

О ПОВЕДЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ УОЛША

М. Г. ГРИГОРЯН, К. А. НАВАСАРДЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: gmarting@ysu.am; knavasard@ysu.am

Аннотация. В данной работе доказывается, что для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$, с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$, совпадающую с f на E , такую, что ряд Фурье-Уолша функции $\tilde{f}(x)$ сходится по норме $L^1[0, 1]$ и все члены в последовательности модулей коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Уолша расположены в убывающем порядке.

MSC2010 numbers: 42C10, 42C20.

Ключевые слова: Коэффициенты Фурье; система Уолша; сходимость по L^1 норме.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена изучению поведения коэффициентов Фурье суммируемых функций по системе Уолша, а также, “квази” абсолютной сходимости рядов Фурье-Уолша, с точки зрения классических теорем об исправлении (см. [1], [2]).

Работы [3] – [10] были посвящены теоремам исправления, в которых модули ненулевых коэффициентов Фурье (по системам Хаара, Уолша, Фабера-Шаудера) корреktированной функции монотонно убывали.

Напомним определение системы Уолша-Пэли $\Phi = \{W_k\}$ (см. [11], [12]).

$$W_0(x) = 1, \quad W_n(x) = \prod_{s=1}^k r_{m_s}(x), \quad n = \sum_{s=1}^k 2^{m_s}, \quad m_1 > m_2 > \dots > m_k,$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^\infty$ – система Радемахера:

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0; \frac{1}{2}), \\ -1, & \text{если } x \in [\frac{1}{2}; 1), \end{cases}$$

$$r_0(x+1) = r_0(x), \quad r_k(x) = r_0(2^k x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим

$$S_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) W_k(x), \quad \text{где } c_k(f) = \int_0^1 f(x) W_k(x) dx,$$

$$G_m(x, f) = \sum_{k=1}^m c_{\sigma(k)}(f) \varphi_k(x) \quad \text{где } |c_{\sigma(k)}(f)| \geq |c_{\sigma(k+1)}(f)|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\text{Spec}(f) = \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad c_k(f) \neq 0\}.$$

Приведем те результаты, которые непосредственно относятся к результатам, полученным в настоящей работе.

Для системы Хаара $\chi = \{\chi_n(x)\}$ в работе [3] (см. также [4], [5]) установлено, что для любой последовательности $a_k \searrow 0$ с $a_k = o(\frac{1}{\sqrt{k}})$, $\{a_k\}_{k=1}^\infty \notin l_2$ и для каждого $\varepsilon > 0$ можно построить измеримое множество $E \subset [0, 1]$, с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для произвольной $f(x) \in L^1(0, 1)$ можно было найти функцию $\bar{f}(x) \in L^1(0, 1)$, $\bar{f}(x) = f(x)$ на E , такую, что $\int_0^1 \bar{f}(x) \chi_n(x) dx = a_n$ для всех $n \in \text{Spec}(f)$.

Для системы Уолша $\{W_n\}$ нами были получены следующие результаты

а) (см. [6] и [7]) Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$, с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$, такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $\bar{f} \in L^1[0, 1]$, совпадающую с f на E , такую, что ее ряд Фурье - Уолша сходится по норме $L^1[0, 1]$ и почти всюду на $[0, 1]$, и все ненулевые члены в последовательности модулей коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Уолша расположены в убывающем порядке.

б) (см. [7]) Для любых $0 < \varepsilon < 1$, $p \geq 1$ и для каждой функции $f \in L^p(0, 1)$ можно найти такую функцию $\bar{f} \in L^p(0, 1)$, $\text{mes}\{f \neq \bar{f}\} < \varepsilon$, что все ненулевые члены в последовательности $\{|c_n(\bar{f})|\}$ расположены в убывающем порядке (здесь $c_k(\bar{f})$ коэффициенты Фурье исправленной функции $\bar{f}(x)$ по системе Уолша).

в) (см. [8]) Для любой последовательности $a_k \searrow 0$ с $\{a_k\}_{k=1}^\infty \notin l_2$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$, с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для произвольной $f(x) \in L^1[0, 1]$ можно найти функцию $\bar{f}(x) \in L^1[0, 1]$, $\bar{f}(x) = f(x)$ на E такую, что ее ряд Фурье-Уолша сходится к $\bar{f}(x)$ по норме $L[0, 1]$ и $|c_n(\bar{f})| = a_n$ для всех $n \in \text{spec}(\bar{f})$.

Отметим, что из доказательств теорем работ [4]–[8] не видно, можно ли исправленную функцию выбрать так, чтобы все члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по модулю были бы расположены в убывающем порядке?

В настоящей работе доказываемся, что для системы Уолша это возможно, т.е. исправленную функцию $\bar{f}(x)$ можно выбрать так, чтобы

$$|c_k(\bar{f})| > |c_{k+1}(\bar{f})|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Основными результатами настоящей статьи являются следующие две теоремы.

Теорема 1.1. Для любого числа $\varepsilon \in (0; 1)$ существует измеримое множество $E \subset [0; 1]$, с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$, такое, что для каждой функции $f \in L^1[0; 1]$ можно найти функцию $\bar{f} \in L^1[0; 1]$, совпадающую с f на E , такую, что ее ряд Фурье-Уолша сходится по норме $L^1[0; 1]$ и все члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции $\bar{f}$ по системе Уолша, по модулю расположены в убывающем порядке.

Плотностью подмножества B неотрицательных целых чисел называется величина

$$\rho(B) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{n},$$

где B_n – число элементов из B , не превышающих n .

Теорема 1.1 является следствием следующего утверждения.

Теорема 1.2. Для любого числа $\varepsilon \in (0; 1)$ существует измеримое множество $E \subset [0; 1]$, с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$, такое, что для каждой функции $f \in L^1[0; 1]$ можно найти функцию $\bar{f} \in L^1[0; 1]$, вида $\bar{f}(x) = \bar{f}_1(x) + \bar{f}_2(x)$, совпадающую с f на E , такую, что

1. все члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции $\bar{f}(x)$ по системе Уолша по модулю расположены в убывающем порядке.

