*Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 5, 2015, стр. 61-73.* [1]

# О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ $W_1^2(\mathbb{R}^+)$

Х. А. ХАЧАТРЯН, М. Ф. БРОЯН, Э. О. АЗИЗЯН

*Институт Математики НАН РА*
*Армянский национальный аграрный университет*
E-mails: *Khach82@rambler.ru*, *Broyan@rambler.ru*, *Hermineazizyan@mail.ru*

Аннотация. В настоящей заметке исследуется начально-краевая задача на положительной полупрямой для нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с некомпактным оператором Гаммерштейна. Указанная задача имеет непосредственное применение в нелокальных задачах физической кинетики. Доказывается существование неотрицательного (тождественно ненулевого) решения этого уравнения в пространстве $W_1^2(\mathbb{R}^+)$. В конце работы приведены соответствующие частные примеры указанных уравнений, имеющих самостоятельный теоретический и прикладной интерес.

**MSC2010 numbers:** 45GXX, 45G05.

**Ключевые слова:** нелинейное уравнение; нелинейный оператор; пространство Соболева; сходимость; монотонность.

## 1. Введение

Нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями вида

$$-y'' + \mu y = \int_0^\infty K(x-t)H(t, y(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{1.1}$$

относительно искомой функции $y(x)$, описывается ряд задач современного естествознания. В частности, такие уравнения возникают в задачах теории нелокального взаимодействия, в кинетической теории газов (задача о скин-эффекте), в квантовой механике и т.д. (см. [1-5]).

В частном линейном случае, когда $H(t, u) \equiv u$, $\quad t \in \mathbb{R}^+$ уравнение (1.1) при различных ограничениях на $\mu$ и $K$ исследовалось в работах [3-5].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13YR-1A0003.

В случае, когда $H(t,u) \equiv G(u)$, где функция $G(u)$ на некотором отрезке $[0,\eta]$ удовлетворяет следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
&G(0)=0, \quad G(\eta)=\eta,\\
&G(u)\geq u, \quad u\in[0,\eta], \quad G\in C[0,\eta], \quad G\uparrow \text{ на } [0,\eta],
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

$\mu-$ числовой параметр, ядро $K-$ непрерывная функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

$$
0\leq K\in L_1(\mathbb{R})\cap L_\infty(\mathbb{R}), \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)d\tau=\mu>0,
\tag{1.3}
$$

$$
K(-\tau)>K(\tau), \quad \tau\in\mathbb{R}^+,
\tag{1.4}
$$

$$
\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^j K(\tau)d\tau<+\infty, \quad j=1,2
\tag{1.5}
$$

уравнение (1.1) было изучено в недавней работе одного из авторов в пространстве Соболева $W^2_\infty(\mathbb{R}^+)$ (см. [6]). В указанной работе доказано, что уравнение (1.1) с краевыми условиями

$$
y(0)=0, \quad y\in W^2_\infty(\mathbb{R}^+)
$$

имеет неотрицательное (тождественно ненулевое) монотонно возрастающее решение $y(x)$ с пределом $\eta$ на бесконечности.

В настоящей работе исследуется следующая краевая задача для уравнения (1.1):

$$
\begin{cases}
-y''+\mu y=\int\limits_0^\infty K(x-t)H(t,y(t))dt, \quad x\in\mathbb{R}^+,\\
y(0)=0, \quad y\in W^2_1(\mathbb{R}^+),
\end{cases}
\tag{1.6}
$$

и доказывается, что при некоторых ограничениях на $H(t,u)$ уравнение (1.1) с начальным условием $y(0)=0$ имеет неотрицательное (тождественно ненулевое) решение из пространства $W^2_1(\mathbb{R}^+)$.

В конце работы для иллюстрации полученного результата будут приведены примеры функции $H(t,u)$, для которых выполняются условия сформулированной теоремы.

