Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 6, 2015, стр. 26-32.
[1]

ДЕМОКРАТИЧЕСКИЕ ПОДСИСТЕМЫ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ХААРА

С. Л. ГОГЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *gogyan@instmath.sci.am*

Аннотация. В настоящей работе описываются все подсистемы многомерной системы Хаара, которые являются демократическими системами в $L_1(0,1)^d$.

MSC2010 numbers: 41A65, 46B20.

Ключевые слова: гриди алгоритм; многомерная система Хаара в L^1; подсистема системы Хаара.

1. Введение

Пусть $\Psi = \{\psi_n\}$ – нормированный базис в Банаховом пространстве X. Тогда, для любого элемента $x \in X$ будем иметь разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\psi_n \tag{1.1}$$

с $\lim c_n(x) = 0$. Положим $\Phi_0 = \emptyset$ и индукцией по m построим последовательность множеств натуральных чисел $\{\Phi_m\}$ удовлетворяющих условиям:

$$\Phi_{m-1} \subset \Phi_m, \quad \#\Phi_m = m \ \text{ и } \ \min_{i\in\Phi_m} | c_i(x) | \geq \max_{i\notin\Phi_m} | c_i(x) | .$$

Множества Φ_m могут определяться неоднозначно, но в рамках наших рассуждений это не имеет значения. Положим

$$G_m(x) = G_m(x, \{\Phi_m\}) = \sum_{i\in\Phi_m} c_i(x)\psi_i. \tag{1.2}$$

Фактически, для получения $G_m(x)$ нужно из разложения (1.1) взять m слагаемых с максимальными значениями $| c_i(x) |$. Элемент $G_m(x)$ называется гриди аппроксимантом x по системе Ψ, а этот метод приближения элемента x с помощью нелинейных операторов G_m - гриди алгоритмом. Подробнее о гриди алгоритмах в Банаховом пространстве можно почитать в книге [1]. Лучшее, что

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта N SCS 13-1A313.

можно ожидать от гриди алгоритма, это равенство

$$\|x - G_m(x)\| = \sigma_m(f) := \inf_{k_1,\dots,k_m \in N} \inf_{a_1,\dots,a_m \in R} \|f - \sum_{i=1}^{m} a_i \psi_{k_i}\|.$$

Определение 1.1. *(см. [2]) Базис Ψ называется гриди базисом в X если существует число $C \geq 1$ такое, что для любого $x \in X$, $m \in N$ и для некоторой последовательности $\{G_m\}$, определенной согласно (1.2), будут выполняться следующие соотношения*

$$\|x - G_m(x)\| \leq C \cdot \sigma_m(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

В той же самой работе авторы описали гриди базисы, использовав понятие демократической системы.

Определение 1.2. *Множество элементов Ψ (не обязательно базис) называется демократической системой в X, если существует число $C \geq 1$ такое, что имеет место соотношение*

$$\|\sum_{i \in A} \psi_i\| \leq C \cdot \|\sum_{i \in B} \psi_i\| \tag{1.3}$$

для любых конечных множеств натуральных чисел A и B с $\#A = \#B$.

Теорема 1.1. *(см. [2]) Базис Ψ является гриди базисом в X тогда и только тогда, когда он является безусловным и демократическим в X.*

Далее, некоторые свойства демократических базисов были изучены в [3] и [4]. В работе [5] были описаны все демократические подсистемы системы Хаара в $L^1(0,1)$. В настоящей работе мы обобщаем этот результат на многомерную систему Хаара.

Напомним ее определение. Пусть $\mathcal{D}_n$ множество всех двоичных интервалов длины 2^{-n}, а $\mathcal{D}_n^d = \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_n \times \dots \times \mathcal{D}_n$ множество всех d-мерных двоичных кубов с ребром длины 2^{-n}. Также положим $\mathcal{D}^d = \bigcup_n \mathcal{D}_n^d$. Для двоичного интервала $\delta = [a, b) \in \mathcal{D}_n$ обозначим

$$r_\delta^{(0)}(t) = \begin{cases} 2^n : & t \in [a, b) \\ 0 : & t \notin [a, b) \end{cases} \tag{1.4}$$

и

$$r_\delta^{(1)}(t) = \begin{cases} 2^n : & t \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ -2^n : & t \in [\frac{a+b}{2}, b) \\ 0 : & t \notin [a, b). \end{cases} \tag{1.5}$$

