Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 6, 2015, стр. 44-60.

О ФОРМАЛЬНО ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНАХ ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ

Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - Армянский (Славянский) Университет
E-mail: *haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Изучаются свойства дифференциальных операторов (многочленов) с переменными коэффициентами постоянной мощности или постоянной силы по Л. Хермандеру. Получены необходимые условия постоянства силы и мощности многочленов многих переменных. Для многочленов двух переменных с вещественными коэффициентами получены необходимые и достаточные условия постоянства мощности и формальной почти гипоэллиптичности в терминах нулей и их кратностей соответствующих обобщенно - однородных подмногочленов изучаемых многочленов.

MSC2010 numbers: 12E10.

Ключевые слова: формально почти гипоэллиптический оператор (многочлен); оператор постоянной силы (мощности); перегулярный (вырожденный) многочлен.

1. Введение

Если для общих линейных дифференциальных операторов (уравнений) с постоянными коэффициентами многие вопросы (существование фундаментального решения, локальная разрешимость, корректность постановки краевых задач и т.д.) достаточно хорошо изучены, то теория таких операторов с переменными коэффициентами сравнительно мало развита. Дифференциальные операторы постоянной силы с переменными коэффициентами во многих отношениях ведут себя как операторы с постоянными коэффициентами (см. [1], глава 13). Например, все обобщенные решения формально гипоэллиптических уравнений постоянной силы с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами являются бесконечно дифференцируемыми функциями (см. [2] - [4], или [1], теорема 13.4.1).

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: N-множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times ... \times N_0$-множество n-мерных мультииндексов, E^n и R^n- n-мерные вещественные пространства точек соответственно $x = (x_1, ..., x_n)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$. Для $\xi \in R^n$, $x \in E^n$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial\xi_j$ либо $D_j = \frac{1}{i}\partial/\partial x_j$ $(j = 1, ..., n)$. Наконец обозначим $R_+^n = \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0, j = 1, ..., n)\}$, $R^{n,0} = \{\xi \in R^n, |\xi| \neq 0.\}$

Пусть $\aleph = \{\alpha^k\}$ множество точек из N_0^n. Многогранником Ньютона набора $\aleph$ назовем наименьший выпуклый многогранник $\Re = \Re(\aleph) \subset R_+^n$, содержащий множество $\aleph \cup \{0\}$. Для точек $\alpha \in N_0^n$ обозначим $\sqcap(\alpha) = \{\beta \in N_0^n, \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, ..., n\}$. Многогранник $\Re \subset R_+^n$ назовем полным, если $\Re$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершину на каждой оси координат N_0^n. Полный многогранник $\Re$ назовем правильным (вполне правильным), если с каждой вершиной $e \in \Re$ многогранник $\Re$ содержит множество $\sqcap(e)$ (соответственно каждая точка множества $\sqcap(e) \setminus \{e\}$ является внутренней точкой $\Re$.) Очевидно, это эквивалентно тому, что внешние (относительно $\Re$) нормали $(n-1)-$мерных некоординатных граней $\Re$ имеют неотрицательные (соответственно положительные) координаты. Обозначим через $\Re_i^k$ $(i = 1, ..., M_k^{'}, k = 0, 1, ..., n-1)$ k - мерные грани многогранника $\Re$. Грань $\Re_i^k$ назовем главной, если среди единичных внешних (относительно $\Re$) нормалей этой грани, множество которых обозначим через $\Lambda(\Re_i^k)$, имеется нормаль, хотя бы одна координата которой положительна. Точку $\alpha \in \Re$ назовем главной, если α принадлежит хотя бы одной главной грани $\Re$. Множество всех единичных внешних нормалей главных граней $\Re$ обозначим через $\Lambda(\Re)$. Главную грань $\Re_i^k$ назовем правильной (вполне правильной), если в множестве $\Lambda(\Re_i^k)$ существует вектор, все координаты которой неотрицательны (положительны). Через $M_k = M_k(\Re)$ обозначим число k - мерных вполне правильных граней $\Re$, при этом будем считать, что для каждого $k = 0, 1, ..., n-1$ грани пронумерованы так, что вполне правильными являются грани $\Re_i^k (i = 1, ..., M_k)$.

Пусть $P(D) = \sum\limits_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$- линейный дифференциальный оператор с вещественными постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = \sum\limits_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$- отвечающий ему символ (характеристический многочлен). Здесь сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in N_0^n : \gamma_\alpha \neq 0\}$. Многогранник $\Re = \Re(P)$ набора точек $(P) \cup \{0\}$ назовем многогранником Ньютона или характеристическим многогранником оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$). Многочлен

$P^{i,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \Re_i^k} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ назовем подмногочленом многочлена P, отвечающим грани $\Re_i^k$ многогранника $\Re(P)$. Пусть $\lambda \in E^n$ и $d > 0$. Многочлен $R(\xi)$ называется $\lambda-$однородным $\lambda-$порядка d, если $R(t^\lambda \xi) \equiv R(t^{\lambda_1}\xi_1, ..., t^{\lambda_n}\xi_n) = t^d R(\xi)$ при всех $t > 0$, что эквивалентно тому, что многочлен $R(\xi)$ представляется в виде $R(\xi) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d} \gamma_\alpha \xi^\alpha$.

Легко показать, что подмногочлен $P^{i,k}$ многочлена P является $\lambda-$однородным для любого $\lambda \in \Lambda(\Re_i^k(P))$.

Для $\lambda-$однородного многочлена $R(\xi)$ обозначим $\Sigma(R) = \{\xi \in R^{n,0}, |\xi| = 1, R(\xi) = 0\}$. Пусть $\eta \in \Sigma(R)$, обозначим через $\Delta(\eta, R)$ λ-кратность нуля η, т.е. число, определенное так: $D^\nu R(\eta) = 0$ для всех $\nu \in N_0^n$ таких, что $(\lambda, \nu) < \Delta(\eta, R)$ и $D^\mu R(\eta) \neq 0$ для хотя бы одного мультииндекса такого, что $(\lambda, \mu) = \Delta(\eta, R)$. Для однородных многочленов, когда $\lambda_1 = ... = \lambda_n$, это кратность нуля η.

Грань $\Re_i^k$ многогранника $\Re(P)$ называется невырожденной, если $\Sigma(P^{i,k}) = \emptyset$. Многочлен $P(\xi)$ с многогранником $\Re = \Re(P)$ называется невырожденным , если невырождены все главные грани $\Re$. В работе [5] В.П. Михайлова доказано, что для невырожденного многочлена P с полным многогранником Ньютона $\Re(P)$ существует постоянная $C > 0$ такая,что

$$\sum_{\beta \in \Re} |\xi^\beta| \leq C\,[|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in R^n. \tag{1.1}$$

В работе [6] С. М. Никольского доказана единственность классического решения первой краевой задачи для уравнений, символы которых удовлетворяют этому неравенству. В [7] доказано, что условие невырожденности многочлена является также необходимым для справедливости (1.1).