## 2. Обозначения и вспомогательные факты

**2.1. О преобразованиях Лапласа ядерных функций.** Пусть ядро $K$ удовлетворяет условиям (1.3)-(1.5). Введем следующую функцию $R$, определенную на множестве $\mathbb{R}$ :

$$R(x)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}K(x-z+\tau)d\tau dz,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где $\lambda\equiv\sqrt{\mu}$. Заметим, что

$$R\in L_1(\mathbb{R})\cap L_\infty(\mathbb{R}),\quad R(x)\geq 0,\quad x\in\mathbb{R},\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)d\tau=\lambda^2=\mu, \tag{2.2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^j R(\tau)d\tau<+\infty,\quad j=1,2,\quad \nu(R)\equiv\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tau R(\tau)d\tau=\frac{\nu(K)}{\lambda^2}. \tag{2.3}$$

Действительно, последние факты легко следуют из (2.1),(1.3)-(1.5) с учетом теоремы Фубини (см.[7]).

Обозначим через $\Phi(p)$ преобразование Лапласа функции $R(t)$ на $(-\infty,0)$ :

$$\Phi(p)=\int\limits_{-\infty}^0 R(t)e^{pt}dt,\quad p\in\mathbb{R}^+. \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что

$$\Phi(p)\quad\downarrow\ \text{на}\ [0,+\infty),\quad \Phi\in C[0,+\infty)\quad\text{и}\quad \Phi(+\infty)=0.$$

Ниже докажем, что

$$\Phi(0)\geq\frac{\alpha}{2\lambda^2}>0,\ \text{ где }\ \alpha=\|\mathrm{K}\|_-=\int\limits_{-\infty}^0 K(t)dt. \tag{2.5}$$

Действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^0 R(x)dx=\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}K(x-z+\tau)dzd\tau dx=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}\int\limits_{-\infty}^0 K(x-z+\tau)dxd\tau dz=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}\int\limits_{-\infty}^{\tau-z}K(t)dtd\tau dz\geq\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}\int\limits_z^\infty e^{-\lambda\tau}\int\limits_{-\infty}^{\tau-z}K(t)dtd\tau dz\geq$$

$$\geq\int\limits_{-\infty}^0 K(t)dt\cdot\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}\int\limits_z^\infty e^{-\lambda\tau}d\tau dz=\frac{\alpha}{2\lambda^2}>0.$$

Следовательно, по теореме Коши можем утверждать, что для всякого $\varepsilon \in (0,1)$ существует число $p_\varepsilon$ (причем единственное) такое, что

$$\Phi(p_\varepsilon) = \frac{\alpha\varepsilon}{2\lambda^2}. \tag{2.6}$$

Зафиксируем число $\varepsilon$ ( следовательно, и $p_\varepsilon$) для дальнейшего изложения.

2.2. **О некоторых неоднородных интегральных уравнениях Винера-Хопфа.** Пусть $\beta(t)$– определенная на $\mathbb{R}^+$ функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\beta \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \;\; m_1(\beta) \equiv \int_0^\infty x\beta(x)dx < +\infty, \tag{2.7}$$

$$\beta(x) \geq \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}\rho_\varepsilon(x), \;\; x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.8}$$

где

$$\rho_\varepsilon(x) \equiv \int_0^x e^{-\lambda(x-\tau)}e^{-p_\varepsilon\tau}d\tau \equiv \frac{e^{-p_\varepsilon x} - e^{-\lambda x}}{\lambda - p_\varepsilon}. \tag{2.9}$$

Рассмотрим следующее неоднородное уравнение Винера-Хопфа:

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty R(x-t)f(t)dt, \;\; x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.10}$$

относительно вещественной измеримой функции $f(x)$ со свободным членом

$$g(x) = \int_0^\infty T(x-t)\beta(t)dt, \;\; x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.11}$$

и ядром

$$T(\tau) = \int_0^\infty e^{-\lambda z}K(\tau+z)dz = \int_\tau^\infty K(u)e^{-\lambda(u-\tau)}du, \;\; \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

