Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 5, 2015, стр. 17-23.

ЗАВИСЯЩЕЕ ОТ ОРИЕНТАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ХОРДЫ КАК ФУНКЦИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ ХОРДЫ

А. Г. ГАСПАРЯН, В. К. ОГАНЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mails: *ara1987-87@mail.ru;* *victo@aua.am*[1]

Аннотация. В [3] и [4] авторы доказали, что ковариограмма и зависящая от ориентации функция распределения длины хорды для треугольника и эллипса являются функциями максимальной хорды $t_{max}(u)$ в направлении u. В статье получено необходимое условие того, что зависящая от ориентации функция распределения длины хорды была бы функцией зависящей от максимальной хорды. Также приведен класс параллелограммов для которых необходимое условие не выполняется.

MSC2010 numbers: 60D05; 52A22; 53C65.

Ключевые слова: ковариограмма; максимальная хорда; зависящее от ориентации распределение.

1. Введение

Пусть $R^n (n \geq 2)$ n-мерное евклидово пространство, $\mathbf{D} \subset R^n$ - ограниченная выпуклая область с внутренними точками, и V_n - n-мерная мера Лебега в R^n. Пусть S^{n-1} - $(n-1)$-мерная единичная сфера с центром в начале координат. Случайная прямая, параллельная направлению $u \in S^{n-1}$ и пересекающая $\mathbf{D}$ имеет точку пересечения (обозначим ее через x) с $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$, где $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$ ортогональная проекция $\mathbf{D}$ на гиперплоскость $u^\perp$($u^\perp$ - гиперплоскость проходящая через начало координат с нормальным вектором u). Можно отождествлять точки $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$ с прямыми, которые пересекают $\mathbf{D}$ и параллельны направлению u. Предположив, что точка пересечения x равномерно распределена в $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$, мы можем определить следующую функцию распределения:

Определение 1.1. *Функция*

$$F(u,t) = \frac{V_{n-1}\{x \in \Pi r_{u^\perp}\mathbf{D} : V_1(g(u,x) \cap \mathbf{D}) < t)\}}{b_{\mathbf{D}}(u)}$$

[1]Работа первого автора выполнена при частичной поддержке государственного комитета по науке Республики Армения, Грант 14A-1a09

называется зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды $\mathbf{D}$ *в направлении* u *в точке* $t \in R^1$, *где* $g(u,x)$ *- прямая параллельная* $u \in S^{n-1}$ *и пересекающая* $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$ *в точке* x, *а* $b_{\mathbf{D}}(u) = V_{n-1}(\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D})$.

Определение 1.2. *(см. [1]). Функция*

$$C(\mathbf{D}, h) = V_n(\mathbf{D} \cap (\mathbf{D} + h)), \quad h \in R^n,$$

называется ковариограммой $\mathbf{D}$. *Здесь* $\mathbf{D} + h = \{x + h, x \in \mathbf{D}\}$.

Мы можем представить каждый вектор $h \in R^n$ как $h = tu$, где u - направление h, а t его длина.

Лемма 1.1. *(см. [1]). Пусть* $u \in S^{n-1}$ *и* $t > 0$ *такое, что* $\mathbf{D} \cap (\mathbf{D} + tu)$ *содержит внутренние точки. Тогда* $C(\mathbf{D}, u, t)$ *дифференцируема по* t *и*

$$-\frac{\partial C(\mathbf{D}, u, t)}{\partial t} = (1 - F(u,t)) \cdot b_{\mathbf{D}}(u). \tag{1.1}$$

В точке $t = 0$ *существует правосторонняя производная левой части, и равенство (1.3) остается в силе.*

Ж. Матерон сформулировал гипотезу, что ковариограмма выпуклого тела $\mathbf{D}$ определяет $\mathbf{D}$ в классе всех выпуклых тел, с точностью до параллельных переносов и отражений (см. [1]). Г. Бианчи и Г. Аверков доказали, что каждая плоская выпуклая область определяется в классе всех плоских выпуклых областей по ковариограмме, с точностью до параллельных переносов и отражений (см. [2]).