Для многочлена $P(\xi)$ через $\tilde{P}(\xi)$ обозначим функцию Л. Хермандера, определяемую формулой

$$\tilde{P}(\xi) = [\sum_{\nu \in N_0^n} |D^\nu P(\xi)|^2]^{1/2}. \tag{1.2}$$

Многогранник Ньютона набора мультииндексов $\bigcup_\nu (D^\nu P(\xi))$ обозначим через $\tilde{\Re}(P)$ $= \Re(\tilde{P})$ и назовем многогранник Ньютона функции $\tilde{P}(\xi)$.

Из простых геометрических соображений ясно, что если $\Re(P)$ правильный многогранник, то $\tilde{\Re}(P) = \Re(P)$, при этом вполне правильные грани $\tilde{\Re}(P)$ и $\Re(P)$ совпадают.

Определение 1.1. *Говорят, что многочлен $P(\xi)$ мощнее (сильнее) многочлена $Q(\xi)$ и записывают $Q < P$ (соответственно $Q \prec P$), если существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $\xi \in R^n$ $\quad Q(\xi) \le C[1+|P(\xi)|]$ (соответственно $|\tilde{Q}(\xi)| \le C|\tilde{P}(\xi)|$). Если $Q < P < Q$ (соответственно $Q \prec P \prec Q$), то говорят, что многочлены P и Q имеют одинаковую мощность (силу).*

Определение 1.2. *Многочлен $P(\xi)$ называется* ***почти гипоэллиптическим*** *(см. [8], [9]), если $D^\beta P < P$ для всех $\beta \in N_0^n$.*

Известно, что многогранник Ньютона гипоэллиптического оператора является вполне правильным, а почти гипоэллиптического - правильным (см. [7]).

Ясно,что любой гипоэллиптический оператор является почти гипоэллиптическим. Обратное не верно, что видно из следующего примера.

Пример 1.1. Пусть $n = 2$, $P(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 - \xi_2)^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_1^2 + \xi_2^2 + 1$. Из теоремы 3.1 работы [7] следует, что это почти гипоэллиптический многочлен, а из теоремы 1 работы [10] следует, что P не гипоэллиптичен.
Из Теоремы 10.4.3 монографии [1] легко вывести, что для почти гипоэллиптических многочленов P и Q соотношения $Q < P$ и $Q \prec P$ эквивалентны.
В терминах решений дифференциальных уравнений гипоэллиптические уравнения характеризуются тем, что все непрерывные решения уравнения $P(D)u = 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями. В [11] доказано: для того, чтобы решения $P(D)u = 0$, суммируемые с определенным (экспоненциальным) весом были бесконечно дифференцируемыми функциями во всем пространстве, необходимо и достаточно, чтобы оператор $P(D)$ был почти гипоэллиптическим.

Пусть теперь $P(x, D) = \sum\limits_\alpha \gamma_\alpha(x) D^\alpha$ дифференциальный оператор с коэффициентами $\{\gamma_\alpha(x)\}$, определенными в области $\Omega \subset E^n$, $P(x, \xi) = \sum\limits_\alpha \gamma_\alpha(x)\xi^\alpha$ отвечающий ему характеристический многочлен (полный символ) и в каждой точке $x^0 \in \Omega$ функция $\tilde{P}(x^0, \xi)$ Л. Хермандера для многочлена $P(x^0, \xi)$ с постоянными коэффициентами определяется формулой (1.2).

Определение 1.3. *Говорят, что многочлен $P(x, \xi)$ имеет постоянную мощность (постоянную силу) в Ω, если для каждой пары точек $x^1, x^2 \in \Omega$ многочлены $P(x^1, \xi)$ и $P(x^2, \xi)$ (соответственно функции $\tilde{P}(x^1, \xi)$ и $\tilde{P}(x^2, \xi)$)) имеют одинаковую мощность, т.е существует число $C(x^1, x^2) > 0$ такое, что*

$$|P(x^1, \xi)|/|P(x^2, \xi)| \le C(x^1, x^2) \;\; \forall \xi \in R^n,$$

(соответственно для функции $\tilde{P}$).

Многочлены постоянной мощности в Ω имеют постоянную силу в Ω, что следует из теоремы 10.4.3 монографии [1]. Обратное не верно (см. ниже, пример 2.1).

2. Необходимые условия постоянства мощности и силы операторов (многочленов)

Для многочлена $P(x,\xi)$ в каждой фиксированной точке $x^0 \in \Omega$ обозначим через $\Re(x^0) = \Re(x^0, P)$ (соответственно $\tilde{\Re}(x^0) = \tilde{\Re}(x^0, P)$) многогранник Ньютона многочлена $P(x^0,\xi)$ с постоянными коэффициентами (соответственно функции $\tilde{P}(x^0,\xi)$) и введем понятия полноты, (вполне) правильности многогранника $\Re(x^0)$, (вполне) правильности и вырожденности его граней, понятия подграней и подмногочленов и для вырожденной грани $\Gamma = \Re^{k_0}_{i_0}$ $(1 \le i_0 \le M'_k(x^0), 0 \le k_0 \le n-1)$ введем обозначения $\Sigma(x^0,\Gamma)$ и $\Delta(x_0,\eta,\Gamma)$ как выше для многочлена $P(x^0,\xi)$ с постоянными коэффициентами. Мы скажем, что многогранник $\Re(x,P)$ (соответственно $\tilde{\Re}(x,P)$) не зависит от точки $x \in \Omega$, если множество его главных вершин не зависит от $x \in \Omega$.

Обозначим через $\aleph = \aleph(P)$ множество мультииндексов $\alpha \in N^n_0$, для которых коэффициент $\gamma_\alpha(x)$ при ξ^α в многочлене $P(x,\xi)$ не обращается в нуль хотя бы в одной точке $x \in \Omega$ и через $\Re(\aleph) = \Re(\aleph(P))$ многогранник Ньютона этого множества. Если многогранник $\Re(x,P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$, то, очевидно, главные грани многогранников $\Re(x,P)$ и $\Re(\aleph(P))$ и, если обозначить соответствующие главные грани одинаковыми индексами, множества $\Lambda[\Re^{k_0}_{i_0}(\Re(x,P))]$ и $\Lambda[\Re^{k_0}_{i_0}(\Re(\aleph(P)))]$ совпадают. Так как любой вектор $\lambda \in \Lambda(\Re(\aleph(P))$ является внешней нормалью одной и только одной грани $\Gamma = \Re^{k_0}_{i_0}$ $(1 \le i_0 \le M'_k(x^0), 0 \le k_0 \le n-1)$ многогранника $\Re(\aleph(P))$, то каждый такой вектор однозначно определяет числа $M = M(\lambda)$ и $d_j = d_j(\lambda), j = 0,1,...,M$, не зависящие от $x \in \Omega$ такие, что $d_0 > d_1 > ... > d \ge 0$ и многочлен $P(x,\xi)$ представляется в виде суммы $\lambda-$однородных многочленов

$$P(x,\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_j(x,\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha(x)\xi^\alpha, \tag{2.1}$$

где $P_0(x,\xi) = P^{i_0,k_0}(x,\xi)$ для любого $\lambda \in \Lambda(\Re^{k_0}_{i_0})$.