Также положим $\mathcal{H} = \{(\mathcal{I}, j) : \ \mathcal{I} \in \mathcal{D}^d, \ 1 \le j \le 2^d - 1\} \cup ([0,1)^d, 0)$. Каждому элементу из $\mathcal{H}$ соответствует одна функция из многомерной системы Хаара. Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2 \times \ldots \times \mathcal{I}_d \in \mathcal{D}^d$ и $1 \le j \le 2^d - 1$. Положим

$$h_{(\mathcal{I},j)}(t) = h_{(\mathcal{I},j)}(t_1, \ldots, t_d) = \prod_{i=1}^{d} r_{\mathcal{I}_i}^{(\epsilon_i)}(t_i),$$

где числа $\epsilon_i \in \{0,1\}$ являются цифрами двоичного разложения $j = \sum\limits_{i=1}^{d} \epsilon_i 2^{d-i}$.

Многомерной системой Хаара называется множество $\{h_{(\mathcal{I},j)} : \ (\mathcal{I}, j) \in \mathcal{H}\}$ совместно с функцией $h_{([0,1)^d,0)} \equiv 1$. Так-как конечное количество элементов не может повлиять на свойство демократичности системы, то без ограничения общности мы не будем рассматривать функцию $h_{([0,1)^d,0)}$ как элемент многомерной системы Хаара.

Коэффициенты разложения $c_{(\mathcal{I},j)}$ определяются согласно формулам

$$c_{(\mathcal{I},j)}(f) = \mu(\mathcal{I}) \int_{\mathcal{I}} h_{(\mathcal{I},j)} f \, d\mu, \tag{1.6}$$

где μ – мера Лебега в R^d.

Для двух двоичных кубов $\mathcal{I}, \mathcal{J} \in \mathcal{D}^d$ с $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ обозначим

$$\mathbb{C}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) = \{\Delta \in \mathcal{D}^d : \ \mathcal{J} \subseteq \Delta \subseteq \mathcal{I}\} \tag{1.7}$$

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Множество функций $\{h_{(\mathcal{I}_n, j_n)}\}$ является демократической системой в $L_1(0,1)^d$ тогда и только тогда, когда существует натуральное число $M \ge 1$ такое, что для любых $\mathcal{I}, \mathcal{J} \in \mathcal{D}^d$ с $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ с $\#\mathbb{C}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \ge M$ существуют Δ с $\mathcal{J} \subseteq \Delta \subseteq \mathcal{I}$ и k, с $1 \le k \le 2^d - 1$ такие, что $(\Delta, k) \notin \{(\mathcal{I}_n, j_n)\}$.*

2. Коллекции по двоичным кубам и оценка нормы функции по коэффициентам разложения

В этом параграфе мы докажем несколько лемм, с помощью которых доказывается основной результат.

Лемма 2.1. *Пусть имеются функция $f \in L_1(0,1)^d$ и двоичный куб $\mathcal{I} \in \mathcal{D}^d$. Тогда для любого натурального i, $1 \le i \le 2^d - 1$ имеет место следующее соотношение*

$$\|f\|_{\mathcal{I}} := \int_{\mathcal{I}} | \, f \, | \, d\mu \ge | \, c_{(\mathcal{I},i)}(f) \, | \, .$$

Доказательство. Согласно (1.6) имеем, что

$$| c_{(\mathcal{I},i)}(f) | \leq \mu(\mathcal{I}) \int_{\mathcal{I}} | h_{(\mathcal{I},j)} f | \, d\mu = \int_{\mathcal{I}} | f | \, d\mu = \|f\|_{\mathcal{I}}.$$

□

Для любых $f \in L_1(0,1)^d$ и $\mathcal{I} \in \mathcal{D}^d$ обозначим

$$\mathbb{P}_{\mathcal{I}}(f) = f - \sum_{\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}} \sum_{j=1}^{2^d-1} c_{(\mathcal{J},j)}(f) h_{(\mathcal{J},j)}.$$

Лемма 2.2. *Пусть функция $f \in L_1(0,1)^d$ и двоичные кубы $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ таковы, что*

1) $| c_{(\mathcal{I},i)}(f) | \leq 1$ *для любых* $(\mathcal{I}, i) \in \mathcal{H}$,
2) $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ *и* $\mu(\mathcal{J}) = 2^d \mu(\mathcal{I})$,
3) $c_{(\mathcal{J},i_0)}(f) = 0$ *для некоторого* $1 \leq i_0 \leq 2^d - 1$.

