Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 6, 2015, стр. 16-25.

ЗАМЕЧАНИЯ О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Б. В. ВИННИЦКИЙ, Р. В. ХАЦЬ

Дрогобычский государственный педагогический университет им. Ивана Франко
E-mails: *vynnytskyi@ukr.net*; *khats@ukr.net*

Аннотация. Найдены достаточные условия базисности системы $(\sqrt{x\rho_k}J_\nu(x\rho_k):k\in\mathbb{N})$ в пространстве $L^2(0;1)$ и установлена взаимосвязь между аппроксимационными свойствами этой системы и свойствами системы $(\tau^{\nu+1/2}E_{1/2}(-\tau^2\rho_k^2;\mu):k\in\mathbb{N})$, где J_ν – функция Бесселя первого рода с индексом ν и $E_\rho(z;\mu)$ – функция типа Миттаг-Леффлера.

MSC2010 numbers: 33C10, 33E12, 30B60, 41A30, 30D15.

Ключевые слова: целая функция экспоненциального типа; функция Бесселя; функция типа Миттаг-Леффлера; базис; полная система; минимальная система; биортогональная система.

1. Введение

Пусть

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

– функция Бесселя первого рода с индексом ν. Функция J_ν при $\nu>-1$ имеет бесконечное множество $\{\rho_k:k\in\mathbb{Z}\}$ вещественных корней, среди которых положительные корни ρ_k, $k\in\mathbb{N}$, и отрицательные корни $\rho_{-k}=-\rho_k$, $k\in\mathbb{N}$ (см. [1, 2]). Хорошо известно следующее утверждение (см. [1]–[3]).

Теорема А. *Пусть $\nu>-1$ и $(\rho_k:k\in\mathbb{N})$ – последовательность положительных корней функции J_ν. Тогда система $(\sqrt{x\rho_k}J_\nu(x\rho_k):k\in\mathbb{N})$ образует базис пространства $L^2(0;1)$.*

Пусть $\chi\in\mathbb{R}$ и S_χ – класс целых функций G экспоненциального типа $\sigma\le 1$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $c_1(1+|z|)^\chi e^{|\mathrm{Im}z|}\le|G(z)|\le c_2(1+|z|)^\chi e^{|\mathrm{Im}z|}$, если $|\mathrm{Im}z|\ge s_0$ для некоторого $s_0>0$;

б) G имеет бесконечное множество корней $\{\rho_k:k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$, все корни простые и отличны от нуля;

в) $\inf\{|\rho_k - \rho_n| : k \neq n\} > 0$.

Класс S_χ изучался в [4]–[7]. Если $G \in S_\chi$, то имеем ([4]–[7]):

г) $c_3(1+|z|)^\chi e^{|\mathrm{Im} z|} \le |G(z)| \le c_4(1+|z|)^\chi e^{|\mathrm{Im} z|}$, если $z \notin \cup\{z : |z-\rho_k| < \delta\}$ для некоторого $\delta > 0$;

д) $|G'(\rho_k)| \ge c_5(1+|\rho_k|)^\chi$;

е) $\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(1+|\rho_k|)^{-\alpha} < +\infty$ при любом $\alpha > 1$.

Здесь и далее c_j суть положительные константы. Целью статьи является доказательство следующих утверждений.

Теорема 1.1. *Пусть $\nu \ge -1/2$, $\chi = -\nu - 1/2$ и $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ последовательность комплексных чисел таких, что $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$ при $k \neq n$. Если последовательность $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$, где $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, является последовательностью нулей некоторой четной функции $G \in S_\chi$, то система $(\sqrt{x\rho_k}J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ образует базис в пространстве $L^2(0;1)$.*

Отметим, что функция $G(z) = z^{-\nu}J_\nu(z)$ является четной и принадлежит классу S_χ, если $\chi = -\nu - 1/2$ (см. [1]–[3]). Поэтому теорема 1.1 является обобщением теоремы А. Пусть $E_\rho(z;\mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu+\frac{k}{\rho})}$ – целая функция типа Миттаг-Леффлера.