Пусть $\Gamma = \Gamma(x^0) = \Re^{k_0}_{i_0}$ $(1 \le i_0 \le M'_k, 0 \le k_0 \le n-1)$ некоторая главная вырожденная в точке $x^0 \in \Omega$ грань многогранника Ньютона $\Re(x^0,P)$ многочлена

$P(x^0, \xi)$. С каждой точкой $x^0 \in \Omega$, каждой гранью Γ, каждым вектором $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ и каждой точкой $\eta \in \Sigma(x^0, \Gamma)$ мы свяжем число $l(x^0) = l(x^0, \eta, \lambda, \Gamma)$, определенное следующим образом:

$$P_j(x^0, \eta) = 0 \;\; j = 0, 1, ..., l(x_0) - 1, \;\; P_{l(x^0)}(x^0, \eta) \neq 0 \tag{2.2}$$

и число $\tilde{l}(x^0) = \tilde{l}(x^0, \eta, \lambda, \Gamma)$, определенное формулой (см. представление (2.1))

$$\tilde{l}(x^0) = \max_{0 \leq j \leq M} \{d_j - \Delta(x^0, \eta, P_j)\}. \tag{2.3}$$

Лемма 2.1. *Пусть многочлен $P(x, \xi)$, с полным многогранником Ньютона $\Re(x, P)$, имеет постоянную мощность в Ω. Тогда 1) многогранник $\Re(x, P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$, 2) если Γ вырожденная главная грань многогранника $\Re(P) \equiv \Re(x, P)$, то множество $\Sigma(x, \Gamma)$ и для каждого вектора $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ и каждой точки $\eta \in \Sigma(\Gamma)$ числа $l(x, \eta, \Gamma)$ не зависят от точки $x \in \Omega$.*

Доказательство. 1) Достаточно доказать, что коэффициенты при главных вершин (нульмерных граней) $\Re(x, P)$ не обращаются в нуль ни в одной точке $x \in \Omega$. Пусть, напротив, коэффициент $\gamma_e(x)$ некоторой главной вершины e многогранника $\Re(x, P)$ обращается в нуль в некоторой точке $x^0 \in \Omega$.

Так как e главная вершина, то из геометрических соображений ясно, что существует вектор $\lambda \in \Lambda(e)$ такой, что $(n-1)-$мерная опорная к $\Re(x^0, P)$ гиперплоскость с внешней нормалью λ, проходящая через вершину e, не проходит через начало координат, т.е. если $(\lambda, \alpha) = d$ уравнение этой гиперплоскости, то $d > 0$.

Выберем точку $x^1 \in \Omega$ так, чтобы $\gamma_e(x^1) \neq 0$. Тогда легко подсчитать, что для любой точки $\eta \in R^{n,0}$, на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta$ $(s = 1, 2, ...)$ $P(x^1, \xi^s) = |\gamma_e(x^1)||\eta^e|s^d + o(s^d)$ при $s \to \infty$, в то время как $P(x^0, \xi^s) = o(s^d)$ что противоречит постоянству мощности многочлена $P(x, \xi)$ и доказывает пункт 1) леммы.

2) По уже доказанной части леммы многогранник $\Re(x, P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$. Если $\Sigma(x^1, \Gamma) \neq \Sigma(x^2, \Gamma)$ для пары точек x^1 и x^2 из Ω, то существует, например, $\eta \in \Sigma(x^1, \Gamma) \setminus \Sigma(x^2, \Gamma)$. Поступая как выше, из представления (2.1) имеем на той же последовательности $\{\xi^s\}$ $|P(x^1, \xi^s)| = o(s^{d_0})$, при $s \to \infty$ и $|P(x^2, \xi^s)| \geq |P^{i_0, k_0}(x^2, \xi^s)|s^{d_0}$ для всех $s = 1, 2, ...$, что противоречит постоянства мощности многочлена $P(x, \xi)$.

Пусть теперь $\eta \in \Sigma(\Gamma)$ и $l(x^1, \eta, \Gamma) > l(x^2, \eta, \Gamma)$ (см. (2.2)). Повторяя те же рассуждения, при этом имея в виду, что $P_i(x^j, \eta) = 0$ для всех $i < l(x^j)$, получим при $s \to \infty$ для каждого $j = 1, 2$

$$|P(x^j, \xi^s)| = |\sum_{0 \le i < l(x^j)} P_i(x^j, \xi^s) + P_{l(x^j)}(x^j, \xi^s) +$$

$$+ \sum_{i > l(x^j)} P_i(x^j, \xi^s)| = s^{l(x^j)} |P_{l(x^j)}(\eta)| + o(s^{l(x^j)}),$$

т.е. $|P(x^1, \xi^s)|/|P(x^2, \xi^s)| \to \infty$, что противоречит постоянству мощности многочлена $P(x, \xi)$. Лемма 2.1 доказана. □

Замечание 2.1. *Ниже мы покажем, что для многочленов постоянной силы многогранник $\tilde{\Re}(x, P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$. Отметим, однако, что для многочленов постоянной силы в Ω многогранник $\Re(x, P)$ может меняться от точки к точке, что подтверждается следующим примером.*

Пример 2.1. Пусть $n = 2$, $P(x, \xi) = \xi_1^2 + \xi_1^2 \xi_2^2 + |x|^2 \xi_2^2 + \xi_2$, $\Omega = \{x \in E^2 : |x| < 1\}$. Многогранник Ньютона $\Re(x, P)$ этого многочлена является правильным для всех $0 \neq x \in \Omega$ с вершинами $(0,0), (2,0), (2,2)$ и $(0,2)$ и полным для $x = 0$ с вершинами $(0,0), (2,0), (2,2)$ и $(0,1)$.

Из леммы 2.1 следует, что этот многочлен не имеет постоянной мощности в Ω. С другой стороны простой подсчет показывает, что коэффициент $\gamma_{(0,2)} = |x|^2$ при правильной вершине $(0,2)$ многогранника $\Re(x, P)$ заменяется коэффициентом $\gamma_{(0,4)}(x) = 4 + |x|^4$ при правильной вершине $(0,4)$ многогранника $\Re(x, \tilde{P}^2)$ многочлена $\tilde{P}^2(x, \xi)$. Так как $\gamma_{(0,4)}(x) > 0$ для всех $x \in \Omega$, то непосредственной проверкой легко убедиться, что многочлен $\tilde{P}^2(x, \xi)$ имеет постоянную мощность, следовательно, многочлен $P(x, \xi)$, имеет постоянную силу в Ω. Отметим, что в этом также можно убедиться применив теорему 2.1 (см. ниже).

Определение 2.1. *Оператор $P(x, D)$ назовем формально почти гипоэллиптическим в Ω, если*

a) $P(x_0, D)$ почти гипоэллиптичен для каждой точки $x_0 \in \Omega$,

b) оператор $P(x, D)$ имеет постоянную мощность в Ω.