2. ряд Фурье-Уолша функции $\bar{f}_2(x)$ сходится к ней по норме $L^1[0; 1]$, а ряд Фурье-Уолша функции $\bar{f}_1$ абсолютно сходится к ней и

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\bar{f}_1)| < \infty.$$

3. плотность $\text{Spec}(\bar{f}_1)$ равна 1 и

$$\text{Spec}(\bar{f}_1) \cup \text{Spec}(\bar{f}_2) = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \text{Spec}(\bar{f}_1) \cap \text{Spec}(\bar{f}_2) = \emptyset.$$

Замечание 1.1. В связи со вторым утверждением теоремы 1.2 отметим, что исправленную функцию $\tilde{f}(x)$ невозможно выбрать так, чтобы

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\tilde{f})| < \infty$$

т.е. теорема 1.2 в этом смысле окончательна.

Отметим также, что в работе [13] А. М. Олевский доказал, что существует функция $g(x) \in C[0, 2\pi]$ такая, что для любой функции $f(x)$ с условием $|\{x \in [0, 2\pi] ; f(x) = g(x)\}| > 0$, последовательность коэффициентов Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе $\{a_n(f), b_n(f)\} \notin l_p$ при всех $p \in (0, 2)$.

Отметим также, что для любого $0 < \varepsilon < 1$ в работе [14] построено измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0, 1]$ можно было найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$, совпадающую с f на E , такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе *сходится* по норме $L[0, 1]$ и $\{a_n(f), b_n(f)\} \in l_p$ при всех $p \in (2, \infty)$.

Замечание 1.2. Из теоремы 1.1 вытекает, что *жадный алгоритм* исправленной функции $\tilde{f}(x)$ по системе Уолша *сходится* к ней по $L[0, 1]$ норме и

$$G_m(x, \tilde{f}, \Phi) = S_m(x, \tilde{f}, \Phi), \quad \forall x \in (0, 1), \forall m = 0, 1, 2, \dots$$

Замечание 1.3. В теоремах 1.1 и 1.2 исправленную функцию $\tilde{f}(x)$ можно выбрать так, чтобы ее ряд Фурье-Уолша *сходился почти всюду* на $[0, 1]$.

Возникают следующие вопросы, ответы на которых нам не известны.

Вопрос 1. Можно ли изменить значения любой измеримой функции $f(x)$ на множестве малой меры так, чтобы все члены или *все ненулевые члены* в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции $\tilde{f}(x)$ по системе Франклина по модулю расположены в убывающем порядке?

Вопрос 2. Верны ли теоремы 1.1 и 1.2 для тригонометрической системы?

В тексте пользуемся следующими обозначениями:

$C, C_1, \dots$ — абсолютные постоянные;

$\chi_I(x)$ — характеристическая функция множества I ;

$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$ — норма в пространстве $L^1[0, 1]$.

2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Напомним некоторые свойства системы Уолша (см. [11], [17]). Для любых натуральных чисел m , i и k , $k < 2^m$,

$$(2.1) \quad W_{i2^m}(x) \cdot W_k(x) = W_{i2^m+k}(x).$$

$$(2.2) \quad \sum_{k=0}^{2^m-1} W_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (2^{-m}; 1], \\ 2^m, & \text{если } x \in [0; 2^{-m}), \end{cases}$$

а для любого натурального числа M и для любого $x \in (0; 1)$

$$\left| \sum_{k=0}^M W_k(x) \right| \leq \frac{1}{x}.$$

Из последнего неравенства получаем, что для любых натуральных чисел M, N и n , $0 \leq M < N < 2^n$, имеем

$$(2.3) \quad \left\| \sum_{k=M}^N W_k(x) \right\| \leq \int_0^{2^{-n}} 2^n dx + \int_{2^{-n}}^1 \frac{2}{x} dx = 1 + 2n \ln 2 < 3n.$$

Нижеследующий результат был получен в [15].

Лемма 2.1. Для любого двоичного интервала $\Delta = [\frac{i}{2^\sigma}; \frac{i+1}{2^\sigma}]$, $0 \leq i < 2^\sigma$, и для любого натурального числа $m > \sigma$, $m - \sigma$ четное, существует многочлен по системе Уолша

$$P(x) = \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \alpha_k W_k(x)$$

такой, что

$$1) |\alpha_k| = 2^{-\frac{m+\sigma}{2}} \quad \text{при } 2^m \leq k < 2^{m+1};$$

$$2) P(x) = 1 \quad \text{если } x \in E_1, \quad |E_1| = \frac{1}{2}|\Delta|;$$

$$3) P(x) = -1 \quad \text{если } x \in E_2, \quad |E_2| = \frac{1}{2}|\Delta|;$$

$$4) P(x) = 0 \quad \text{если } x \notin \Delta;$$

$$5) \sup_M \left| \sum_{k=2^m}^M \alpha_k W_k(x) \right| \leq C \quad \text{если } x \in \Delta;$$

$$6) \sup_M \left| \sum_{k=2^m}^M \alpha_k W_k(x) \right| \leq 2^{-\frac{m-\sigma}{2}} \quad \text{если } x \notin \Delta,$$

где E_1 и E_2 суть конечные объединения двоичных интервалов.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.2. Пусть n_0 — некоторое натуральное число, а $\Delta = [\frac{\gamma-1}{2^\sigma}; \frac{\gamma}{2^\sigma}] \subset [\frac{1}{2^{n_0}}; 1]$ двоичный интервал, тогда для любых чисел $\epsilon, b > 0$ и $l \neq 0$ существуют множество $E \subset \Delta$, с мерой $|E| > (1 - \epsilon)|\Delta|$, и многочлен по системе Уолша

$$P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} a_k W_k(x)$$

такие, что

1. $|a_{k+1}| \leq |a_k| \leq b$ для всех k ($2^{n_0} \leq k < 2^n - 1$);
2. $P(x) = l$ если $x \in E$;
3. $P(x) = 0$ если $x \in [\frac{1}{2^{n_0}}; 1] \setminus \Delta$;
4. $\sup_M \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\| \leq C|l||\Delta|$.