Теорема 1.2. *Пусть $\nu \in [-1/2;1)$, $\mu = \nu + 3/2$ и $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ – последовательность комплексных чисел таких, что $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$ при $k \neq n$. Система $(\sqrt{t\rho_k}J_\nu(t\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ образует базис в пространстве $L^2(0;1)$ тогда и только тогда, когда базисом этого пространства является система $(t^{\nu+1/2}E_{1/2}(-t^2 z_k;\mu) : k \in \mathbb{N})$, где $z_k = \rho_k^2$.*

Доказательства теорем 1.1 и 1.2 базируются на ряде результатов М. М. Джрбашяна и С. Г. Рафаеляна с работ [4]–[10], в которых исследовались и базисы из систем функций типа Миттаг-Леффлера. Базисы $(\tau^{\nu+1/2}E_{1/2}(-\tau^2 z_k;\mu) : k \in \mathbb{N})$ изучались также в работах Г. М. Губреева [11]–[13]. С его результатов и теоремы 1.2 можно получить некоторые дополнения к теореме 1.1, но это не является целью данной заметки. Вероятно, что теорема 1.2 справедлива и для некоторых $\nu \notin [-1/2;1)$.

2. Вспомогательные результаты

Пусть $\omega \in (-\infty; +\infty)$, $\gamma \in (-\infty; +\infty)$, $\beta \in (-\infty; +\infty)$, $W^{2,\omega}[\gamma; \beta]$ – пространство целых функций f экспоненциального типа $\sigma \le 1$, для которых

$$\|f\|_{W^{2,\omega}[\gamma;\beta]} := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x + i\gamma|^{\omega} |f(x + i\beta)|^2 \, dx \right)^{1/2} < +\infty,$$

и $W^{2,\omega} = W^{2,\omega}[0; 0]$. Мы используем, в частности, следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть $\omega > -1$, $2\chi + \omega = 0$ и последовательность $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$ является последовательностью нулей некоторой функции $G \in S_\chi$. Тогда каждая функция $f \in W^{2,\omega}$ представляется в виде*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{f(\rho_k) G(z)}{(z - \rho_k) G'(\rho_k)}, \tag{2.1}$$

и последний ряд безусловно сходится в $W^{2,\omega}$.

Теорема 2.1 содержится, фактически, в работе С. Г. Рафаеляна [5]. Но в [5] имеется условие $\omega < 1$. Поэтому мы приводим некоторые указания по доказательству теоремы 2.1.

Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$, $D_{a,b} = \{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$ и $H^2(D_{a,b})$ – пространство функций, голоморфных в полосе $D_{a,b}$, для которых

$$\sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^2 \, dx : a < y < b \right\} < +\infty.$$

Если по крайней мере одно из чисел a или b является конечным, то всякая функция $f \in H^2(D_{a,b})$ имеет почти всюду на $\partial D_{a,b}$ угловые предельные значения (см. [10]), $f \in L^2(\partial D_{a,b})$ и равенство $\|f\| = \left(\int_{\partial D_{a,b}} |f(z)|^2 \, |dz| \right)^{1/2}$ задает норму на $H^2(D_{a,b})$. Если $a \in \mathbb{R}$ и $b = +\infty$, то $H^2(D_{a,b})$ – пространство Харди $H^2(\mathbb{C}^{+,a})$ в полуплоскости $\mathbb{C}^{+,a} = \{z : \operatorname{Im} z > a\}$. Если $b \in \mathbb{R}$ и $a = -\infty$, то $H^2(D_{a,b})$ – пространство Харди $H^2(\mathbb{C}^{-,b})$ в полуплоскости $\mathbb{C}^{-,b} = \{z : \operatorname{Im} z < b\}$.

Лемма 2.1. *([5, 8, 9]) Пусть $\omega > -1$. Если $f \in W^{2,\omega}[\gamma; \beta]$ для некоторых $\gamma = \widetilde{\gamma} \in (-\infty; +\infty)$ и $\beta = \widetilde{\beta} \in (-\infty; +\infty)$, то $f \in W^{2,\omega}[\gamma; \beta]$ для любых $\gamma \in (-\infty; +\infty)$ и $\beta \in (-\infty; +\infty)$, причем нормы*

$$\|f\|^2_{W^{2,\omega}[0;\beta]} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\omega} |f(x + i\beta)|^2 \, dx, \quad \|f\|^2_{W^{2,\omega}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\omega} |f(x)|^2 \, dx,$$

$$\|f\|^2_{W^{2,\omega}[\gamma;0]} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x+i\gamma|^{\omega}|f(x)|^2\,dx, \quad \|f\|^2_{W^{2,\omega}[\gamma;\beta]} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x+i\gamma|^{\omega}|f(x+i\beta)|^2\,dx,$$

эквивалентны на $W^{2,\omega}$.