Так как (см. [7], лемма 2.1, теорема 2.1 и следствие 2.1) многогранники Ньютона почти гипоэллиптических многочленов являются правильными и (во всяком случае при $n = 2$) не вырожденными, могут иметь только вполне правильные грани, то ниже, в леммах 2.2 и 2.3 мы будем считать, что многогранник Ньютона $\Re(x, P)$ изучаемого многочлена $P(x, \xi)$ является правильным, при этом либо для всех точек $x \in \Omega$ многочлен $P(x,\xi)$ невырожден, либо вырождены лишь вполне правильные грани.

Лемма 2.2. *Пусть $\Re(x,P)$ правильный многогранник Ньютона многочлена $P(x,\xi)$ постоянной силы в Ω. Тогда*

1) многогранник $\tilde{\Re}(x,P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$,

2) множества $\Sigma(x,P^{i,k})$, отвечающие вполне правильным подмногочленам $P^{i,k}(x,\xi)$ $(1 \le i \le M_k, 0 \le k \le n-1)$ не зависят от точки $x \in \Omega : \Sigma(x,P^{i,k}) = \Sigma(P^{i,k})\, \forall x \in \Omega$,

3) если $\Gamma = \Re_{i_0}^{k_0}(x_0,P)$ вполне правильная вырожденная грань $\Re(x,P)$, $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$, и $\eta \in \Sigma(x,P^{i_0,k_0})$, то (см. (2.3)) число $\tilde{l}(x,\eta,\lambda,\Gamma)$ не зависит от точки $x \in \Omega$.

Доказательство. 1) Так как вполне правильные вершины и коэффициенты, отвечающие этим вершинам в многогранниках $\Re(x,P)$ и $\tilde{\Re}(x,P)$ совпадают, то их независимость от $x \in \Omega$ доказывается как соответствующий случай в лемме 2.1. Пусть e правильная, но не вполне правильная вершина $\tilde{\Re}(x,P)$. Так как многогранник $\Re(x,P)$ правильный, то из геометрических соображений ясно, что в этом случае а) e лежит на какой - то координатной гиперплоскости, б) проекция какой - то вполне правильной вершины e^1 многогранника $\Re(x,P)$ на соответствующую гиперплоскость совпадает с e, т.е. существует мультииндекс $0 \ne \nu \in N_0^n$, такой, что $e^1 - \nu = e$. Тогда из леммы 2.1 из [13] следует, что подмногочлен, отвечающий вершине $2e$ многогранника $\Re(x,\tilde{P}^2)$ многочлена $\tilde{P}^2(x,\xi)$ имеет вид $|D_\xi^\nu(\gamma_{e^1}(x)\xi^{e^1})|^2 + ... = c(e^1,\nu)|\gamma_{e^1}(x)|^2\xi^{2e} + ...$, где $c(e^1,\nu) > 0$ и не выписаны неотрицательные члены. Так как по уже доказанной части $\gamma_{e^1}(x) \ne 0$ при $x \in \Omega$ и единственная неправильная вершина полного многогранника является начало координат, то первый пункт доказан.

2) вполне правильные подмногочлены для многочлена $P(x,\xi)$ и функции $\tilde{P}(x,\xi)$ совпадают, поэтому этот пункт доказывается аналогично пункту 2) леммы 2.1.

3) Пусть $\tilde{l}(x_1,\eta,\lambda,\Gamma) = d_{j_1} - \Delta(\eta,x^1,P_{j_1}) > d_{j_2} - \Delta(\eta,x^2,P_{j_2}) = \tilde{l}(x_2,\eta,\lambda,\Gamma)$ для некоторой пары точек x^1, x^2 из Ω и некоторой тройки (η,λ,Γ). Здесь j_1 и j_2 номера, реализующие максимум в правой части (2.3) соответственно в точке x^1 и x^2.

Для каждого $\nu \in N_0^n$, по вектору $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$, и точки $\eta \in \Sigma(x,P^{i_0,k_0})$, представим многочлен $D^\nu P(x,\xi)$ в виде суммы λ–однородных многочленов по формуле (2.1).

Тогда для каждого $p = 1, 2$ имеем (ниже $\Delta_p = \Delta(\eta, x^p, P_{j_p})$, $p = 1, 2$)

$$(2.4) \qquad \tilde{P}(x^p, \xi) = [\sum_{(\lambda,\nu)<\Delta_p} + \sum_{(\lambda,\nu)=\Delta_p} + \sum_{(\lambda,\nu)>\Delta_p}] |\sum_{j=0}^{M} D^\nu P_j(x^p, \xi)|.$$

Рассмотрим поведение функции $\tilde{P}(x^p, \xi)$, $p = 1, 2$ на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta$, $s = 1, 2, \ldots$ Так как многочлены $\{D^\nu P_j\}$ $\lambda-$ однородны по ξ, то простые выкладки показывают (см. определение числа $\tilde{l}$), что при $s \to \infty$

$$(2.5) \qquad \left[\sum_{(\lambda,\nu)<\Delta_p} + \sum_{(\lambda,\nu)>\Delta_p}\right] \left|\sum_{j=0}^{M} D^\nu P_j(x^p, \xi^s)\right| = o(s^{\tilde{l}(x^p)}), \quad p = 1, 2$$

и с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2

$$(2.6) \qquad \sum_{(\lambda,\nu)=\Delta_1} |\sum_{j=0}^{M} D^\nu P_j(x^1, \xi^s)| \geq C_1 \, |D^\nu P_{j_1}(x^1, \eta)| \, s^{\tilde{l}(x^1)},$$

$$(2.6') \qquad \sum_{(\lambda,\nu)=\Delta_2} |\sum_{j=0}^{M} D^\nu P_j(x^2, \xi^s)| \leq C_2 \; s^{\tilde{l}(x^2)} \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Так как $D^\nu P_{j_1}(x^1, \eta) \neq 0$ и $\tilde{l}(x_1, \eta) > \tilde{l}(x_2, \eta)$, то соотношения (2.4) - (2.6$'$) показывают, что при $s \to \infty$ $\tilde{P}(x^1, \xi^s)/\tilde{P}(x^2, \xi^s) \to \infty$. Это противоречит постоянству силы многочлена $P(x, \xi)$ и доказывает пункт 3). Лемма 2.2 доказана. □

В дополнении к леммам 2.1 и 2.2 для многочленов двух переменных мы докажем еще одно свойство многочленов постоянной мощности, необходимое нам для вывода критерия постоянства мощности многочленов. При этом мы ограничиваемся двумерным случаем, так как в случае $n = 2$ обобщенно - однородные многочлены представляются в виде произведения простых обобщенно - однородных многочленов, что намного облегчает их изучение и за счет этого полученные результаты носят окончательный характер. Именно, в [8, Лемма 2.1]) доказано, что для любого однородного многочлена λ с вещественными коэффициентами существуют вещественные числа $\tau_1, \ldots, \tau_r$, натуральные числа $m_1, \ldots, m_r$ и бесконечно дифференцируемая в $R^{2,0}$ функция q_0 такие, что $q_0(\xi) \neq 0$ при $\xi \in R^{2,0}$ и многочлен $R(\xi)$ представляется в виде

$$(2.7) \qquad R(\xi) = q_0(\xi) \prod_{i=1}^{r} (\xi_1 - \tau_i \xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{m_i} =: q_0(\xi) \prod_{i=1}^{r} [q_i(\xi)]^{m_i}.$$

Отметим, что так как концы отрезка, на котором расположены мультииндексы $\alpha \in (R)$ также являются мультииндексами, то координаты вектора λ можно выбирать так, чтобы отношение λ_1/λ_2 стало рациональным числом с нечетным знаменателем, и при $\lambda_1 = \lambda_2$, т.е. когда $R(\xi)$ однородный многочлен, q_i, $i = 0, 1, ..., r$ также однородные многочлены.