Доказательство леммы 2.2 Выберем натуральное число $\sigma_1 \geq \sigma + 2$ так, чтобы выполнялось условие

$$(2.4) \quad |l|2^{-\sigma_1} < b.$$

Интервал Δ представим в виде объединения двоичных интервалов

$$(2.5) \quad \Delta = \bigcup_{i=1}^{r_1} \Delta_i^{(1)}, \text{ с мерой } |\Delta_i^{(1)}| = 2^{-\sigma_1}, \quad (i = 1, 2, \dots, r_1, \quad r_1 = 2^{\sigma_1 - \sigma}).$$

Выберем натуральное число m_1 так, что $m_1 - \sigma_1$ — четное число и

$$(2.6) \quad m_1 > \max\{\sigma_1 + 2\sigma; \quad n_0\}, \quad 2^{\frac{m_1}{2}} > (m_1 + \sigma_1)2^{\frac{\sigma_1}{2}}.$$

Пусть $n_1 = m_1 + \sigma_1 - \sigma + 1$ и

$$Q'_1(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1} a_k W_k(x) \equiv \frac{|l|2^{-\sigma_1}}{n_1} \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1} W_k(x).$$

Из (2.4) следует, что

$$(2.7) \quad a_k = \frac{|l|2^{-\sigma_1}}{n_1} < |l|2^{-\sigma_1} < b \quad \text{для всех} \quad 2^{n_0} \leq k < 2^{n_1}.$$

А из (2.2) и (2.3) получаем, что

$$(2.8) \quad Q'_1(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \in (2^{-n_0}; 1), \quad \|Q'_1(x)\| \leq 2 \frac{|l|2^{-\sigma_1}}{n_1} < \frac{|l||\Delta|}{2},$$

$$(2.9) \quad \sup_{M < 2^{n_1}} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\| \leq 3n_1 \frac{|l|2^{-\sigma_1}}{n_1} < |l||\Delta|.$$

Теперь для каждого $i \in \{1, 2, \dots, r_1\}$, применив лемму 2.1 для интервала $\Delta_i^{(1)}$ и числа m_1 , получаем полином по системе Уолша

$$P_i^{(1)}(x) = \sum_{k=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} l\alpha_k^{(i)} W_k(x)$$

с коэффициентами (см. также (2.6))

$$(2.10) \quad |l\alpha_k^{(i)}| = |l|2^{-\frac{m_1+\sigma_1}{2}} \leq |l| \frac{2^{-\sigma_1}}{m_1 + \sigma_1} \leq |l| \frac{2^{-\sigma_1}}{n_1} = a_{2^{n_1}-1} \quad (2^{m_1} \leq k < 2^{m_1+1}).$$

Обозначим

$$(2.11) \quad P_1'(x) = \sum_{i=1}^{r_1} P_i^{(1)}(x) W_{2^{n_1}+(i-1)2^{m_1+1}}(x).$$

Из определения полинома $P_1'(x)$ следует, что (см. лемму 2.1 и формулы (2.1) и (2.5))

$$(2.12) \quad P_1'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \Delta, \\ l, & \text{если } x \in E_1', \\ -l, & \text{если } x \in E_1'', \end{cases}$$

где E_1' и E_1'' — конечные объединения двоичных интервалов, а $|E_1'| = |E_1''| = 2^{-\sigma-1} = \frac{1}{2}|\Delta|$. Ясно, что

$$\|P_1'\| = \sum_{i=1}^{r_1} \|P_i^{(1)}\| = \sum_{i=1}^{r_1} |l||\Delta_i^{(1)}| = |l||\Delta|.$$

Обозначим

$$Q_1(x) = \sum_{k=0}^{2^{n_1}-1} |l|2^{-\frac{m_1+\sigma_1}{2}} W_k(x), \quad Q_1''(x) = \sum_{i=1}^{r_1} Q_1(x) W_{2^{n_1}+(i-1)2^{m_1+1}}(x).$$

Из (2.1), (2.2) и определения Q_1'' следует, что

$$Q_1''(x) = 0, \quad \text{при } x > 1/2^{n_0} > 1/2^{m_1}.$$

Рассмотрим следующий полином

$$P_1(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1+1}-1} a_k W_k(x) \equiv Q_1'(x) + Q_1''(x) + P_1'(x).$$

Ясно, что модули коэффициентов a_k при $2^{n_1} \leq k < 2^{n_1+1}$ равны $|l|2^{-\frac{m_1+\sigma_1}{2}}$, (см. (2.1) и (2.11)), поэтому для коэффициентов полинома $P_1(x)$ получаем (см. (2.7) и (2.10))

$$(2.13) \quad b > |a_{2^{n_0}}| = |a_{2^{n_0}+1}| = \dots = |a_{2^{n_1}-1}| \geq |a_{2^{n_1}}| = \dots = |a_{2^{n_1+1}-1}|.$$

Допустим, что уже построены многочлены $P_1(x), P_2(x), \dots, P_{j-1}(x)$, множества $E''_{j-1} \subset E''_{j-2} \subset \dots \subset E''_1 \subset \Delta$, и числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{j-1}, m_1, m_2, \dots, m_{j-1}$, удовлетворяющие условиям

$$(2.14) \quad \sigma_{j-1} \geq \sigma + 2(j-1), \quad m_{j-1} > \sigma_{j-1} + 2\sigma,$$

$$P_{j-1}(x) = \sum_{k=2^{n_{j-2}+1}}^{2^{n_{j-1}+1}-1} a_k W_k(x) = -2^{j-2}l \quad \text{если } x \in E''_{j-1},$$

(при $j = 2$ под $2^{n_{j-2}+1}$ понимаем 2^{n_0}), где E''_{j-1} является конечным объединением двоичных интервалов, с мерой

$$|E''_{j-1}| = 2^{-(j-1)}|\Delta| = 2^{-(j-1)-\sigma},$$

а

$$|a_k| \geq |a_{2^{n_{j-1}+1}-1}| = 2^{j-2}|l|2^{-\frac{m_{j-1}+\sigma_{j-1}}{2}}, \quad k \in [2^{n_{j-2}+1}, 2^{n_{j-1}+1}-1].$$

Выберем натуральное число σ_j так, чтобы

$$(2.15) \quad \sigma_j > \frac{m_{j-1} + \sigma_{j-1}}{2} + 2$$

и множество E''_{j-1} представлялось в виде

$$E''_{j-1} = \bigcup_{i=1}^{r_j} \Delta_i^{(j)},$$

где $\Delta_i^{(j)}$ двоичный интервал с мерой $|\Delta_i^{(j)}| = 2^{-\sigma_j}$, $i = 1, 2, \dots, r_j$, и $r_j = 2^{\sigma_j - \sigma - (j-1)}$.