Лемма 2.2. ([5]) *Пусть* $\omega > -1$ *и* $f \in W^{2,\omega}$. *Тогда для любого* $z = x+iy \in \mathbb{C}$ *имеет место неравенство*

$$|f(z)| \le c_6\|f\|_{W^{2,\omega}} e^{|y|}(1+|z|)^{-\omega/2}(1+|y|)^{-1/2}.$$

Лемма 2.3. ([5, 8, 9]) *Пусть* $\omega > -1$ *и* $\gamma \in \mathbb{R}$. *Если последовательность* $(f_k : k \in \mathbb{N})$ *функций* $f_k \in W^{2,\omega}$ *является фундаментальной в* $W^{2,\omega}$, *то она сходится по норме и равномерно на любом компакте в* $\mathbb{C}$ *к некоторой функции* $f \in W^{2,\omega}$.

Лемма 2.4. ([5]) *Пусть* $\omega > -1$, $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ — *последовательность различных комплексных чисел таких, что* $a < a_1 \le \mathrm{Im}\rho_k \le b_1 < b$ *и* $\inf\{|\rho_k - \rho_n| : k \ne n\} > 0$. *Тогда* $\sum_{k=1}^{\infty} |f(\rho_k)|^2(1+|\rho_k|)^{\omega} \le c_7\|f\|_{W^{2,\omega}}$ *для любой функции* $f \in W^{2,\omega}$.

Лемма 2.5. ([5]) *Пусть* $\omega > -1$, $\omega + 2\chi \ge 0$ *и* $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$ – *последовательность нулей некоторой функции* $G \in S_\chi$. *Тогда если* $f \in W^{2,\omega}$ *и* $f(\rho_k) = 0$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, *то* $f \equiv 0$.

Теперь мы в состоянии очертить доказательство теоремы 2.1.

Пусть $\gamma = s_0 + 1$. Для получения утверждения теоремы 2.1 достаточно убедиться, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left\| \frac{f(\rho_k)G(z)}{(z-\rho_k)G'(\rho_k)} \right\|_{W^{2,\omega}[\gamma;\gamma]} < +\infty.$$

Сначала заметим, что $|z^{\omega/2}G(z)| \le c_8$, если $z \in \partial\mathbb{C}^{+,\gamma}$. Поэтому

$$\left\|\frac{G(z)}{z-\rho_k}\right\|_{W^{2,\omega}[\gamma;\gamma]} = \left(\int\limits_{\partial\mathbb{C}^{+,\gamma}} |z|^{\omega}\left|\frac{G(z)}{z-\rho_k}\right|^2 |dz|\right)^{1/2}$$

$$\le c_8\left(\int\limits_{\partial\mathbb{C}^{+,\gamma}} \left|\frac{1}{z-\rho_k}\right|^2 |dz|\right)^{1/2} = c_8\left\|\frac{1}{z-\rho_k}\right\|_{H^2(\mathbb{C}^{+,\gamma})}.$$

Поскольку $\gamma - \mathrm{Im}\rho_k \ge 1$, то функция $(z-\rho_k)^{-1}$ принадлежит пространству Харди $H^2(\mathbb{C}^{+,\gamma})$, причем

$$\left\|\frac{1}{z-\rho_k}\right\|^2 = \sup\left\{\left|\int\limits_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \frac{\psi(z)}{z-\rho_k}\,dz\right|^2 : \|\psi\| \le 1\right\},$$

где верхняя грань берется по функциям $\psi \in H^2(\mathbb{C}^{-,\gamma})$. Но с другой стороны, имеем (см. [10]):

$$\int\limits_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \frac{\psi(z)}{z-\rho_k}\,dz = -2\pi i\psi(\rho_k) \quad \text{и} \quad \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\psi(\rho_k)|^2\right)^{1/2} \le c_9\|\psi\|.$$