В силу свойств (1.3)-(1.5) ядра $K$ и (2.7)-(2.8) функции $\beta(x)$ можно убедиться, что

$$g \in L_1(\mathbb{R}^+), \;\; m_1(g) < +\infty, \;\; \nu(T) < 0. \tag{2.13}$$

Так как ядро $R$ уравнения (2.10) обладает свойствами (2.2)-(2.3), то из результатов работы [8] (стр.193, лемма 3.6) следует, что уравнение (2.10) имеет неотрицательное суммируемое и существенно ограниченное решение $f(x)$, причем $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Ниже докажем, что это решение снизу оценивается функцией $e^{-p_\varepsilon x}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Действительно, в силу (2.6),(2.8),(2.12) из (2.10) будем иметь:

$$f(x) \geq g(x) = \int_0^\infty T(x-t)\beta(t)dt \geq \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}\int_0^\infty T(x-t)\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}e^{-p_\varepsilon\tau}d\tau dt =$$

$$= \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}\int_0^\infty e^{-p_\varepsilon\tau}\int_\tau^\infty T(x-t)e^{-\lambda(t-\tau)}dtd\tau = \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}\int_0^\infty e^{-p_\varepsilon\tau}\int_0^\infty T(x-\tau-z)e^{-\lambda z}dzd\tau =$$

$$= \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}\int_0^\infty e^{-p_\varepsilon\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda z}\int_0^\infty K(x-\tau-z+v)e^{-\lambda v}dvdzd\tau =$$

$$= \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}\int_0^\infty e^{-p_\varepsilon\tau}R(x-\tau)d\tau = \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}\int_{-\infty}^x R(z)e^{-p_\varepsilon(x-z)}dz \geq$$

$$\geq \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}e^{-p_\varepsilon x}\int_{-\infty}^0 R(z)e^{p_\varepsilon z}dz = \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}e^{-p_\varepsilon x}\Phi(p_\varepsilon) = e^{-p_\varepsilon x}.$$

Итак,

$$f(x) \geq g(x) \geq e^{-p_\varepsilon x}. \tag{2.14}$$

Двусторонняя оценка (2.14) существенным образом будет использована в дальнейших рассуждениях.

**2.3. О факторизации некоторых интегральных операторов Винера-Хопфа.** Пусть $E-$ одно из следующих банаховых пространств: $L_p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $C_l(\mathbb{R}^+)$, $C_0(\mathbb{R}^+)$. Рассмотрим следующий интегральный оператор Винера-Хопфа:

$$(\mathcal{R}f)(x) = \int_0^\infty R(x-t)f(t)dt, \quad f \in E, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.15}$$

с ядром $R(x)-$ обладающим свойствами (2.2)-(2.3). Тогда, как известно (см. [8]), $\mathcal{R}$ действует в каждом из пространств $E$, причем оператор $\mathcal{I} - \mathcal{R}$ (где $\mathcal{I}-$ единичный оператор) допускает следующую факторизацию:

$$\mathcal{I} - \mathcal{R} = (\mathcal{I} - \mathcal{V}_-)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_+), \tag{2.16}$$

где $\mathcal{V}_\pm-$ соответственно верхние и нижние операторы Вольтерра следующей структуры:

$$(\mathcal{V}_+f)(x) = \int_0^x v_+(x-t)f(t)dt, \quad (\mathcal{V}_-f)(x) = \int_x^\infty v_-(t-x)f(t)dt.$$

Здесь ядра $v_\pm-$ неотрицательные суммируемые существенно ограниченные функции на $\mathbb{R}^+$ и определяются из следующей системы нелинейных уравнений факторизации:

(2.17)
$$v_\pm(x) = R(\pm x) + \int_0^\infty v_\pm(t) v_\mp(x+t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

причем

$$\gamma_- = \int_0^\infty v_-(\tau)d\tau = 1, \quad \gamma_+ = \int_0^\infty v_+(\tau)d\tau \in (0,1).$$

**2.4. Об однородных уравнениях Винера-Хопфа.** Рассмотрим следующую начальную задачу для однородного уравнения Винера-Хопфа:

(2.18)
$$S(x) = \int_0^\infty R(x-t)S(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

(2.19)
$$S(0) = 1,$$

где $R-$ задается согласно формуле (2.1).