Из (2.14) и (2.15) следует, что

$$(2.16) \quad \sigma_j > \sigma_{j-1} + 2 \geq \sigma + 2j.$$

Выберем натуральное число m_j так, чтобы $m_j - \sigma_j$ было четным,

$$(2.17) \quad m_j > \max\{\sigma_j + 2\sigma + 2j; n_{j-1} + 1\} \quad \text{и} \quad 2^{\frac{m_j}{2}} > (m_j + \sigma_j)2^{\frac{\sigma_j}{2}}.$$

Пусть $n_j = m_j + \sigma_j - \sigma - (j-1) + 1$ и

$$Q'_j(x) = \sum_{k=2^{n_{j-1}+1}}^{2^{n_j}-1} a_k W_k(x) \equiv \frac{2^{j-1}|l|2^{-\sigma_j}}{n_j} \sum_{k=2^{n_{j-1}+1}}^{2^{n_j}-1} W_k(x).$$

Из (2.15) следует, что при $2^{n_{j-1}+1} \leq k \leq 2^{n_j} - 1$

$$(2.18) \quad |a_k| = \frac{2^{j-1}|l|2^{-\sigma_j}}{n_j} < 2^{j-2}|l|2^{-\frac{m_{j-1}+\sigma_{j-1}}{2}} = |a_{2^{n_{j-1}+1}-1}|,$$

т.е. модули коэффициентов многочлена $Q'_j(x)$ меньше, чем модули коэффициентов $P_{j-1}(x)$. Аналогично (2.8) и (2.9), для многочлена $Q'_j(x)$ получаем (см. также (2.16) и (2.3))

$$(2.19) \quad Q'_j(x) = 0 \quad \text{при} \quad x > 2^{-n_0} > 2^{-(n_{j-1}+1)},$$

$$(2.20) \quad \|Q'_j(x)\| \leq 2 \frac{2^{j-1}|l|2^{-\sigma_j}}{n_j} \leq \frac{|l||\Delta|}{2^j},$$

$$(2.21) \quad \sup_{M < 2^{n_j}} \left\| \sum_{k=2^{n_{j-1}+1}}^M a_k W_k(x) \right\| \leq 3n_j \frac{2^{j-1}|l|2^{-\sigma_j}}{n_j} \leq \frac{|l||\Delta|}{2^{j-1}}.$$

Для каждого $i = 1; 2; \dots; r_j$, применив лемму 2.1 при $m = m_j$ и $\Delta = \Delta_i^{(j)}$, получаем полином

$$P_i^{(j)}(x) = \sum_{k=2^{m_i}}^{2^{m_j+i}-1} 2^{j-1} l \alpha_k^{(i)} W_k(x),$$

коэффициенты которого удовлетворяют следующему условию (см. также (2.17))

$$(2.22) \quad 2^{j-1} |l \alpha_k^{(i)}| = 2^{j-1} |l| 2^{-\frac{m_j + \sigma_j}{2}} \leq 2^{j-1} |l| \frac{2^{-\sigma_j}}{(m_j + \sigma_j)} \leq 2^{j-1} |l| \frac{2^{-\sigma_j}}{n_j},$$

т.е. меньше, чем коэффициенты полинома $Q'_j(x)$.

Обозначим

$$P'_j(x) = \sum_{i=1}^{r_j} P_i^{(j)}(x) W_{2^{n_j} + (i-1)2^{m_j+i}}(x)$$

$$E'_j = \{x \in E''_{j-1} : l P'_j(x) > 0\}, \quad E''_j = \{x \in E''_{j-1} : l P'_j(x) < 0\}.$$

Из определения полинома $P'_j(x)$, (2.1) и леммы 2.1 следует, что

$$(2.23) \quad P'_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin E''_{j-1}, \\ 2^{j-1} l, & \text{если } x \in E'_j, \\ -2^{j-1} l, & \text{если } x \in E''_j, \end{cases}$$

а E'_j и E''_j являются конечными объединениями двоичных интервалов, с мерой $|E'_j| = |E''_j| = \frac{1}{2} |E''_{j-1}| = \frac{1}{2^j} |\Delta|$. Ясно, что

$$(2.24) \quad \|P'_j\| = \sum_{i=1}^{r_j} \|P_i^{(j)}\| = \sum_{i=1}^{r_j} 2^{j-1} |l| |\Delta_i^{(j)}| = 2^{j-1} |l| |E''_{j-1}| = |l| |\Delta|.$$

Обозначим

$$Q_j(x) = \sum_{k=0}^{2^{m_j}-1} 2^{j-1} |l| 2^{-\frac{m_j + \sigma_j}{2}} W_k(x),$$

$$Q''_j(x) = \sum_{i=1}^{r_j} Q_j(x) W_{2^{n_j} + (i-1)2^{m_j+i}}(x).$$

Из определения полинома $Q_j''(x)$ и формул (2.2) и (2.17) следует, что

$$(2.25) \quad Q_j''(x) = 0, \quad \text{если} \quad x > 2^{-n_0} > 2^{-n_j}.$$

$$(2.26) \quad \|Q_j''(x)\| \leq r_j 2^{j-1} |l| 2^{-\frac{m_j + \sigma_j}{2}} \leq 2^{-\frac{m_j + \sigma_j}{2} - \sigma} |l| < 2^{-j} |l| |\Delta|.$$

Рассмотрим следующий полином

$$P_j(x) = \sum_{k=2^{n_{j-1}+1}}^{2^{n_j+1}-1} a_k W_k(x) \equiv Q_j'(x) + Q_j''(x) + P_j'(x).$$

Ясно, что модули коэффициентов a_k , при $2^{n_j} \leq k < 2^{n_j+1}$, равны $2^{j-1} |l| 2^{-\frac{m_j + \sigma_j}{2}}$, (см. (2.1)), поэтому, для коэффициентов полинома $P_j(x)$ получаем (см. также (2.18) и (2.22))

$$(2.27) \quad |a_{2^{n_{j-1}+1}-1}| \geq |a_{2^{n_{j-1}+1}}| = \dots = |a_{2^{n_j}-1}| \geq |a_{2^{n_j}}| = \dots = |a_{2^{n_j+1}-1}|.$$

Таким образом, по индукции, определяются полиномы $\{Q_j'\}$, $\{Q_j''\}$, $\{P_j'\}$, $\{P_j\}$ и множества $E_1'' \supset E_2'' \supset \dots$ удовлетворяющие условиям (2.19)–(2.27).