Следовательно, получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left\|\frac{f(\rho_k)G(z)}{(z-\rho_k)G'(\rho_k)}\right\|_{W^{2,\omega}} \le c_{10} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |f(\rho_k)|(1+|\rho_k|)^{-\varkappa} \left\|\frac{1}{z-\rho_k}\right\|_{H^2(\mathbb{C}^{+,\gamma})}$$

$$\le c_{10}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |f(\rho_k)|^2(1+|\rho_k|)^{\omega}\right)^{1/2} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left\|\frac{1}{z-\rho_k}\right\|^2_{H^2(\mathbb{C}^{+,\gamma})}\right)^{1/2}$$

$$\le c_{11}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |f(\rho_k)|^2(1+|\rho_k|)^{\omega}\right)^{1/2}.$$

Поэтому по лемме 2.4 ряд (2.1) безусловно сходится в $W^{2,\omega}$, а по лемме 2.5 сумма этого ряда равна $f(z)$. Таким образом, теорема 2.1 доказана.

3. Доказательство теоремы 1.1

Мы воспользуемся следующими известными утверждениями.

Лемма 3.1. ([14, 15]) *Пусть $\nu \ge -1/2$. Функция Q представляется в виде*

$$Q(z) = \int\limits_0^1 \sqrt{zt}J_\nu(zt)q(t)\,dt$$

с некоторой функцией $q \in L^2(0;1)$ тогда и только тогда, когда $Q \in L^2(0;+\infty)$ и $Q(z) = z^{\nu+1/2}P(z)$, где P – четная целая функция экспоненциального типа $\sigma \le 1$.

Лемма 3.2. ([10, с. 67]) *Пусть $\nu > -1$. Тогда любая функция $Q \in L^2(0;+\infty)$ представляется в виде*

$$Q(z) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{zt}J_\nu(zt)q(t)\,dt$$

с некоторой функцией $q \in L^2(0;+\infty)$. При этом, $\|Q\| = \|q\|$ и

$$q(t) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{zt}J_\nu(zt)Q(z)\,dz.$$

Следствие 3.1. *Пусть* $\nu \geq -1/2$ *и* $\omega = 2\nu + 1$. *Класс парных целых функций* $f \in W^{2,\omega}$ *совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$f(z) = z^{-\nu-1/2} \int\limits_0^1 \sqrt{zt} J_\nu(zt) q(t)\, dt, \quad q \in L^2(0;1).$$

При этом, $\|f\|_{W^{2,\omega}} = 2\|q\|$ *и справедлива двойственная формула*

$$q(t) = \int\limits_0^{+\infty} z^{\omega/2} \sqrt{zt} J_\nu(zt) f(z)\, dz.$$

Из следствия 3.1 непосредственно вытекают следующие предложения.

Предложение 3.1. *([16]) Пусть* $\nu \geq -1/2$, $\omega = 2\nu + 1$ *и* $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ *последовательность отличных от нуля комплексных чисел таких, что* $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$ *при* $k \neq n$. *Для того, чтобы система* $(\sqrt{x\rho_k} J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ *была полной в* $L^2(0;1)$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ *не была подпоследовательностью нулей ни одной ненулевой четной функции* $G \in W^{2,\omega}$.

Предложение 3.2. *([16]) Пусть* $\nu \geq -1/2$, $\omega = 2\nu + 1$ *и* $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ *последовательность отличных от нуля комплексных чисел таких, что* $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$ *при* $k \neq n$. *Для того, чтобы система* $(\sqrt{x\rho_k} J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ *была полной и минимальной в* $L^2(0;1)$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, *где* $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, *была последовательностью нулей некоторой четной целой функции* $G \notin W^{2,\omega}$ *такой, что* $(z^2 - \rho_1^2)^{-1} G(z) \in W^{2,\omega}$. *При этом,*

$$\int\limits_0^1 \sqrt{t\rho_n} J_\nu(t\rho_n) \overline{\gamma_k(t)}\, dt = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases} \tag{3.1}$$