Так как ядерная функция $R$ обладает свойствами (2.2)-(2.3), то согласно теореме Линдли (см. [9]), начальная задача (2.18)-(2.19) имеет положительное монотонно возрастающее и существенно ограниченное на $\mathbb{R}^+$ решение, причем

(2.20)
$$S(x) \to \frac{1}{1-\gamma_+}, \quad \text{когда } x \to +\infty.$$

Из леммы 2 работы [10] следует также, что

(2.21)
$$\frac{1}{1-\gamma_+} - S \in L_1(\mathbb{R}^+).$$

## 3. Основной результат

**3.1. Условия на функцию $H(t,u)$.** Обозначим через $\eta_0$ следующее число:

(3.1)
$$\eta_0 \equiv \frac{\sup\limits_{x\geq 0} f(x)}{\lambda(1-\gamma_+)}.$$

Пусть $h-$ определенная на $\mathbb{R}$ вещественная и измеримая функция, удовлетворяющая следующим условиям: существует число $\eta \geq \eta_0$ такое, что

(3.2)
$$\begin{aligned} &1) \ h \in C[0,\eta], \quad h \ \uparrow \ \text{на } [0,\eta], \\ &2) \ h(0) = 0, \quad h(\eta) = \eta, \quad h(u) \leq u, \quad u \in [0,\eta]. \end{aligned}$$

Ниже убедимся, что $\eta > \rho_\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, где $\rho_\varepsilon$ задается посредством (2.9).

Действительно, с учетом (2.10), (2.14) из (3.1) имеем:

$$\rho_\varepsilon(t) \equiv \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} e^{-p_\varepsilon \tau} d\tau < \eta\lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau = \eta - \eta e^{-\lambda t} \leq \eta,$$

так как

$$\eta\lambda \geq \frac{\sup\limits_{x\geq 0} f(x)}{1-\gamma_+} > f(x) \geq g(x) \geq e^{-p_\varepsilon x}.$$

Относительно функции $H(t,u)$ в дальнейшем будем предполагать выполнение следующих условий:

a) при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ функция $H(t,u) \uparrow$ по $u$ на $[\rho_\varepsilon(t), \eta]$,

b) функция $H(t,u)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу $u$ на множестве $\mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$, т.е. при каждом фиксированном $u \in [0,\eta]$ функция $H(t,u)$ измерима по $t$ на $\mathbb{R}^+$ и почти при всех $t \in \mathbb{R}^+$ эта функция непрерывна по $u$ на $[0,\eta]$,

c) существует число $\varepsilon \in (0,1)$ такое, что выполняются следующие неравенства:

$$H(t,\rho_\varepsilon(t)) \geq c_\varepsilon \rho_\varepsilon(t), \qquad H(t,u) \leq h(u) + \beta(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \; u \in [\rho_\varepsilon(t), \eta],$$

где

$$c_\varepsilon \equiv \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}. \tag{3.3}$$

В следующем пункте будет доказано, что если функция $H(t,u)$ удовлетворяет условиям $a)-c)$, то задача (1.6) имеет неотрицательное (нетривиальное) решение.

3.2. **Формулировка и доказательство основного результата.** Справедлив следующий результат.

**Теорема 3.1.** *Пусть ядро $K$ удовлетворяет условиям* (1.3)-(1.5), *а функция $H(t,u)-$ условиям $a)-c)$. Тогда задача* (1.6) *имеет неотрицательное ненулевое решение $y(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Более того, если $x > 0$, то $y(x) > 0$.*

**Доказательство** разобьем на следующие шаги:

**I шаг. Сведение задачи** (1.6) **к нелинейному интегральному уравнению.** Умножим обе части уравнения (1.1) на $e^{-\lambda x}$, $x > 0$ и проинтегрируем по $x$ от $\tau$ до $+\infty$. Умножая обе части полученного равенства на $e^{\lambda\tau}$, $\tau > 0$ и имея ввиду, что $y(+\infty) = y'(+\infty) = 0$ (что следует из $y \in W_1^2(\mathbb{R}^+)$) получим:

$$y' + \lambda y = \int_\tau^\infty e^{-\lambda(x-\tau)} \int_0^\infty K(x-t)H(t,y(t))dtdx, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.4}$$

Изменяя в правой части (3.4) порядок интегрирования, в силу (1.6) приходим к следующей задаче:

$$y' + \lambda y = \int_0^\infty T(x-t)H(t,y(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.5}$$

$$y(0) = 0, \quad y \in W_1^2(\mathbb{R}^+), \tag{3.6}$$

где $T(x)$ задается согласно (2.12).