Тогда $\|\mathbb{P}_{\mathcal{I}}(f)\|_{\mathcal{I}} \leq 1 - 2^{-d}$.

Доказательство. Определим число k из условия $\mu(\mathcal{I}) = 2^{-kd}$. Для любого $0 \leq i < k$ существуют ровно $2^d - 1$ функций из системы Хаара, которые имеют меру 2^{-id} и которые не равняются 0 на множестве $\mathcal{I}$. Абсолютные значения этих функций на $\mathcal{I}$ равняются 2^{id}. Суммируя эти абсолютные значения и учитывая, что все коэффициенты разложения функции f по абсолютной величине не превосходят 1, получим, что на множестве $\mathcal{I}$ абсолютное значение функции $\mathbb{P}_{\mathcal{I}}(f)$ не превосходит

$$\sum_{i=0}^{k-2} (2^d - 1) \cdot 2^{id} + (2^d - 2) \cdot 2^{(k-1)d} = 2^{kd} - 2^{(k-1)d} - 1.$$

С учетом того, что $\mu(\mathcal{I}) = 2^{-kd}$ убеждаемся в справедливости леммы. □

Так как конечное количество элементов не могут повлиять на свойство демократичности системы, то мы будем полагать, что функции $h_{([0,1)^d,1)}, \ldots, h_{([0,1)^d,2^d-1)}$ не принадлежат множеству $\{h_{(\mathcal{I}_n, j_n)}\}$.

Для любого натурального s через Λ_s обозначим множество всех двоичных кубов Δ для которых

1) существует i, $1 \leq i \leq 2^d - 1$ такое, что $(\Delta, i) \notin \{(\mathcal{I}_n, j_n)\}$,
2) существует k, $1 \leq k \leq s$ такое, что $\mathcal{I}_k \subset \Delta$, $\mu(\mathcal{I}_k) = 2^{-d}\mu(\Delta)$ и $(\mathcal{I}_k, j_k) \in \{(\mathcal{I}_n, j_n)\}$.

Заметим, что при непустом множестве $\{h_{(\mathcal{J}_n,j_n)}\}$ множество Λ_s тоже будет непустым. Исходя из определения, легко проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 2.3. *Пусть система $\{h_{(\mathcal{J}_n,j_n)}\}$ удовлетворяет условию теоремы 1.2. Тогда для любого натурального s справедливо следующее соотношение*

$$\#\Lambda_s \geq \frac{s}{2^{Md}}.$$

Теперь докажем главную лемму, исходя из которой мы докажем теорему 1.2.

Лемма 2.4. *Пусть система $\{h_{(\mathcal{J}_n,j_n)}\}$ удовлетворяет условию теоремы 1.2. Тогда*

$$\|f_n\| \geq \frac{n}{2^{(M+1)d}}, \tag{2.1}$$

где $f_n = \sum_{i=1}^{n} h_{(\mathcal{J}_i,j_i)}$.

Доказательство. По индукции по $\#\Lambda_n$ докажем, что

$$\|f_n\| \geq \frac{\#\Lambda_n}{2^d}, \tag{2.2}$$

откуда, с учетом леммы 2.3 получим утверждение леммы 2.4.

При $\#\Lambda_n = 1$ согласно лемме 2.1 имеем, что

$$\|\sum_{i=1}^{n} h_{(\mathcal{J}_i,j_i)}\| \geq 1,$$

то есть условие (2.2) выполняется. Предположим, что условие (2.2) выполняется при $\#\Lambda_n = m$ и докажем для случая $\#\Lambda_n = m+1$.