где

$$\overline{\gamma_k(t)} = \frac{2}{\rho_k^{\nu-1/2} G'(\rho_k)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{zt} J_\nu(zt) z^{\nu+1/2} G(z)}{z^2 - \rho_k^2}\, dz. \tag{3.2}$$

Предложение 3.3. *Пусть* $\nu \geq -1/2$, $\omega = 2\nu + 1$, $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ *последовательность отличных от нуля комплексных чисел таких, что* $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$ *при* $k \neq n$, *и последовательность* $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, *где* $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, *является последовательностью нулей некоторой четной целой функции* G *такой, что* $(z^2 - \rho_1^2)^{-1} G(z) \in W^{2,\omega}$. *Для того, чтобы система* $(\sqrt{x\rho_k} J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$

была базисом пространства $L^2(0;1)$, *необходимо и достаточно, чтобы каждая четная целая функция* $P \in W^{2,\omega}$ *разлагалась в ряд*

$$P(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2\rho_k P(\rho_k) G(z)}{(z^2-\rho_k^2)G'(\rho_k)},$$

сходящийся в $W^{2,\omega}$.

Доказательство предложения 3.3 проводится стандартными методами (см. [4]–[8], [11]–[13]) и частично содержится ниже. Переходим непосредственно к доказательству теоремы 1.1. Пусть $\omega = 2\nu+1$. Тогда $\omega \geq 0$. Функция $(z^2-\rho_k^2)^{-1}G(z)$ является четной целой функцией экспоненциального типа $\sigma \leq 1$ и функция $z^{\nu+1/2}(z^2-\rho_k^2)^{-1}G(z)$ принадлежит $L^2(0;+\infty)$. Согласно леммам 3.1 и 3.2, функции $\gamma_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, определенные равенством (3.2), принадлежат $L^2(0;1)$. Пусть $q \in L^2(0;1)$ и $Q(z) = \int_0^1 \sqrt{zt} J_\nu(zt) q(t)\,dt$. Согласно лемме 3.1 $Q(z) = z^{\nu+1/2}P(z)$, где P – четная целая функция экспоненциального типа $\sigma \leq 1$. Кроме того, $\frac{P(\rho_{-k})}{G'(\rho_{-k})} = -\frac{P(\rho_k)}{G'(\rho_k)}$ для $k\in\mathbb{N}$. Следовательно, в силу теоремы 2.1, имеем

$$P(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{P(\rho_k)G(z)}{(z-\rho_k)G'(\rho_k)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2\rho_k P(\rho_k)G(z)}{(z^2-\rho_k^2)G'(\rho_k)},$$

где последний ряд сходится в $W^{2,\omega}$. Таким образом,

$$Q(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2\rho_k P(\rho_k) z^{\nu+1/2} G(z)}{(z^2-\rho_k^2)G'(\rho_k)},$$

и последний ряд сходится в $L^2(0;+\infty)$. Следовательно, получаем

$$q(t) = \int_0^{+\infty} \sqrt{zt} J_\nu(zt) Q(z)\,dz = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2\rho_k P(\rho_k)}{G'(\rho_k)} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{zt}J_\nu(zt) z^{\nu+1/2}G(z)}{z^2-\rho_k^2}\,dz$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \rho_k^{\nu+1/2} P(\rho_k)\overline{\gamma_k(t)}.$$

Поэтому любая функция $q \in L^2(0;1)$ разлагается в ряд по системе $(\gamma_k : k \in \mathbb{N})$. Кроме того, выполняется (3.1). Следовательно система $(\gamma_k : k\in\mathbb{N})$ имеет биортогональную систему. Поэтому $(\gamma_k : k\in\mathbb{N})$ – базис пространства $L^2(0;1)$. Значит базисом является и биортогональная система. Поэтому $(\sqrt{x\rho_k}J_\nu(x\rho_k) : k\in\mathbb{N})$ – базис. Таким образом, теорема 1.1 доказана.