Обозначим через

$$\varphi(x) = y'(x) + \lambda y(x). \tag{3.7}$$

Тогда, учитывая (3.6), относительно искомой функции $\varphi \in W_1^1(\mathbb{R}^+)$ приходим к следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$\varphi(x) = \int_0^\infty T(x-t)H\left(t, \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau\right)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.8}$$

**II шаг. Построение положительного и ограниченного решения одного вспомогательного нелинейного интегрального уравнения.** Рассмотрим следующее нелинейное вспомогательное уравнение:

$$F(x) = \int_0^\infty T(x-t)\,\bar{h}\left(\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}(F(\tau) - f(\tau))d\tau\right)dt + Q(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.9}$$

где функция $\bar{h}$ порождается с помощью $h$ следующим образом $\bar{h} = \eta - h(\eta - u)$ и обладает свойствами:

$$\begin{aligned} &\bar{h}(0) = 0, \quad \bar{h}(\eta) = \eta, \\ &\bar{h}(u) \geq u, \quad \bar{h} \in C[0,\eta] \quad \bar{h} \quad \uparrow \quad \text{на} \quad [0,\eta], \end{aligned} \tag{3.10}$$

а

$$Q(x) = \int_0^\infty R(x-t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.11}$$

где $f(x)-$ решение неоднородного уравнения (2.10).

Введем следующие последовательные приближения:

(3.12)

$$F_{n+1}(x) = \int_0^\infty T(x-t)\,\bar{h}\left(\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}(F_n(\tau) - f(\tau))d\tau\right)dt + Q(x), \quad x \in \mathbb{R}^+$$
$$F_0(x) = f(x) + \lambda\eta, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Индукцией по $n$ докажем, что

$$F_n(x) \downarrow \text{ по } n, \ x \in \mathbb{R}^+, \ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.13}$$

$$F_n(x) \geq \lambda\eta(1 - \gamma_+)S(x) \equiv \widetilde{S}(x), \ \ x \in \mathbb{R}^+, \ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.14}$$

В случае, когда $n = 0$ в силу (3.10),(2.10),(2.11) из (3.12) имеем:

$$F_1(x) = \int\limits_0^\infty T(x-t)\,\bar{h}\left(\lambda\eta\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}d\tau\right)dt + Q(x) \leq \int\limits_0^\infty T(x-t)\,\bar{h}(\eta)dt + Q(x) \leq$$

$$\leq \lambda\eta + Q(x) \leq \lambda\eta + f(x) = F_0(x).$$

С другой стороны, имеем $F_0(x) = f(x) + \lambda\eta \geq \lambda\eta \geq \widetilde{S}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ и

$$F_1(x) \geq \int\limits_0^\infty T(x-t)\,\bar{h}\left(\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}(\widetilde{S}(\tau) - f(\tau))d\tau\right)dt + Q(x) \geq$$

$$\geq \int\limits_0^\infty T(x-t)\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}(\widetilde{S}(\tau) - f(\tau))d\tau dt + Q(x) =$$

$$= \int\limits_0^\infty R(x-\tau)(\widetilde{S}(\tau) - f(\tau))d\tau + Q(x) = \widetilde{S}(x).$$

Теперь предполагая, что $F_n(x) \leq F_{n-1}(x)$ и $F_n(x) \geq \widetilde{S}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, учитывая монотонность функции $\bar{h}$ на отрезке $[0, \eta]$, из (3.12) получим:

$$F_{n+1}(x) \leq \int\limits_0^\infty T(x-t)\,\bar{h}\left(\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}(F_{n-1}(\tau) - f(\tau))d\tau\right)dt + Q(x) = F_n(x)$$