Пусть $q = [\log_2 \varepsilon^{-1}] + 1$. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_q+1}-1} a_k W_k(x) = \sum_{j=1}^q P_j(x) = \sum_{j=1}^q Q_j'(x) + \sum_{j=1}^q Q_j''(x) + \sum_{j=1}^q P_j'(x).$$

Из (2.12) и (2.23) следует, что при всех $r \leq q$

$$(2.28) \quad \sum_{j=1}^r P_j'(x) = \begin{cases} l, & \text{если } x \in \Delta \setminus E_r'', \\ -(2^r - 1)l, & \text{если } x \in E_r'', \\ 0, & \text{если } x \notin \Delta. \end{cases}$$

Если взять $E = \Delta \setminus E_q''$, то, очевидно, $|E| = |\Delta| - 2^{-q} |\Delta| > (1 - \varepsilon) |\Delta|$. Учитывая также (2.13), (2.27), (2.19), (2.25) и (2.28) получаем, что $P(x)$ и множество E удовлетворяют пунктам 1)–3) леммы 2.2. Ясно также, что при всех $r \leq q$

$$(2.29) \quad \left\| \sum_{j=1}^r P_j' \right\| = |l| |\Delta \setminus E_r''| + (2^r - 1) |l| |E_r''| < 2 |l| |\Delta|.$$

Пусть M – некоторое натуральное число с условием $2^{n_0} \leq M < 2^{n_q+1}$. Тогда для некоторого r , $(1 \leq r \leq q)$, $M \in [2^{n_{r-1}+1}, 2^{n_r+1})$ (при $r = 1$ вместо $2^{n_{r-1}+1}$ нужно понимать 2^{n_0}). В случае, когда $M < 2^{n_r}$, полином $\sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x)$ имеет вид

$$\sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) = \sum_{j=1}^{r-1} Q_j'(x) + \sum_{j=1}^{r-1} Q_j''(x) + \sum_{j=1}^{r-1} P_j'(x) + \sum_{k=2^{n_{r-1}+1}}^M a_k W_k(x),$$

поэтому из (2.8) и (2.20) получаем, что норма первого слагаемого меньше чем $|l||\Delta|$. Аналогичную оценку можно получить и для нормы второго слагаемого (см. (2.26)). Следовательно, с учетом (2.29) и (2.21) имеем, что

$$(2.30) \quad \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\| \leq 5|l||\Delta|.$$

Если же $M \geq 2^{n_r}$, то при некотором числе i , $(0 \leq i < 2^{n_r - m_r})$, $M \in [2^{n_r} + i2^{m_r}; 2^{n_r} + (i+1)2^{m_r})$, следовательно, для нормы полинома $\sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x)$ получаем

$$(2.31) \quad \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^r Q'_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{r-1} Q''_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{r-1} P'_j \right\| +$$

$$\left\| \sum_{k=2^{n_r}}^{2^{n_r} + i2^{m_r} - 1} a_k W_k(x) \right\| + \left\| \sum_{k=2^{n_r} + i2^{m_r}}^M a_k W_k(x) \right\|.$$

Сумма первых трех слагаемых, как и в прежнем случае, меньше чем $4|l||\Delta|$. Четвертое слагаемое оценивается как в (2.24) и (2.26) и меньше чем $2|l||\Delta|$. Для последнего слагаемого рассмотрим два случая.

В случае, когда число i четное, из определения многочлена $Q''_r(x)$, (2.3), (2.16) и (2.17) получаем, что

$$\left\| \sum_{k=2^{n_r} + i2^{m_r}}^M a_k W_k(x) \right\| = 2^{r-1} |l| 2^{-\frac{m_r + \sigma_r}{2}} \left\| \sum_{k=0}^{M - 2^{n_r} - i2^{m_r}} W_k(x) \right\| \leq$$

$$2^{r-1} |l| 2^{-\frac{m_r + \sigma_r}{2}} \cdot 3m_r < 2|l||\Delta|.$$

А если число i нечетное, то, с учетом пунктов 5) и 6) леммы 2.1, (2.1), (2.6), (2.17) и определения полинома $P_i^{(r)}(x)$, получаем, что

$$\left\| \sum_{k=2^{n_r} + i2^{m_r}}^M a_k W_k(x) \right\| = \int_{E''_{r-1}} + \int_{\{0;1\} \setminus E''_{r-1}} \leq C 2^{r-1} |l| |E''_{r-1}| +$$

$$2^{r-1} |l| 2^{-\frac{m_r + \sigma_r}{2}} \leq C |l||\Delta| + 2^{r-1} |l| 2^{-(\sigma+r)} < (C+1) |l||\Delta|,$$

где C постоянная из леммы 2.1. Следовательно, с учетом (2.30) и (2.31) получаем, что существует абсолютная постоянная C_1 такая, что для любого натурального числа M из промежутка $[2^{n_0}; 2^{n_q+1})$

$$\left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\| < C_1 |l||\Delta|.$$

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. Пусть $\varepsilon \in (0; 1)$, n_0 — натуральное число, а b_0 — некоторое положительное число. Пусть, далее, $f(x) = \sum_{k=1}^r l_k \chi_{\Delta_k}(x)$ — ступенчатая функция с условием $\text{supp}(f) \cap [2^{-n_0}; 1] \neq \emptyset$ и $\Delta_1; \Delta_2; \dots; \Delta_j$ — непересекающиеся двоичные интервалы. Тогда существуют функция $g \in L^1[0; 1]$, многочлен по системе Уолша

$$P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} c_k W_k(x)$$

и множество $E \subset [2^{-n_0}; 1]$ такие, что

1. $|c_{k+1}| < |c_k| < b_0$ для всех k , $2^{n_0} \leq k < 2^n - 1$,
2. $|E| > 1 - \varepsilon - 2^{-n_0}$,
3. $g(x) = f(x)$, если $x \in E$,
4. $\|g\| \leq C\|f\|$,
5. $\|P(x) - g(x)\| \leq \varepsilon$,
6. $\|\sum_{k=2^{n_0}}^M c_k W_k(x)\| \leq C\|f(x)\| + \varepsilon$ для всех натуральных $M \in [2^{n_0}; 2^n)$.