4. Доказательство теоремы 1.2

Пусть $\nu \in \mathbb{R}$ и $A^{\rho}_{\sigma}(\nu)$ – класс целых функций f порядка $\le \rho$ и типа $\le \sigma$, для которых

$$\|f\|^2 := \int\limits_0^{+\infty} |f(r)|^2 r^{\nu}\, dr < +\infty.$$

Лемма 4.1. *([10, с. 351]) Пусть $\nu \in (-1;1)$ и $\mu = \nu + 3/2$. Класс $A_1^{1/2}(\nu)$ совпадает с множеством целых функций f, допускающих представление вида*

$$f(z) = \int\limits_0^1 E_{1/2}(-\tau^2 z;\mu)\tau^{\mu-1}\varphi(\tau)\, d\tau, \quad \varphi \in L^2(0;1).$$

При этом, нормы $\|f\|_{A_1^{1/2}(\nu)}$ и $\|\varphi\|$ являются эквивалентными и справедлива двойственная формула

$$\frac{2}{\pi}\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\eta\tau - \frac{\pi}{2}\mu\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)}{\eta} f(\eta^2)\eta^{\mu-1}\, d\eta = \varphi_0(\tau) := \begin{cases} \varphi(\tau), & \tau \in (0;1), \\ 0, & \tau \in (1;+\infty). \end{cases}$$

Из леммы 4.1 непосредственно вытекают следующие предложения, которые являются аналогами соответственных результатов из [4] [8], [11], [12], [17].

Предложение 4.1. *Пусть $\nu \in (-1;1)$, $\mu = \nu + 3/2$ и $(z_k : k \in \mathbb{N})$ – произвольная последовательность различных комплексных чисел. Для того, чтобы система $(\tau^{\mu-1}E_{1/2}(-\tau^2 z_k;\mu) : k \in \mathbb{N})$ была полной в $L^2(0;1)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(z_k : k \in \mathbb{N})$ не была подпоследовательностью нулей ни одной ненулевой функции $\Xi \in A_1^{1/2}(\nu)$.*

Предложение 4.2. *Пусть $\nu \in (-1;1)$, $\mu = \nu + 3/2$ и $(z_k : k \in \mathbb{N})$ – произвольная последовательность различных комплексных чисел. Для того, чтобы система $(\tau^{\mu-1}E_{1/2}(-\tau^2 z_k;\mu) : k \in \mathbb{N})$ была полной и минимальной в $L^2(0;1)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(z_k : k \in \mathbb{N})$ была последовательностью нулей некоторой целой функции $\Xi \notin A_1^{1/2}(\nu)$ такой, что $(\zeta - z_1)^{-1}\Xi(\zeta) \in A_1^{1/2}(\nu)$.*

Предложение 4.3. *Пусть $\nu \in (-1;1)$, $\mu = \nu + 3/2$ и последовательность $(z_k : k \in \mathbb{N})$ различных комплексных чисел является последовательностью нулей некоторой целой функции Ξ такой, что $(\zeta - z_1)^{-1}\Xi(\zeta) \in A_1^{1/2}(\nu)$. Для того, чтобы система $(\tau^{\mu-1}E_{1/2}(-\tau^2 z_k;\mu) : k \in \mathbb{N})$ была базисом пространства*

$L^2(0;1)$, *необходимо и достаточно, чтобы каждая функция* $\Omega \in A_1^{1/2}(\nu)$ *разлагалась в ряд*

$$\Omega(\zeta) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\Omega(z_k)\Xi(\zeta)}{(\zeta - z_k)\Xi'(z_k)}, \tag{4.1}$$

сходящийся в $A_1^{1/2}(\nu)$.

Замечание 4.1. *Пусть* $\nu > -1$, $\omega = 2\nu + 1$ *и* $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ *последовательность отличных от нуля комплексных чисел таких, что* $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$ *при* $k \neq n$. *Тогда последовательность* $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, *где* $\rho_{-k} = -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, *является последовательностью нулей некоторой четной функции* G *такой, что* $(z^2 - \rho_1^2)^{-1}G(z) \in W^{2,\omega}$ *если и только если, последовательность* $(z_k : k \in \mathbb{N})$, $z_k = \rho_k^2$, *является последовательностью нулей некоторой функции* Ξ *такой, что* $(\zeta - z_1)^{-1}\Xi(\zeta) \in A_1^{1/2}(\nu)$. *Кроме того, функция* $P(z) = \Omega(z^2)$ *принадлежит* $W^{2,\omega}$ *тогда и только тогда, когда* $\Omega \in A_1^{1/2}(\nu)$. *Поэтому предложение 3.3 эквивалентно следующему.*