и

$$F_{n+1}(x) \geq \int\limits_0^\infty T(x-t)\,\bar{h}\left(\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}(\widetilde{S}(\tau)) - f(\tau))d\tau\right)dt + Q(x) \geq$$

$$\geq \int\limits_0^\infty R(x-\tau)(\widetilde{S}(\tau) - f(\tau))d\tau + Q(x) = \widetilde{S}(x).$$

Итак, из (3.13), (3.14) следует, что последовательность функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел, когда $n \to \infty$ : $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, причем

$$\widetilde{S}(x) \leq F(x) \leq \lambda\eta + f(x), \ \ x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.15}$$

В силу того, что $\bar{h} \in C[0, \eta]$, из теоремы Б. Леви (см. [7]) следует, что функция $F(x)$ удовлетворяет уравнению (3.9).

Так как

$$\lambda\eta - \widetilde{S}(x) = \lambda\eta(1-\gamma_+)\left(\frac{1}{1-\gamma_+} - S(x)\right) \in L_1^0(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$$

(см. формулу (2.21)) и $f \in L_1^0(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, то из следующего двустороннего неравенства $0 \le \lambda\eta + f(x) - F(x) \le \lambda\eta + f(x) - \widetilde{S}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ следует, что

$$\lambda\eta + f - F \in L_1^0(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \tag{3.16}$$

где $L_1^0(\mathbb{R}^+) = \{f \in L_1(\mathbb{R}^+) : \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0\}$.

**III шаг. Итерационный процесс для нелинейного интегрального уравнения** (3.8). Введем следующие последовательные приближения для уравнения (3.8):

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^\infty T(x-t) H\left(t, \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\varphi_n(\tau)d\tau\right) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.17}$$
$$\varphi_0(x) = e^{-p_\varepsilon x}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Индукцией по $n$ докажем:

$$I)\ \varphi_n(x) \quad \uparrow \text{ по } n, \quad II)\ \varphi_n(x) \le \lambda\eta + f(x) - F(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.18}$$

Сначала убедимся в достоверности фактов $I)$ и $II)$ в случае $n = 0$. Из условия $c)$ сформулированной теоремы следует:

$$\varphi_1(x) \ge \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}\int_0^\infty T(x-t)\rho_\varepsilon(t)dt = \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}\int_0^\infty T(x-t)\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}e^{-p_\varepsilon\tau}d\tau dt =$$

$$= \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}\int_0^\infty e^{-p_\varepsilon\tau}\int_0^\infty T(x-\tau-z)e^{-\lambda z}dzd\tau = \frac{2\lambda^2}{\alpha\varepsilon}\int_0^\infty R(x-\tau)e^{-p_\varepsilon\tau}d\tau \ge e^{-p_\varepsilon x} = \varphi_0(x)$$

(см. доказательство двустороннего неравенства (2.14)). С другой стороны, в силу (2.14) получаем $\varphi_0(x) \le g(x) \le \lambda\eta - F(x) + f(x)$. Действительно, имеем

$$\lambda\eta - F(x) + f(x) = \lambda\eta - \int_0^\infty T(x-t)\,\bar{h}\left(\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}(F(\tau) - f(\tau))d\tau\right) dt - Q(x) + f(x) =$$

$$= \eta\int_x^\infty T(\tau)d\tau + \int_0^\infty T(x-t)\left(\eta - \bar{h}\left(\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}(F(\tau) - f(\tau))d\tau\right)\right) dt + g(x) \ge g(x),$$

поскольку

$$\bar{h}\left(\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}(F(\tau) - f(\tau))d\tau\right) \le \bar{h}(\eta) = \eta.$$