Лемма 2.3. *Пусть $n = 2$, $\Gamma = \Re^{i_0,1}$ некоторая вырожденная одномерная вполне правильная грань полного многогранника $\Re = \Re(P) \equiv \Re(x, P)$ многочлена $P(x, \xi)$ постоянной мощности в $\Omega \subset E^2$, $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ и $P^{i_0,1}(x, \xi)$ $\lambda-$однородный подмногочлен многочлена P, отвечающий грани Γ. Для каждой точки $x \in \Omega$ представим многочлен $P^{i_0,1}(x, \xi)$ в виде (2.7)*

$$P^{i_0,1}(x, \xi) = q_0(x, \xi) \prod_{l=1}^{r(x)} (\xi_1 - \tau_l(x)\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{m_l(x)} =: q_0(x, \xi) \prod_{l=1}^{r(x)} [q_l(x, \xi)]^{m_l(x)}.$$

Тогда числа $r(x), \{\tau_l(x)\}$ и $\{m_l(x)\}$ не зависят от точки $x \in \Omega$.

Доказательство. Независимость от $x \in \Omega$ чисел $r(x)$ и $\{\tau_l(x)\}$ доказана в лемме 2.2. Докажем, что числа $\{m_l(x)\}$ также не зависят от x. Пусть, наоборот, $m_{l_0}(x^1) > m_{l_0}(x^2)$ для некоторой пары точек x^1 и x^2 из Ω и некоторого номера l_0, $(1 \le l_0 \le r \equiv r(x))$. По вектору λ представим многочлены $Q_j(\xi) = P(x^j, \xi)$ $j = 1, 2$ с постоянными коэффициентами в виде (см. представление (2.1))

$$Q_j(\xi) = P^{i_0,1}(x^j, \xi) + p^{i_0,1}(x^j, \xi) = q_0(x^j, \xi) \prod_{l=1}^{r(x)} [q_l(\xi)]^{m_l(x^j)} + p^{i_0,1}(x^j, \xi) =$$

$$= q_0(x^j, \xi)\, \tilde{q}(\xi)\, [q_{l_0}(\xi)]^{m_{l_0}(x^j)} + p^{i_0,1}(x^j, \xi),$$

где

$$p^{i_0,1}(x^j, \xi) = P(x^j, \xi) - P^{i_0,1}(x^j, \xi);\;\; \tilde{q}(\xi) = \prod_{l \ne l_0, l=1}^{r(x)} [q_l(\xi)]^{m_l(x^j)}.$$

Пусть $q_{l_0}(\eta) = \eta_1 - \tau_{l_0}\eta_2^{\lambda_1/\lambda_2} = 0$, $\delta > 0$, $\xi_1^s = s^{\lambda_1}\,(s^{-\delta} + 1)\,\eta_1$, $\xi_2 = s^{\lambda_2}\,\eta_2$. Тогда для $j = 1, 2$ и $s = 1, 2, ...$ имеем

$$Q_j(\xi^s) = s^{d_0}\, P^{i_0,1}(x^j, ((s^{-\delta} + 1)\,\eta_1, \eta_2)) + p^{i_0,1}(x^j, \xi^s), \tag{2.8}$$

при этом, очевидно, с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2

$$|p^{i_0,1}(x^j, \xi^s)| \le C_j\, s^{d_1}. \tag{2.9}$$

Простые выкладки показывают существование положительных чисел C_3 и C_4 таких, что

$$|P^{i_0,1}(x^1, \xi^s)| \le C_3\, s^{d_0 - \delta\, m_{l_0}(x^1)},\;\; |P^{i_0,1}(x^2, \xi^s)| \ge C_4\, s^{d_0 - \delta\, m_{l_0}(x^2)}. \tag{2.10}$$

Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы $d_0 - \delta\, m_{l_0}(x^1) > d_1$. Так как $d_0 - \delta\, m_{l_0}(x^1) < d_0 - \delta\, m_{l_0}(x^2)$, то отсюда и из (2.8) - (2.10) следует, что $|P(x^1, \xi^s)|/P(x^2, \xi^s) \to 0$, при $s \to \infty$, что противоречит постоянной мощности многочлена $P(x, \xi^s)$. Лемма 2.3 доказана. $\square$

Из лемм 2.1 и 2.3 непосредственно следует

Следствие 2.1. *Если двумерный многочлен $P(x,\xi)$, с единственной вырожденной гранью $\Re^{i_0,1}$, имеет постоянную мощность в Ω, то многочлен $P^{i_0,1}(x,\xi)$ представляется в виде*

$$P^{i_0,1}(x,\xi) = q_0(x,\xi)\, p_0(\xi) = q_0(x,\xi) \prod_{i=1}^{r} (\xi_1 - \tau_i \xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{m_i}, \tag{2.11}$$

где $q_0(x,\xi)$ непрерывная по x и бесконечно дифференцируемая по ξ функция такая, что $q_0(x,\xi) \neq 0$ для всех $x \in \Omega$ и $\xi \in R^{2,0}$.

Следующее предложение дает необходимое условие формальной почти гипоэллиптичности. Оно доказывается буквальным повторением доказательства леммы 3.2 работы [7], с учетом лемм 2.1 и 2.2 настоящей работы, поэтому мы здесь его проводить не будем. Как будет видно ниже, для определенного класса многочленов $P(x,\xi)$ оно является и достаточным условием для формальной почти гипоэллиптичности (см. теорему 3.3).

Лемма 2.4. *Пусть $\Gamma = \Re_{i_0}^{k_0}$ $(1 \le i_0 \le M_k, 0 \le k_0 \le n-1)$ некоторая вполне правильная вырожденная грань правильного многогранника Ньютона $\Re = \Re(P) \equiv \Re(x,P)$ формально почти гипоэллиптического многочлена $P(x,\xi)$, $x \in \Omega$, $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ и $\eta \in \Sigma(x,\Gamma)$. Тогда*

$$d_j(\lambda) - \Delta(x,\eta,\lambda,P_j) \le d_{l(x)}, \;\; j = 0,1,...,l-1.$$

3. Достаточные условия постоянства мощности и формальной почти гипоэллиптичности

Сперва докажем следующее предложение, решающее вопрос о постоянстве мощности невырожденных многочленов.