Предложение 4.4. *Пусть* $\nu \geq -1/2$, $\omega = 2\nu + 1$, $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ *последовательность отличных от нуля комплексных чисел таких, что* $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$ *при* $k \neq n$, *и последовательность* $(z_k : k \in \mathbb{N})$, *где* $z_k := \rho_k^2$, *является последовательностью нулей некоторой функции* Ξ *такой, что* $(\zeta - z_1)^{-1}\Xi(\zeta) \in A_1^{1/2}(\nu)$. *Для того чтобы система* $(\sqrt{x\rho_k}J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ *была базисом пространства* $L^2(0;1)$, *необходимо и достаточно, чтобы любая функция* $\Omega \in A_1^{1/2}(\nu)$ *разлагалась в ряд (4.1), сходящийся в* $A_1^{1/2}(\nu)$.

Теорема 1.2 является непосредственным следствием предложений 4.3 и 4.4.

Abstract. We find sufficient conditions for the basisness of the system $(\sqrt{x\rho_k}J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ in the space $L^2(0;1)$ and established the relationship between an approximation properties of this system and the properties of the system $(\tau^{\nu+1/2}E_{1/2}(-\tau^2\rho_k^2;\mu) : k \in \mathbb{N})$, where J_ν is the Bessel function of the first kind of index ν and $E_\rho(z;\mu)$ is the Mittag-Leffler-type function.

Список литературы

[1] Г. Н. Ватсон, Теория Бесселевых Функций, ИЛ, Москва (1949).
[2] В. С. Владимиров, Уравнения Математической Физики, Наука, Москва (1971).
[3] H. Hochstadt, "The mean convergence of Fourier-Bessel series", SIAM Rev., **9**, 211 – 218 (1967).
[4] М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян, "О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов L^2", ДАН Арм. ССР., **73** (1), 29 – 36 (1981).

[5] С. Г. Рафаелян, "Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **18** (3), 167 – 186 (1983).

[6] С. Г. Рафаелян, "Базисность некоторых биортогональных систем в $L^2(-\sigma;\sigma)$ с весом", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **19** (3), 207 – 218 (1984).

[7] М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян, "Интерполяционные разложения в классах целых функций и порождаемые ими базисы Рисса", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **22** (1), 23 – 63 (1987).

[8] M. M. Djrbashian, S. G. Raphaelian, "Interpolation theorems and expansions with respect to Fourier type systems", J. Approx. Theory, **50** (4), 297 – 325 (1987).

[9] М. М. Джрбашян, "Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **19** (2), 81 – 181 (1984).

[10] М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, Наука, Москва (1966).

[11] Г. М. Губреев, "Базисность семейств функции типа Миттаг-Леффлера, преобразования Джрбашяна и весовые оценки интегралов типа Коши", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **23** (3), 237 – 269 (1988).

[12] Г. М. Губреев, "Интегральное преобразование типа Джрбашяна и интерполяция целыми функциями конечного порядка", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **25** (1), 83 – 90 (1990).

[13] Г. М. Губреев, "Спектральный анализ биортогональных разложений, порождаемых весами Макенхаупта", Зап. научн. сем. ЛОМИ, **190**, 34 – 80 (1991).

[14] J. L. Griffith, "Hankel transforms of functions zero outside a finite interval", J. Proc. Roy. Soc. New South Wales, **89**, 109 – 115 (1955).

[15] Н. И. Ахиезер, "К теории спаренных интегральных уравнений", Ученые записки Харьковского государственного университета, **25**, 5 – 31 (1957).

[16] B. V. Vynnyts'kyi, R. V. Khats', "Completeness and minimality of systems of Bessel functions", Уфимский матем. журн., **5** (2), 132 – 141 (2013).

[17] А. Е. Аветисян, "О полноте и минимальности системы функций $\{E_\rho(\lambda_k z;\mu)\}_1^\infty$", Изв. АН Арм. ССР, Математика, **23** (1), 81 – 86 (1988).

Поступила 2 июля 2014