Но из (2.14) следует $g(x) \geq e^{-p_\varepsilon x}$, следовательно $\varphi_0(x) \leq g(x) \leq \lambda\eta - F(x) + f(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Теперь предполагая, что $\varphi_n(x) \geq \varphi_{n-1}(x)$ и $\varphi_n(x) \leq \lambda\eta - F(x) + f(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, в силу монотонности функции $H(t,u)$ с учетом условия $c$), будем иметь:

$$\varphi_{n+1}(x) \geq \int\limits_0^\infty T(x-t)H\left(t, \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\varphi_{n-1}(\tau)d\tau\right)dt = \varphi_n(x),$$

$$\varphi_{n+1}(x) \leq \int\limits_0^\infty T(x-t)H\left(t, \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}(\lambda\eta - F(\tau) + f(\tau))d\tau\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty T(x-t)H\left(t, \eta - \eta e^{-\lambda t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}(f(\tau) - F(\tau))d\tau\right)dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\infty T(x-t)\left(h\left(\eta - \eta e^{-\lambda t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}(f(\tau) - F(\tau))d\tau\right) + \beta(t)\right)dt =$$

$$= g(x) + \int\limits_0^\infty T(x-t)\left(\eta - \bar{h}(\eta e^{-\lambda t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}(F(\tau) - f(\tau))d\tau\right)dt \leq$$

$$\leq g(x) + \lambda\eta - \int\limits_0^\infty T(x-t)\,\bar{h}\left(\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}(F(\tau) - f(\tau))d\tau\right)dt =$$

$$= g(x) + \lambda\eta + Q(x) - F(x) = \lambda\eta - F(x) + f(x).$$

С использованием условия $b$), индукцией по $n$ из (3.17), легко можно доказать, что каждая из функций $\varphi_n(x)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$– измерима на $\mathbb{R}^+$. Следовательно, с учетом (3.18) заключаем, что последовательность измеримых функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел, когда $n \to +\infty$ : $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, причем $\varphi(x)$ также является измеримой функцией и удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$e^{-p_\varepsilon x} \leq \varphi(x) \leq \lambda\eta - F(x) + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{3.19}$$

С учетом (3.19) из (3.16) получим $\varphi \in L_1^0(\mathbb{R}^+) \cap \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}^+)$.

Из предельной теоремы Б. Леви следует, что $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (3.8).

**IV шаг. Доказательство включения $\varphi \in W_1^2(\mathbb{R}^+)$.** Сначала заметим, что

$$L(x) \equiv \frac{dT}{dx} = -K(x) - \lambda \int\limits_x^\infty K(u)e^{-\lambda(u-x)}du, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

Так как функция $K$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то из (3.20) следует, что функция $L$ также непрерывна и суммируема на $\mathbb{R}$.

С другой стороны,в силу (3.19) и свойства $c$) для функции $H(t,u)$ следующий интеграл

$$\int_0^\infty |L(x-t)|\cdot H\left(t,\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau\right)dt$$

равномерно сходится на $\mathbb{R}^+$. Следовательно, по известной теореме о дифференцировании под знаком интеграла можем утверждать

$$\varphi'(x)=\int_0^\infty L(x-t)H\left(t,\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau\right)dt,\quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{3.21}$$

С учетом (3.20) и условия $c$), из (3.21), имеем:

$$|\varphi'(x)|\le\int_0^\infty[K(x-t)+\lambda T(x-t)]h\left(\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau\right)dt+\int_0^\infty K(x-t)\beta(t)dt+\lambda g(x)\le$$

$$\le\int_0^\infty[K(x-t)+\lambda T(x-t)]\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau dt+\int_0^\infty K(x-t)\beta(t)dt+\lambda g(x)=$$

$$=\int_0^\infty\widetilde{T}(x-\tau)\varphi(\tau)d\tau+\lambda\int_0^\infty R(x-\tau)\varphi(\tau)d\tau+\int_0^\infty K(x-t)\beta(t)dt+\lambda g(x)\le$$

$$\le c_0(\sqrt{\mu}+1+\mu c_1),$$

где

$$c_0\equiv\sup_{x\in\mathbb{R}^+}\varphi(x),\, c_1\equiv\sup_{x\in\mathbb{R}^+}\beta(x),\quad\text{и}$$

$$\widetilde{T}(x)=\int_0^\infty K(x-z)e^{-\lambda z}dz,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{3.22}$$

Отсюда следует, что $\varphi'\in L_\infty(\mathbb{R}^+)$.