Доказательство леммы 2.3. Рассмотрим следующую функцию

$$\tilde{f}(x) = f(x) \cdot \chi_{[2^{-n_0}; 1]}(x) = \sum_{k=1}^r l'_k \chi_{\Delta'_k}(x)$$

где $l'_k \neq 0$, $1 \leq k \leq r$. Для каждого k , $1 \leq k \leq r$, поочередно применяя лемму 2.2 для интервала Δ'_k , чисел ε , $b = |a_{2^{n_k-1}-1}|$, (при $k = 1$ $b = \frac{b_0}{2}$), и $l = l'_k$, получаем многочлены по системе Уолша

$$P_k(x) = \sum_{i=2^{n_k-1}}^{2^{n_k}-1} a_i W_i(x)$$

и множества $E_k \subset \Delta'_k$ со следующими свойствами:

- A) $E_k \subset \Delta'_k$ $|E_k| > (1 - \varepsilon)|\Delta'_k|$,
- B) $\frac{1}{2}b_0 \geq |a_{2^{n_0}}| \geq |a_{2^{n_0}+1}| \geq \dots \geq |a_{2^{n_r}-1}|$,
- C) $P_k(x) = l'_k$, если $x \in E_k$,
- D) $P_k(x) = 0$, если $x \in [2^{-n_0}; 1] \setminus \Delta'_k$,
- E) $\sup_{2^{n_k-1} \leq M < 2^{n_k}} \left\| \sum_{i=2^{n_k-1}}^M a_i W_i(x) \right\| \leq C|l'_k||\Delta'_k|$.

Обозначим

$$E = [2^{-n_0}; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^r (\Delta'_k \setminus E_k),$$

$$(2.32) \quad g(x) = \sum_{k=1}^r P_k(x).$$

Из условия А) получаем, что $|E| > 1 - \varepsilon - 2^{-n_0}$. Поскольку на множестве E функции $f(x)$ и $\bar{f}(x)$ совпадают, то в силу (2.32), С) и D) получаем, $g(x) = \bar{f}(x) = f(x)$ при всех $x \in E$.

Пусть $\alpha_i = 2^{-i} \min\{b_0; \varepsilon\}$ и $c_i = a_i + \alpha_i$, $2^{n_0} \leq i < 2^{n_r}$. Тогда утверждение 1 леммы непосредственно следует из В). Рассмотрим многочлен

$$P(x) = \sum_{i=2^{n_0}}^{2^{n_r}-1} c_i W_i(x) = g(x) + \sum_{i=2^{n_0}}^{2^{n_r}-1} \alpha_i W_i(x).$$

Очевидно, что

$$\|P(x) - g(x)\| \leq \sum_{i=2^{n_0}}^{2^{n_r}-1} \alpha_i \leq \varepsilon.$$

Заметим, что $\|\bar{f}\| \leq \|f\|$, поэтому, для любого $M \in (2^{n_0}; 2^{n_r})$, с учетом Е), получаем

$$(2.33) \quad \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\| \leq \sum_{k=1}^r C |U'_k| |\Delta'_k| = C \|\bar{f}\| \leq C \|f\|,$$

следовательно,

$$\left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M c_k W_k(x) \right\| \leq \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M a_k W_k(x) \right\| + \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^M \alpha_k W_k(x) \right\| \leq C \|f\| + \sum_{i=2^{n_0}}^{2^{n_r}-1} \alpha_i \leq C \|f\| + \varepsilon.$$

Из (2.33), в частности, получаем $\|g\| \leq C \|f\|$. Лемма 2.3 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Пусть $\varepsilon \in (0; 1)$ произвольное число, а

$$(3.1) \quad n_0 = \lfloor \log_2 \varepsilon^{-1} \rfloor + 1.$$

Рассмотрим последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$ полиномов по системе Уолша с рациональными коэффициентами, с условием $\text{supp}(f_k) \cap (2^{-n_0}; 1) \neq \emptyset$. Если последовательно применим лемму 2.3, то можем найти последовательности функций $\{\bar{g}_n(x)\}_{n=1}^\infty$, множеств $\{G_n\}$, ($G_n \subset [2^{-n_0}; 1]$), натуральных чисел $\{m_n\} \nearrow$, $\{l_n\} \nearrow$ и полиномов вида

$$\bar{Q}_n(x) = \sum_{k=2^{m_{n-1}}}^{2^{m_n}-1} a_k^{(n)} W_k(x) = \sum_{k=2^{m_{n-1}}}^{2^{m_n}-1} a_k W_k(x),$$

($m_0 = n_0$, $l_1 = 1$, $a_{2^{m_0-1}}^{(0)} = 1$), которые для всех чисел $n \geq 1$ и $k \in [2^{m_{n-1}}; 2^{m_n}-1]$ удовлетворяют условиям:

$$(3.2) \quad |a_{k+1}^{(n)}| < |a_k^{(n)}| < 2^{-2^{m_{n-1}}-l_n} < \frac{1}{2} |a_{2^{m_{n-1}}-1}^{(n-1)}|,$$

$$(3.3) \quad \bar{g}_n(x) = f_n(x), \quad \text{если } x \in G_n, \quad \|\bar{Q}_n(x) - \bar{g}_n(x)\| \leq 2^{-n-2},$$

$$(3.4) \quad |G_n| > 1 - 2^{-n-2} - 2^{-n_0},$$

$$(3.5) \quad \max_{2^{m_0-1} \leq k < 2^{m_0}} \left\| \sum_{j=2^{m_0-1}}^k a_j^{(n)} W_j(x) \right\| \leq C \|f_n(x)\| + 2^{-n-2}.$$

$$(3.6) \quad \|\bar{g}_n(x)\| \leq C \|f_n(x)\|.$$

Положим $G = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} G_n$. Очевидно, что (см. (3.1), (3.4)) $|G| > 1 - \varepsilon$.