Лемма 3.1. *Пусть коэффициенты $\gamma_\alpha(x)$ невырожденного многочлена $P(x,\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha(x)\xi^\alpha$ определены в ограниченной области Ω и ограничены в $\bar{\Omega}$, причем главные коэффициенты непрерывны в $\bar{\Omega}$. Пусть полный многогранник $\Re(x,P)$ не зависит от точки $x \in \Omega : \Re(x,P) \equiv \Re(P)$. Тогда существуют числа $0 < c_1 \le c_2$*

такие, что

$$c_1 \sum_{\nu \in \Re(P)} |\xi^\nu| \le |P(x,\xi)| \le c_2 \sum_{\nu \in \Re(P)} |\xi^\nu| \quad x \in \Omega,\ \xi \in R^n. \tag{3.1}$$

Доказательство. В. П. Михайловым в [5] доказана следующая теорема: если $0 = e^0, e^1, \dots, e^M$ вершины полного многогранника Ньютона $\Re(P)$ невырожденного многочлена $P(\xi)$, то с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2 справедливы неравенства

$$\sum_{\nu \in \Re} |\xi^\nu| \le C_1 \sum_{k=0}^{M} |\xi^{e^k}| \le C_2\, |P(\xi)|, \quad \xi \in R^n,$$

а для неглавных точек $\nu \in \Re$ при любом $\delta > 0$ существует число $c(\delta) > 0$ такое, что

$$|\xi^\nu| \le \delta \sum_{k=0}^{M} |\xi^{e^k}| + c(\delta), \quad \xi \in R^n. \tag{3.2}$$

Правая часть (3.1) следует из ограниченности коэффициентов многочлена $P(x,\xi)$.

Докажем левую часть (3.1). Пусть x^0 точка из Ω. Так как многочлен $P(x^0,\xi)$ с постоянными коэффициентами невырожден, то по теореме В.П. Михайлова существует число $C_3(x^0) > 0$ такое, что

$$\sum_{\nu \in \partial\Re(P)} |\xi^\nu| \le C_3(x^0)\, |P(x^0,\xi)|, \quad \xi \in R^n, \tag{3.3}$$

где через $\partial\Re(P)$ обозначено множество главных точек многогранника $\Re(P)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и число $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ выбрано так, что $|\gamma_\alpha(x) - \gamma_\alpha(x^0)| < \varepsilon/2$ для всех главных коэффициентов $\gamma_\alpha(x)$ и всех точек $x \in \bar{\Omega}$ таких, что $|x - x^0| \le \rho$. Тогда с некоторой постоянной $C_4 > 0$ имеем

$$|P(x,\xi) - P(x^0,\xi)| \le \sum_{\nu \in \partial\Re(P)} |\gamma_\alpha(x) - \gamma_\alpha(x^0)|\, |\xi^\nu| +$$

$$+ C_4 \sum_{\nu \in \Re(P)\setminus\partial\Re(P)} |\xi^\nu| \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\nu \in \partial\Re(P)} |\xi^\nu| + C_4 \sum_{\nu \in \Re(P)\setminus\partial\Re(P)} |\xi^\nu|. \tag{3.4}$$

Применяя неравенство (3.2) при $0 < \delta \le \varepsilon/2C_1$, имеем

$$C_4 \sum_{\nu \in \Re(P)\setminus\partial\Re(P)} |\xi^\nu| \le \varepsilon/2 \sum_{\nu \in \partial\Re(P)} |\xi^\nu| + c(\varepsilon). \tag{3.5}$$

Из (3.1) - (3.5) получаем при $|x - x^0| \le \rho$

$$\sum_{\nu \in \partial\Re(P)} |\xi^\nu| \le C_3(x^0)\, |P(x,\xi) - P(x^0,\xi)| + C_3(x^0)\, |P(x,\xi)| \le$$

$$\leq C_3(x^0)\,\varepsilon \sum_{\nu\in\partial\Re(P)} |\xi^\nu| + C_3(x^0)\,|P(x,\xi)| + c(\varepsilon).$$

Выберем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы $C_3(x^0)\,\varepsilon < 1$, перенесем член с ε в левую сторону и разделим обе части полученного неравенства на $1 - C_3(x^0)\,\varepsilon$, тогда с некоторыми положительными постоянными $C_5 = C_5(x^0,\varepsilon)$ и $C_6 = C_6(x^0,\varepsilon)$ при $|x - x^0| \leq \rho$, получаем

$$\sum_{\nu\in\partial\Re(P)} |\xi^\nu| \leq C_5\,|P(x,\xi)| + C_6. \tag{3.6}$$

Так как множество областей $U(x^0) = \{x \in \Omega : |x-x^0| \leq \rho\}$ для всех $x^0 \in \Omega$ покрывает Ω, то, согласно лемме Гейне - Бореля, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{U_k\}_1^M$ области Ω. Возьмем точки $x^k \in U_k$ $(k = 1, ..., M)$ и запишем неравенства (3.6) для этих точек, при этом каждой точки x^k будет соответствовать вполне определенное число $\varepsilon_k > 0$. Взяв $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_M\}$ и $c_1^{-1} = \max_{1\leq k\leq M}\{C_2(x^k), C_3(x^k)\}$, из $\{(3.6)\}$ получим левую часть неравенства (3.1). Лемма 3.1 доказана. □

Из леммы 3.1 непосредственно следует следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть многочлен $P(x,\xi)$ удовлетворяет условиям леммы 3.1. Тогда $P(x,\xi)$ имеет постоянную мощность в Ω.*

Обозначим через I_n множество многочленов $P(\xi) = \sum_{\alpha\in(P)} \gamma_\alpha\,\xi^\alpha$ с постоянными коэффициентами таких, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$.

Пусть $P(x,\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha(x)\xi^\alpha$ многочлен, с коэффициентами $\{\gamma_\alpha(x)\}$, определенными в области $\Omega \subset E^n$. Будем говорить, что $P \in I_n(\Omega)$, если многочлен $P(x^0,\xi)$ с постоянными коэффициентами принадлежит I_n для любой точки $x^0 \in \Omega$. При этом, очевидно, что если многочлен $P(x,\xi)$ имеет постоянную мощность в Ω и $P(x^0,\xi) \in I_n$ хотя бы в одной точке $x^0 \in \Omega$, то $P \in I_n(\Omega)$.

Легко также убедится, что если $P \in I_n(\Omega)$, то, не меняя силу или мощность этого многочлена, за счет добавления константы к P и умножения на константу, можно добиться того, что $P(x,\xi) > 0$ для всех $\xi \in R^n$ и $x \in \Omega$. Поэтому далее будем считать, что если $P \in I_n(\Omega)$, то $P(x,\xi) > 0$ для всех $\xi \in R^n$ и $x \in \Omega$.

Теперь мы в состоянии доказать критерий постоянства мощности одного класса многочленов. При этом ниже, в теореме 3.2, для упрощения рассуждений и записи, будем предполагать, что (см. представление (2.1)) $P_1(x,\eta) \neq 0$ для всех точек $\eta \in \Sigma(x, \Gamma)$, т.е. для точек $\eta \in R^{2,0}$ для которых $P_0(x, \eta) = 0$. Это эквивалентно тому, что $l(x, \eta) = 1$. Выше мы убедились (см. пункт 2) леммы 2.1), что для многочленов постоянной мощности множества $\Sigma(x, \Gamma)$ и числа $l(x, \eta, \Gamma)$ не зависят от x : $l(x, \eta) = l(\eta)$ $\forall x \in \Omega$. Так, что наше ограничение заключается в том, что мы полагаем $l(\eta) = 1$ для всех $\eta \in \Sigma(\Gamma)$.