Но с другой стороны так как $\widetilde{T}\in L_1(\mathbb{R})$, $R\in L_1(\mathbb{R})$, $\varphi\in L_1(\mathbb{R}^+)$, $\beta\in L_1(\mathbb{R}^+)$, $g\in L_1(\mathbb{R}^+)$, то из неравенства

$$|\varphi'(x)|\le\int_0^\infty\widetilde{T}(x-\tau)\varphi(\tau)d\tau+\lambda\int_0^\infty R(x-\tau)\varphi(\tau)d\tau+\int_0^\infty K(x-t)\beta(t)dt+\lambda g(x),$$

окончательно получим, что $\varphi'\in L_1(\mathbb{R}^+)$. Таким образом, $\varphi\in W_1^1(\mathbb{R}^+)$. Из (3.7) следует, что $y\in W_1^2(\mathbb{R}^+)$. Теорема 3.1 доказана.

В конце работы приведем несколько примеров $H(t,u)$ для иллюстрации полученного результата.

**Пример 3.1.**

$$H(t,u) = \frac{u^q}{\eta^{q-1}} + \frac{2c_\varepsilon u \rho_\varepsilon(t)}{u+\rho_\varepsilon(t)}, \quad \text{где} \quad q > 1,$$

а в качестве $\beta$ можно выбрать следующую функцию: $\beta(t) = 2c_\varepsilon \rho_\varepsilon(t)$.

**Пример 3.2.**

$$H(t,u) = u - \frac{\eta}{\pi k} sin^2 \frac{u\pi k}{\eta} + 4c_\varepsilon \rho_\varepsilon(t) \frac{u^2}{(u+\rho_\varepsilon(t))^2},$$

где в качестве $\beta$ можно выбрать $\beta(t) = 4c_\varepsilon \rho_\varepsilon(t)$. Здесь число $c_\varepsilon$ задается по формуле (3.3).

**Abstract.** In this paper we study an initial-boundary value problem for a second order nonlinear integro-differential equation with Hammerstein type noncompact operator on the positive semi-axis. This problem has a direct application in the nonlocal problems of physical kinetics. We prove the existence of a nonnegative (nontrivial) solution of this equation in the space $W_1^2(\mathbb{R}^+)$. Some special examples of these equations are also discussed, which represent independent theoretical and applied interest.

## Список литературы

[1] Дж. Касти, Р. Калаба, Методы Погружения в Прикладной Математике, Мир М. (1976).

[2] G. A. Baraff," Transmission of electromagnetic waves through a conducting slab. I. The twosided Winer-Hopf solution", J. Math. Phys., **9**, no. 3, 372 – 384 (1968).

[3] Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "Интегро-дифференциальное уранение нелокального взаимодействия волн", Матем. сб., **196**, no. 6, 89 – 106 (2007).

[4] Х. А. Хачатрян, "Некоторые достаточные условия для разрешимости одного класса векторных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки на полупрямой", Известия НАН Армении, математика, **43**, no. 5, 55 – 72 (2008).

[5] Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "О разрешимости интегро-дифференциального уравнения, возникающего в задаче о нелокальном взаимодействии волн", Журнал выч. матем. и матем. физики, **54**, no. 5, 834 – 844 (2014).

[6] Х. А. Хачатрян, "Разрешимость одного класса интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с монотонной нелинейностью на полуоси", Известия Российской Академии Наук, сер. математическая, no. 5, **74**, 191 – 204 (2010).

[7] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, "Элементы теории функций и функционального анализа", Москва, Наука (1981).

[8] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техники, Математический анализ, **22**, 175 – 242 (1984).

[9] D. V. Lindley, "The theory of queue whith a single sever", Proc. Cambridge Phil. Soc., no. 48, 277 – 289 (1952).

[10] A. Khachatryan, Kh. Khachatryan, "On solvability of a nonlinear problem in theory of income distribution", Eurasian Math. J., **2**, no. 2, 75 – 88 (2011).

Поступила 18 ноября 2014