0} однородный многочлен порядка m_0 . Многочлен Q представленный в виде (1.2) $h_{\mathfrak{R}}$ слабее многочлена P_{m_0} тогда и только тогда, когда

- (1) $m_0 \geq m$,
- (2) $m_0 - l_0(\tau)(1 - \delta_0(\tau)) \geq \max_{0 \leq k \leq m} \{k - \tilde{l}_k(\tau)(1 - \delta_0(\tau))\} \quad \forall \tau \in \sum(P_{m_0})$

где $l_0(\tau)$ и $\delta_0(\tau)$ определены в теореме 1 а $\tilde{l}_k(\tau)$ порядок нуля многочлена Q_k $k = 0, \dots, m$ в точке τ .

Доказательство. непосредственно следует из теоремы 3.1 в силу леммы 3.2. $\square$

Теорема 3.3. Пусть при условиях теоремы 2 $m_0 > m_1$ и многочлен P_{m_0} - гиперболичесен по Гордингу относительно вектора $0 \neq \eta \in R_0^2$. Тогда многочлен $P_{m_0} + Q$ $h_{\mathfrak{R}}$ гиперболичесен относительно вектора η .

Доказательство. непосредственно следует из теоремы 3.2 и работы [5]. $\square$

Abstract. A necessary and sufficient condition for comparison with a weight of two-dimensional polynomials is obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, 150, 143 - 159 (1965).
- [2] S. Gindikin, L. Volevich, The Method of Newton Polyhedron in the Theory of PDE, Kluwer (1992).
- [3] Л. Хермандер, "Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными", Москва, Мир (1986).

- [4] L. Garding, "Linear hyperbolic differential equations with constant coefficients", Acta Math. **85**, 1 – 62 (1951).
- [5] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "О многочленах, гиперболических с весом", Сдана в печать Изв. НАН Армении, серия Математика.
- [6] D. Calvo, "Multianisotropic Gevrey classes and Cauchy Problem", Ph.D Thesis, Piza (2000).
- [7] A. Corly, "On local solvability in Gevrey classes of linear partial differential operators with multiple characteristics", Comm. Part. Diff. Equat. **14**, 1 – 25 (1989).
- [8] L. Svenson, "Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of Polynomials with hyperbolic principal part", Ark. Math **8**, 145 – 162 (1968).
- [9] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "Behavior at infinity of Polynomial of two variable", Kluwer, NATO Since Series, 163 – 190 (2000).

Поступила 7 апреля 2015