Теорема 3.2. *Пусть $n = 2$ и $\Re(x, P)$ правильный многогранник Ньютона многочлена $P(x, \xi) \in I_2(\Omega)$ с вещественными коэффициентами, определенными в ограниченной области $\Omega \subset E^2$. Пусть коэффициенты $\gamma_\alpha(x)$ ограничены в $\bar{\Omega}$, причем главные коэффициенты непрерывны в $\bar{\Omega}$.*

Пусть одномерная вполне правильная грань $\Gamma = \Re^{i_0,1}$ многогранника $\Re(x, P)$ вырождена, при этом остальные одномерные главные грани $\Re$ невырождены.

Многочлен $P(x, \xi)$ имеет постоянную мощность в Ω тогда и только тогда, когда

1) многогранник $\Re(x, P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$: $\Re(x, P) \equiv \Re(P)$ для всех $x \in \Omega$,

2) многочлен $P^{i_0,1}(x, \xi)$ представляется в виде (2.11).

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой пары точек x^1 и x^2 из Ω многочлены $P(x^j, \xi)$ $(j = 1, 2)$ с постоянными коэффициентами имеют одинаковую мощность. Пусть, наоборот, существует последовательность $\{\xi^s\}$, $\xi^s \to \infty$ такая, что при $s \to \infty$, имеем

$$|P(x^1, \xi^s)|/|P(x^2, \xi^s)| \to \infty. \tag{3.7}$$

Не умаляя общности, можно считать, что все координаты векторов $\{\xi^s\}$ положительны. Обозначим

$$\rho_s = exp[(ln\xi_1^s)^2 + (ln\xi_2^s)^2]^{1/2}, \quad \mu_i^s = \frac{ln\xi_i^s}{ln\rho_s}, \ i = 1, 2.$$

Тогда $\xi^s = \rho_s^{\mu^s}$, μ^s– единичные векторы, $\rho_s \to \infty$ если $\xi^s \to \infty$, или если некоторая координата ξ^s стремится к нулю при $s \to \infty$. Так как векторы μ^s находятся на единичной окружности, то у последовательности $\{\mu^s\}$ имеется предельная точка μ. За счет взятия подпоследовательности можно считать, что $\mu^s \to \mu$ при $s \to \infty$. Из выпуклости многогранника $\Re$ следует, что μ является внешней нормалью к одной и только одной грани $\Re$.

Возьмем в E^2 какой - нибудь ортогональный базис $(\mu, \tilde{\mu})$. Тогда $\mu^s = \kappa_1^s \mu + \kappa_2^s \tilde{\mu}$, $s = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим грани $\Re_{i_1}^{k_1}$, и $\Re_{i_2}^{k_2}$, многогранника $\Re = \Re(P)$, удовлетворяющие условиям, что $\Re_{i_1}^{k_1}$, лежит в опорной к $\Re$ плоскости с внешней нормалью μ, а грань $\Re_{i_2}^{k_2}$, является подгранью $\Re_{i_1}^{k_1}$, и лежит в опорной к (рассматриваемой изолированно) грани $\Re_{i_1}^{k_1}$ с внешней нормалью $\tilde{\mu}$. Если существуют более одной такой подграни (что возможно только при $k_1 = 1$), то в качестве $\Re_{i_2}^{k_2}$, условимся брать ту, для точек α которой $(\tilde{\mu}, \alpha)$ больше. При этом независимо от того $k_1 = 0$ или $k_1 = 1$, грань $\Re_{i_2}^{k_2}$, нульмерная: $k_2 = 0$, т.е $\Re_{i_2}^{0}$, вершина $\Re$.

Так как $\mu^s \to \mu$, то $\kappa_1^s \to 1$, $\kappa_2^s = o(\kappa_1^s)$ при $s \to \infty$. Следовательно $\rho_s^{\kappa_1^s} \to \infty$ при $s \to \infty$. Возможны два случая: (за счет выбора подпоследовательности) а) $\rho_s^{\kappa_2^s} \to \infty$, б) $\rho_s^{\kappa_2^s}$ имеет конечный предел.

Случай а). Пусть сначала $d_0 > 0$ и $\beta = \Re_{i_2}^{0}$, вершина $\Re(P)$ и $\gamma_\beta(x)$ отвечающий ей коэффициент. Представим по формуле (2.1) и по векторам μ и $\tilde{\mu}$ многочлены $P(x^j, \xi)$, $j = 1, 2)$ в виде

$$P(x^j, \xi) = \sum_{j=0} P_j(x^j, \xi).$$

Тогда из выпуклости многогранника $\Re$ и его граней и из $\mu-$ (соответственно $\tilde{\mu}-$) однородности многочлена $P_0(x^j, \xi) = P^{i_1, k_1}(x^j, \xi)$, (соответственно $P^{i_2, 0}(x^j, \xi) = \gamma_\beta(x^j)\,(\xi)^\beta$) получим на последовательности $\{\xi^s\}$ при некоторых положительных σ_1 и σ_2

$$P(x^j, \xi^s) = \rho_s^{\kappa_1^s d_0}\, P^{i_1, k_1}(x^j, \rho_s^{\kappa_2^s \tilde{\mu}}) + o(\rho_s^{\kappa_1^s d_0}) + \rho_s^{\kappa_1^s d_1}\, P_1(x^j, \rho_s^{\kappa_2^s \tilde{\mu}}) + o(\rho_s^{\kappa_1^s d_1}) =$$

$$= \rho_s^{\kappa_1^s d_0 + \kappa_2^s(\tilde{\mu}, \beta)} \gamma_\beta(x^j) + o(\rho_s^{\kappa_1^s d_0 + \kappa_2^s(\tilde{\mu}, \beta)}) + \rho_s^{\kappa_1^s d_1}\, P_1(x^j, \rho_s^{\kappa_2^s \tilde{\mu}}) + o(\rho_s^{\kappa_1^s d_1}). \tag{3.8}$$

Так как $\beta = \Re_{i_2}^{0}$, главная вершина $\Re$, то по лемме 2.1 $\gamma_\beta(x^2) \neq 0$. С другой стороны, так как $\kappa_1^s \to 1$, $\kappa_2^s = o(\kappa_1^s)$ при $s \to \infty$ и $d_0 > d_1$, то из (3.8) следует существование положительных постоянных C_1 и C_2 таких, что для достаточно больших s

$$|P(x^1, \xi^s)| \le C_1\, |\gamma_\beta(x^1)| \rho_s^{\kappa_1^s d_0 + \kappa_2^s(\tilde{\mu}, \beta)}; \; |P(x^2, \xi^s)| \ge C_2 |\gamma_\beta(x^2)| \rho_s^{\kappa_1^s d_0 + \kappa_2^s(\tilde{\mu}, \beta)},$$

что противоречит (3.7).

Если $d_0 = 0$, то противоречие получается аналогично соответствующему случаю теоремы 3.1 работы [7].