Положим $b_k = b_k^{(0)} = 1 + 2^{-k}$, при $k = 0, 1, \dots, 2^{m_0} - 1$,

$$(3.7) \quad R_0(x) = \sum_{k=0}^{2^{m_0}-1} b_k^{(0)} W_k(x).$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $k_1 > n_0$,

$$(3.8) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N f_{k_n}(x) - (f(x) - R_0(x)) \right| dx = 0, \quad \|f_{k_n}(x)\| < 2^{-n}, \quad n \geq 2.$$

Положим

$$(3.9) \quad g_1(x) = \bar{g}_{k_1}(x), \quad Q_1(x) = \bar{Q}_{k_1}(x) = \sum_{j=2^{m_{k_1}-1}}^{2^{m_{k_1}}-1} a_j^{(k_1)} W_j(x),$$

$$b_j = b_j^{(1)} = 2^{-2^{m_{k_1}-1}-l_{k_1}} (1 + 2^{-j}), \quad j \in [2^{m_{k_1}}, 2^{m_{k_1+1}}),$$

$$R_1(x) = \sum_{j=2^{m_0}}^{2^{m_{k_1+1}}-1} b_j^{(1)} W_j(x).$$

Очевидно, что коэффициенты полинома $R_1(x)$ монотонно убывают, меньше коэффициентов полинома $R_0(x)$ и (см. (3.2) и (3.9)) больше, чем коэффициенты полинома $Q_1(x)$. Также имеем

$$\|R_1(x)\| \leq \sum_{j=2^{m_0}}^{2^{m_{k_1+1}}-1} b_j^{(1)} \leq \sum_{j=2^{m_0}}^{2^{m_{k_1+1}}-1} 2^{-2^{m_{k_1}-1}-l_{k_1}+1} \leq 2^{-m_{k_1}-1} \leq 2^{-1}.$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 = \nu_1 < \dots < \nu_{q-1}$, функции $f_{\nu_1}(x), \dots, f_{\nu_{q-1}}(x)$, $g_1(x), \dots, g_{q-1}(x)$ и полиномы

$$Q_n(x) = \bar{Q}_{\nu_n}(x) = \sum_{j=2^{m_{\nu_n}-1}}^{2^{m_{\nu_n}}-1} a_j^{(\nu_n)} W_j(x), \quad 1 \leq n \leq q-1,$$

$$(3.10) \quad R_n(x) = \sum_{j=2^{m_{\nu_n}-1}}^{2^{m_{\nu_n+1}}-1} b_j^{(n)} W_j(x), \quad 1 \leq n \leq q-1,$$

удовлетворяющие условиям:

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad \text{если } x \in G, \quad 1 \leq n \leq q-1, \quad \text{и}$$

$$(3.11) \quad \left\| \sum_{k=1}^n [(R_k(x) + Q_k(x)) - g_n(x)] \right\| < 2^{-(n-1)}, \quad 1 \leq n \leq q-1.$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать натуральное число $\nu_q > \nu_{q-1}$ так, чтобы

$$(3.12) \quad \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [(R_i(x) + Q_i(x)) - g_i(x)] \right) \right\| < 2^{-q-2},$$

$$m_{\nu_q-1} > m_{\nu_{q-1}} + q.$$

В силу (3.8) и (3.11) имеем

$$(3.13) \quad \left\| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [(R_i(x) + Q_i(x)) - g_i(x)] \right\| < 2^{-q} + 2^{-q+2} = 5 \cdot 2^{-q}.$$

Из (3.12) и (3.13) вытекает

$$(3.14) \quad \|f_{\nu_q}(x)\| < 6 \cdot 2^{-q}.$$

Поэтому (см. также (3.6))

$$(3.15) \quad \|\bar{g}_{\nu_q}(x)\| < 6 \cdot 2^{-q} C = 2^{-q} C_1.$$

Положим

$$(3.16) \quad g_q(x) = f_{k_q}(x) + [\bar{g}_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x)],$$

$$(3.17) \quad Q_q(x) = \bar{Q}_{\nu_q}(x) = \sum_{k=2^{m_{\nu_q-1}}}^{2^{m_{\nu_q}}-1} a_k^{(\nu_q)} W_k(x),$$

$$(3.18) \quad b_j^{(q)} = 2^{-2m_{\nu_q-1}-l_{\nu_q}}(1+2^{-j}) \leq 2^{-2m_{\nu_q-1}-l_{\nu_q}+1}, \quad j \in [2^{m_{\nu_q-1}}, 2^{m_{\nu_q}}),$$

$$(3.19) \quad R_q(x) = \sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^{2^{m_{\nu_q}}-1} b_j^{(q)} W_j(x)$$

Из (3.2), (3.12), (3.18) и монотонности последовательностей $\{m_n\}$ и $\{l_n\}$ следует, что для всех $j \in (2^{m_{\nu_q-1}}, 2^{m_{\nu_q}})$

$$(3.20) \quad |a_{2^{m_{\nu_q-1}}}^{(\nu_q)}| < 2^{-2m_{\nu_q-1}-l_{\nu_q}} < b_j^{(q)} < b_{j-1}^{(q)} < 2^{-2m_{\nu_q-1}-l_{\nu_q-1}+1} \leq |a_{2^{m_{\nu_q-1}-1}}^{(\nu_{q-1})}|$$

и

$$(3.21) \quad \sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^{2^{m_{\nu_q}}-1} b_j^{(q)} = \sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^{2^{m_{\nu_q}}-1} 2^{-2m_{\nu_q-1}-l_{\nu_q}}(1+2^{-j}) < 2^{-m_{\nu_q-1}} < 2^{-q}.$$

Учитывая соотношения (3.16) и (3.3) получим

$$(3.22) \quad g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in G.$$

В силу (3.16), (3.11), (3.12) и (3.15) имеем

$$(3.23) \quad \|g_q(x)\| \leq \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [(R_i(x) + Q_i(x)) - g_i(x)] \right) \right\| + \|\bar{g}_{\nu_q}(x)\| + \\ + \left\| \sum_{i=1}^{q-1} [(R_i(x) + Q_i(x)) - g_i(x)] \right\| < 2^{-q-2} + C_1 2^{-q} + 2^{-(q-2)} = C_2 2^{-q}.$$

А из (3.16), (3.3), (3.12) и (3.21) получаем

$$(3.24) \quad \left\| \sum_{i=1}^q [(R_i(x) + Q_i(x)) - g_i(x)] \right\| \leq \left\| \bar{Q}_{\nu_q}(x) - \bar{g}_{\nu_q}(x) \right\| + \|R_q(x)\| + \\ + \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [R_i(x) + Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right\| < 2^{-(q-1)}.$$