Выберем из Λ_n самый маленький по размерам куб. Обозначим его через $\mathcal{J}$. Согласно определению множества Λ_n, существуют числа i и k для которых

$$1)\ c_{(\Delta,i)}(f_n) = 0, \quad 2)\ c_{(\mathcal{J}_k,j_k)}(f_n) = 1, \quad 3)\ \mathcal{J}_k \subset \Delta \text{ и } \mu(\mathcal{J}_k) = 2^{-d}\mu(\Delta).$$

Учитывая лемму 2.1 имеем, что $\|f_n\|_{\mathcal{J}_k} \geq 1$, а согласно лемме 2.2,

$$\|\mathbb{P}_{\mathcal{J}_k}(f_n)\|_{\mathcal{J}_k} \leq 1 - 2^{-d}.$$

С учетом этих неравенств заключаем, что

$$\|f_n\| = \|\mathbb{P}_{\mathcal{J}_k}(f_n)\| + \|f_n\|_{\mathcal{J}_k} - \|\mathbb{P}_{\mathcal{J}_k}(f_n)\|_{\mathcal{J}_k} \geq \|\mathbb{P}_{\mathcal{J}_k}(f_n)\| + 2^{-d}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что для оценки $\|\mathbb{P}_{\mathcal{J}_k}(f_n)\|$ можем применить предположение индукции для $\#\Lambda_n = m$. □

3. Доказательство теоремы 1.2

Достаточность. Пусть условия теоремы выполняются. Заметим, что если некоторое множество $\{h_{(\mathcal{I}_n,j_n)}\}$ удовлетворяет условиям теоремы, то и любая ее подсистема также будет удовлетворять этим условиям (при том же значении M). Поэтому, нам достаточно оценить только норму функции

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} h_{(\mathcal{I}_i,j_i)}.$$

Согласно лемме 2.4, имеем, что

$$\|f_n\| \geq \frac{n}{2^{(M+1)d}},$$

а с другой стороны, с учетом неравенства треугольника имеем, что $\|f_n\| \leq n$, откуда и следует демократичность системы $\{h_{(\mathcal{I}_n,j_n)}\}$.

Необходимость. Предположим противное. Для произвольно большого M положим $N = (2^d-1)M$ и выберем кубы $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_M$ такие, что

1) $\mathcal{J}_k \subset \mathcal{J}_{k-1}$ для $2 \leq k \leq M$
2) $\mu(\mathcal{J}_k) = 2^{-d}\mu(\mathcal{J}_{k-1})$ для $2 \leq k \leq M$,
3) $(\mathcal{J}_k, i) \in \{(\mathcal{I}_n, j_n)\}$ для всех $1 \leq k \leq M$ и $1 \leq i \leq 2^d-1$.

Легко проверить, что

$$\sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{2^d-1} h_{(\mathcal{J}_k,i)} = \begin{cases} \frac{1}{\mu(\mathcal{J}_M)} - \frac{1}{\mu(\mathcal{J}_1)} : & t \in \mathcal{J}_M \\ -\frac{1}{\mu(\mathcal{J}_1)} : & t \in \mathcal{J}_1 \setminus \mathcal{J}_M \\ 0 : & t \notin \mathcal{J}_1 \end{cases}$$

откуда заключаем, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{2^d-1} h_{(\mathcal{J}_k,i)}\right\| < 2. \tag{3.1}$$

С другой стороны, выбрав последовательность кубов $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_N$ таких, что

1) $(\mathcal{K}_i, 1) \in \{(\mathcal{I}_n, j_n)\}$ для всех $1 \leq i \leq N$,
2) $\mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j = \emptyset$ для всех $1 \leq i \neq j \leq N$,

будем иметь, что

$$\left\|\sum_{i=1}^{N} h_{(\mathcal{K}_i,1)}\right\| = N = (2^d-1)M.$$

Сравнивая с (3.1) заключаем, что система не является демократической системой в $L_1(0,1)^d$.

Abstract. In this paper we describe all subsystems of the multiple Haar system that are democratic systems in $L_1(0,1)^d$.

Список литературы

[1] V. N. Temlyakov, "Greedy approximation", Acta Numberica, **17**, 235 – 409 (2008).
[2] S. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. Approx., **5**, 365 – 379 (1999).
[3] P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithms for general biorthogonal systems", J. Approx Theory, **107**, 293 – 314 (2000).
[4] S. J. Dilworth, N. J. Kalton, D. Kutzarova and V. N. Temlyakov, "The thresholding greedy algorithm, greedy bases, and duality", Constr. Approx., **19**, 575 – 597 (2003).
[5] С. Л. Гогян, "О жадном алгоритме в $L^1(0,1)$ по регулярной системе Хаара", Известия НАН Армении, Математика, **46**, 3 – 16 (2011).

Поступила 7 апреля 2015