В случае б) $\eta^s = \rho_s^{\kappa_2^s \tilde{\mu}} \to \eta$ при $s \to \infty$ для некоторой $\eta \in R^{2,0}$. Рассмотрим два подслучая: б.1) $P^{i_1, k_1}(x^2, \eta) \neq 0$ и б.2) $P^{i_1, k_1}(x^2, \eta) = 0$.

В случае б. 1) $|P^{i_1,k_1}(x^2,\eta^s)| > 0$ для достаточно больших s, поэтому, для таких s, как и выше, из (3.8) имеем с некоторыми положительными постоянными C_3 и C_4

$$|P(x^1,\xi^s)| \le C_3 |P^{i_1,k_1}(x^1,\eta)| \rho_s^{\kappa_1^s d_0}; \; |P(x^2,\xi^s)| \ge C_4 |P^{i_1,k_1}(x^2,\eta)| \rho_s^{\kappa_1^s d_0},$$

что противоречит (3.7).

В случае б. 2) грань $\Re_{i_1}^{k_1}$, является вырожденной, следовательно совпадает с одномерной гранью Γ и $k_1 = 1$. Так как $P(x,\xi) \in I_2(\Omega)$, то по лемме 3.1 работы [5] (см.также [14]) $P^{i_1,1}(x^2,\eta^s) \ge 0$ и $P_1(x^2,\eta^s) > 0$ для достаточно больших s, при этом $P^{i_1,1}(x^j,\eta^s)$ $(j = 1,2)$ представляются в виде (2.11):

$$P^{i_1,1}(x^j,\eta^s) = q_0(x^j,\eta^s)\, p_0(\eta^s), \; j = 1,2. \tag{3.9}$$

Так как $q_0(x^j,\xi)$ непрерывная по $\xi \in R^{2,0}$ функция и $q_0(x^j,\eta) \ne 0$, то существуют постоянные $C_j = C_{x^j} > 0$ $(j = 1,2)$ такие, что для достаточно больших s

$$C_5 \le |q_0(x^j,\eta^s)| \le C_6, \quad j = 1,2. \tag{3.10}$$

Тогда из (3.8) - (3.10) для достаточно больших s имеем с некоторой постоянной $C_7 = C_7(x^1,x^2) > 0$

$$|P(x^1,\xi^s)| = |q_0(x^1,\eta^s)\, p_0(\eta^s) \rho_s^{\kappa_1^s d_0} + P_1(x^1,\eta^s)\, \rho_s^{\kappa_1^s d_1} + o(\rho_s^{\kappa_1^s d_1})| \le C_7 |P(x^2,\xi^s)|,$$

что противоречит (3.7). Теорема 3.2 доказана. □

Замечание 3.1. *Незначительным изменением доказательства можно убедиться в том, что теорема 3.2 остается в силе и тогда, когда* $l(\eta) > 1$ *для некоторой точки* $\eta \in \Sigma(\Gamma)$, *т.е.* $P_i(x,\eta) = 0$ $i = 0,1,...,l-1$, *если, например, для каждой такой точки* η *существует окрестность* $U(\eta)$ *такая, что* $P_i(x,\xi) \ge 0$ *для всех* $\xi \in U(\eta)$, $x \in \Omega$ *и* $i = 0,1,...,l-1$.

Теорема 3.3. *Пусть двумерный многочлен* $P(x,\xi)$ *удовлетворяет условиям теоремы 3.2 и, следовательно, имеет постоянную мощность в* Ω. *Многочлен* $P(x,\xi)$ *является формально почти гипоэллиптическим в* Ω *тогда и только тогда, когда*

1) многогранник $\Re(P) \equiv \Re(x,P)$ *правильный*

2) $d_0(\lambda) - \Delta(x,\eta,\lambda,P_0) \le d_1$ *для всех* $x \in \Omega$ *и для всех* $\eta \in \Sigma(x,\Gamma)$.

Доказательство. Необходимость условия 1) следует из леммы 2.1 работы [7], необходимость условия 2) следует из леммы 2.4 настоящей работы. Достаточность следует из теоремы 3.1 работы [7], если учесть, что из постоянства мощности многочлена $P(x,\xi)$ следует, что множество $\Sigma(x,\Gamma)$ и числа $\Delta(x,\eta,\lambda,P_0)$, $l(x,\eta,\lambda,\Gamma)$ не зависят от точки $x\in\Omega$, при этом в данном случае вектор λ определяется однозначно и $l(\eta,\Gamma)=1$ для всех $\eta\in\Sigma(\Gamma)$. □

Abstract. In this paper we study properties of differential operators (polynomials) with variable coefficients of constant power or of constant strength in the sense of L. Hörmander. Necessary conditions for constancy of the strength and power of polynomials of many variables are obtained. For polynomials of two variables with real coefficients necessary and sufficient conditions for constancy of the power and for formally almost hypoellipticity, in terms of zeros and their multiplicities of the corresponding generalized-homogeneous subpolynomials of underlying polynomials are also obtained.

Список литературы

[1] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators 2, Springer - Verlag (1983).

[2] B. Malgrange, "Sur une classe d'opérateurs differevtiels hypoelliptiques", Bull. Soc.Math.France, **58**, 283 – 306 (1957).

[3] L. Hörmander, "On interior regularity of the solutions of partial differential equations", Comm. Pure Appl. Math., **11**, 197 – 218 (1958).

[4] J. Peetre, "A proof of the hypoelliptisity of formally hypoelliptic differential operators", Comm. Pure Appl. Math., **14**, 737 – 747 (1961).

[5] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, **91**, 59 – 80 (1967).

[6] С. М. Никольский, "Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения", ДАН СССР, **146**, no. 4, 767 – 769 (1968).

[7] Г. Г. Казарян, "О почти гипоэллиптических многочленах, возрастающих на бесконечности", Изв.НАН Армении, серия Мат., **46**, но. 6, 11 – 30 (2011).

[8] Г. Г. Казарян, "Об одном семействе гипоэллиптических полиномов", Изв.АН Арм. ССР, серия Мат., **9**, no. 3, 189 – 211 (1974).

[9] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials", Doklady Ross. Acad. Nauk., **398**, no. 6, 701 – 703 (2004).

[10] Г. Г. Казарян, "О гипоэллиптических полиномах", ДАН СССР, **214**, no. 5, 1016 – 1019 (1974).

[11] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Об одном классе почти гипоэллиптических операторов", Изв. НАН Армении, серия Мат., **41**, но. 6, 39 – 56 (2006).

[12] Г. Г. Казарян, "О сравнении дифференциальных операторов и дифференциальных операторах постоянной силы", Труды МИАН СССР, **131**, 94 – 118 (1974).

[13] Г. Г. Казарян, "Об оценках L_p–норм производных через нерегулярный набор дифференциальных операторов", Дифф. Уравнения, **5**, no. 5, 911 – 921.

[14] H. G. Ghazaryan, "Addition of lower order terms preserving almost hypoellipticity of polynomials", Eurasian Mathematical Journal, **4**, no. 3, 32 – 52 (2013).

Поступила 9 июня 2014