В силу (3.5) и (3.14) имеем

$$(3.25) \quad \max_{2^{m_{\nu_q}-1} \leq k < 2^{m_{\nu_q}}} \left\| \sum_{j=2^{m_{\nu_q}-1}}^k a_j^{(\nu_q)} W_j(x) \right\| \leq C \|f_{\nu_q}(x)\| + 2^{-q-2} < C_3 2^{-q}.$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$ ($g_1(x) = f_{k_1}(x)$) и полиномов $\{Q_q(x)\}$, $\{R_q(x)\}$ удовлетворяющих условиям (3.19)–(3.25) для всех $q \geq 1$. Из (3.23) вытекает, что

$$(3.26) \quad \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^1 |g_q(x)| dx < \infty.$$

Определим функцию $\tilde{f}(x)$ и последовательность чисел $\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом

$$(3.27) \quad \tilde{f}(x) = R_0(x) + \sum_{q=1}^{\infty} g_q(x), \\ d_k = \begin{cases} a_k, & k \in \bigcup_{q=1}^{\infty} [2^{m_{\nu_q}-1}, 2^{m_{\nu_q}}), \\ b_k, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из (3.8), (3.22), (3.26) и (3.27) следует

$$\tilde{f}(x) \in L^1[0, 1], \quad \tilde{f}(x) = f(x), \quad x \in G.$$

А из определения последовательности $\{d_n\}$ имеем (см. также (3.2), (3.7) и (3.20))

$$|d_n| > |d_{n+1}| > 0 \quad \text{для всех } n \geq 0.$$

Пусть дано произвольное натуральное число $n > 2^{m_0}$, тогда для некоторого q , имеем $n \in [2^{m_{\nu_q-1}}, 2^{m_{\nu_q}})$, из соотношений (3.17), (3.19), (3.21), (3.23)–(3.25), (3.27) будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{i=0}^n d_k W_k(x) - \tilde{f}(x) \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{q-1} [(R_i(x) + Q_i(x)) - g_i(x)] \right\| + \\
 & + \sum_{i=q}^{\infty} \|g_i(x)\| + \max_{2^{m_{\nu_q-1}} \leq k < 2^{m_{\nu_q}}} \left\| \sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^k b_j^{(q)} W_j(x) \right\| + \\
 (3.28) \quad & + \max_{2^{m_{\nu_q-1}} \leq k < 2^{m_{\nu_q}}} \left\| \sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^k a_j^{(\nu_q)} W_j(x) \right\| < 2^{-q} C_4.
 \end{aligned}$$

следовательно

$$d_k = \int_0^1 \tilde{f}(x) W_k(x) dx = c_n(\tilde{f}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим

$$(3.29) \quad \tilde{f}_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i(x), \quad \tilde{f}_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(x).$$

Из (3.25), (3.26), (3.16), (3.19) и (3.21) следует

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\tilde{f}_1)| = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^{2^{m_{\nu_q-1}}-1} b_j^{(q)} \leq \sum_{j=0}^{2^{m_0}-1} b_j^{(0)} + \sum_{q=1}^{\infty} 2^{-q} < \infty.$$

Из (3.29), (3.10) и (3.12) следует, что $\rho(\text{Spec}(\tilde{f}_1)) = 1$. Теорема 1.2 доказана.

Abstract. The paper proves that for any $\varepsilon > 0$ there exists a measurable set $E \subset [0, 1]$ with measure $|E| > 1 - \varepsilon$ such that for each $f \in L^1[0, 1]$ there is a function $\tilde{f} \in L^1[0, 1]$ coinciding with f on E whose Fourier-Walsh series converges to $\tilde{f}$ in $L^1[0, 1]$ -norm, and the sequence $\{|c_k(\tilde{f})|\}_{n=0}^{\infty}$ is monotonically decreasing, where $\{c_k(\tilde{f})\}$ is the sequence of Fourier-Walsh coefficients of function $\tilde{f}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Матем. Сб., **28:2**, 266 – 294 (1912).
- [2] Д. Е. Меньшов, "О равномерной сходимости рядов Фурье", Матем. Сб., **53:2**, 67 – 96 (1942).
- [3] M. G. Grigorian, "On the convergence of Fourier series in the metric of L^1 ", Analysis Math., **17**, 211 – 237 (1991).
- [4] М. Г. Григорян, С. Л. Горян, "Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций", Analysis Mathematica, **32**, 49 – 80 (2006).

- [5] К. А. Навасардян, А. А. Степанян, "О рядах по системе Хаара", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **42:4**, 53 – 66 (2007).
- [6] М. Г. Григорян, "Об усиленном L^1 -greedy свойстве системы Уолша", Изв. ВУЗ-ов, **5**, 26 – 37 (2008).
- [7] М. Г. Григорян, "Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппр.", Мат. сб., **но. 3**, стр. 49 – 78 (2012).
- [8] К. А. Навасардян, "О рядах Уолша с монотонными коэффициентами", Изв. НАН Армении, сер. Математика, **42**, **но. 5**, 51 – 64 (2007).
- [9] M. G. Grigorian .A. A. Sargsyan, "On the coefficients of expansion of elements from $C[0,1]$ space by the Faber-Schauder system", Jorنال of Function Spaces and Applications, **2**, 34 – 42 (2011).
- [10] М. Г. Григорян, В. Г. Кротов, "Теорема исправления Лузина и коэффициенты разложения Фурь по системе Фабера-Шаудера", Мат. заметки, **93**, **но. 3**, 172 – 178 (2013).
- [11] Б. И. Голубов, А. Ф. Ефимов, В. А. Скворцов. Ряды и Преобразования Уолша, М., Наука (1987).
- [12] R. E. A. C. Paley, "A remarkable set of orthogonal functions", Proc. London Math. Soc., **34**, 241 – 279 (1932).
- [13] А. М. Олевский, *Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана*, ДАН СССР, **238**, **но. 4**, 796-799 (1978).
- [14] М. Г. Григорян, "О некоторых свойствах ортогональных систем", Изв. РАН, сер. мат., **57**, **но. 5**, 75 – 105 (1993).
- [15] К. А. Навасардян, "О нуль рядах по двойной системе Уолша", Изв. НАН Армсии, сер. Математика, **29**, **но. 1**, 50 – 68 (1994).
- [16] Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, "О рядах с монотонными коэффициентами", Изв. АН России, сер. мат., **63**, **но. 1**, 41 – 60 (1999).
- [17] Б. С. Кашин. А. А. Саакян. Ортогональные Ряды, Москва, АФЦ (1999).

Поступила 4 февраля 2015