Пусть $L(\omega)$ - случайный отрезок длины $l > 0$, параллельный фиксированному направлению u и пересекающий $\mathbf{D}$. Рассмотрим случайную величину $|L|(\omega) = V_1(L(\omega) \cap \mathbf{D})$, где $L(\omega)$ принадлежит следующему множеству:

$$\Omega(u) = \{\text{отрезки длины } l, \text{ пересекающие } \mathbf{D} \text{ и имеющие направление } u\}.$$

Случайный отрезок $L(\omega)$, лежащий на прямой $g(u,x)$, можно задавать координатами $(g(u,x), y)$, где $g(u,x)$ – прямая с направлением $u \in S^{n-1}$, проходящая через точку $x \in \Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$, а y одномерная координата центра отрезка $L(\omega)$ на прямой $g(u,x)$. Началом координат на прямой $g(u,x)$ берется одна из точек пересечений $g(u,x)$ с $\mathbf{D}$. Используя вышеупомянутые обозначения можно отождествлять $\Omega(u)$ с множеством:

$$\Omega(u) = \left\{(x,y) : x \in \Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}, \quad y \in \left[-\frac{l}{2}, \chi(u,x) + \frac{l}{2}\right]\right\},$$

где $\chi(u,x) = V_1(g(u,x) \cap \mathbf{D})$.

Определение 1.3. *Функция*

$$F_{|L|}(u,t) = \frac{V_n(\{(x,y) \in \Omega(u) : \ |L|(x,y) < t\})}{V_n(\Omega(u))}$$

называется зависящей от ориентации функцией распределения длины случайного отрезка в направлении $u \in S^{n-1}$.

В [6] получена связь между функцией распределения случайной величины $|L|(\omega)$ и зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды в R^n:

$$(1.2) \quad F_{|L|}(u,t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t \le 0, \\ \dfrac{b_{\mathbf{D}}(u)\left[2t + F(u,t)(l-t) - \int_0^t F(u,z)dz\right]}{V_n(\mathbf{D}) + lb_{\mathbf{D}}(u)} & \text{для} \quad 0 \le t \le l, \\ 1 & \text{для} \quad t > l. \end{cases}$$

2. Необходимое условие на $F(u,t)$

Зафиксируем $u \in S^{n-1}$. Пусть $L(\omega)$ случайный отрезок длины $t_{max}(u)$ ($t_{max}(u)$ - хорда максимальной длины $\mathbf{D}$ в направлении $u \in S^{n-1}$), параллельный фиксированному направлению u и пересекающий $\mathbf{D}$. Подставляя в (1.2) $|L| = l = t_{max}(u)$ получаем:

(2.1)

$$F_{t_{max}(u)}(u,t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t \le 0, \\ C \cdot \left[2t + F(u,t)(t_{max}(u) - t) - \displaystyle\int_0^t F(u,z)dz\right] & \text{для} \quad 0 \le t \le t_{max}(u), \\ 1 & \text{для} \quad t > t_{max}(u). \end{cases}$$

где $C = \frac{b_{\mathbf{D}}(u)}{V_n(\mathbf{D}) + t_{max}(u)b_{\mathbf{D}}(u)}$.

Левая часть (2.1) в точке t есть вероятность, что длина пересечения $\mathbf{D}$ и случайного отрезка $L(\omega)$ меньше чем t, следовательно $F_{t_{max}(u)}(u, t_{max}(u)) = 1$. Таким образом, подставляя в (2.1) $t = t_{max}(u)$, получаем

$$(2.2) \qquad 1 = \frac{b_{\mathbf{D}}(u)}{V_n(\mathbf{D}) + t_{max}(u)b_{\mathbf{D}}(u)}\left[2t_{max}(u) - \int_0^{t_{max}(u)} F(u,z)dz\right]$$

После элементарных преобразований (2.2) получаем следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Для любого выпуклого тела* $\mathbf{D}$ *и любого направления* $u \in S^{n-1}$ *интеграл зависящей от ориентации функции распределения длины хорды на интервале* $[0, t_{max}(u)]$ *дается следующей формулой:*

$$(2.3) \qquad \int_0^{t_{max}(u)} F(u,z)dz = t_{max}(u) - \frac{V_n(\mathbf{D})}{b_{\mathbf{D}}(u)}$$

Так как левая часть (2.3) неотрицательна, получаем следующее следствие теоремы 2.1:

Следствие 2.1. *Для каждого выпуклого тела* $\mathbf{D} \subset R^n$ *и направления* $u \in S^{n-1}$ *имеет место неравенство:*

$$V_n(\mathbf{D}) \leq b_{\mathbf{D}}(u) \cdot t_{max}(u).$$

Из (2.3) также имеем:

Следствие 2.2. *Для любых двух направлений* $u_1, u_2 \in S^{n-1}$ *таких, что* $t_{max}(u_1) = t_{max}(u_2)$ *и*

$$\int_0^{t_{max}(u_1)} F(u_1, z)dz = \int_0^{t_{max}(u_2)} F(u_2, z)dz$$

следует

$$b_{\mathbf{D}}(u_1) = b_{\mathbf{D}}(u_2).$$

Допустим, что существует функция $G(x, y)$ от двух переменных такая, что $F(u,t) = G(t_{max}(u), t)$. В этом случае, из равенства $t_{max}(u_1) = t_{max}(u_2)$ следует:

$$\int_0^{t_{max}(u_1)} F(u_1, z)dz = \int_0^{t_{max}(u_2)} F(u_2, z)dz$$

Следовательно, из следствия 2.2 получаем следующий результат:

Следствие 2.3. *Если зависящая от ориентации функция распределения длины хорды зависит от направления только через* $t_{max}(u)$*, тогда для любых двух направлений* $u_1, u_2 \in S^{n-1}$ *таких, что* $t_{max}(u_1) = t_{max}(u_2)$ *следует*

$$b_{\mathbf{D}}(u_1) = b_{\mathbf{D}}(u_2).$$

Следствие 2.3 является необходимым условием того, что зависящая от ориентации функция распределения длины хорды была бы функцией, зависящей от направления через $t_{max}(u)$. Зависящая от ориентации функция распределения длины хорды для треугольников и эллипсов зависит от направления через $t_{max}(u)$ (см. [3] и [4]), следовательно необходимое условие в этих случаях удовлетворяется. Проверим это для треугольника (для эллипса это можно сделать аналогично). Из [3] имеем, что ковариограмма треугольника Δ с площадью S дается следующей формулой:

$$C(\Delta, u, t) = S\left(1 - \frac{t}{t_{\max}(u)}\right)^2 \tag{2.4}$$

где $t \in [0, t_{\max}(u)]$. Поэтому из (2.4) получаем

$$-\frac{\partial C(\Delta,u,t)}{\partial t}(0)=\frac{2S}{t_{\max}(u)}. \tag{2.5}$$

С другой стороны из (1.3) имеем

$$-\frac{\partial C(\Delta,u,t)}{\partial t}(0)=b_{\Delta}(u). \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) получаем

$$S=\frac{1}{2}t_{\max}(u)b_{\Delta}(u). \tag{2.7}$$

Используя (2.7), легко заметить, что для любых двух направлений $u_1,u_2\in S^{n-1}$ таких, что $t_{max}(u_1)=t_{max}(u_2)$, следует $b_{\Delta}(u_1)=b_{\Delta}(u_2)$.

3. Необходимое условие для параллелограмма

Пусть $ABCD$ - параллелограмм. Обозначим $|AB|=a_1$, $|AD|=a_2$, $\angle BAD=\alpha$. Рассмотрим направление луча AD как нулевое, а направление против часовой стрелки в качестве положительного. В [5] получены явные выражения для максимальной хорды и функции ширины для параллелограмма $ABCD$:

$$t_{\max}(u)=\begin{cases}\frac{a_2\sin\alpha}{\sin(\alpha-u)}, & u\in\left(0,\operatorname{arcctg}\left(\frac{a_2}{a_1\sin\alpha}+\cot\alpha\right)\right]\\ \frac{a_1\sin\alpha}{\sin u}, & u\in\left[\operatorname{arcctg}\left(\frac{a_2}{a_1\sin\alpha}+\cot\alpha\right),\operatorname{arcctg}\left(\cot\alpha-\frac{a_2}{a_1\sin\alpha}\right)\right],\ u\neq\alpha\\ \frac{a_2\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}, & u\in\left[\operatorname{arcctg}\left(\cot\alpha-\frac{a_2}{a_1\sin\alpha}\right),\pi\right)\\ a_2, & u=0\\ a_1, & u=\alpha\end{cases} \tag{3.1}$$

$$b_{ABCD}(u)=\begin{cases}a_2\sin u+a_1\sin(\alpha-u), & u\in[0,\alpha]\\ a_2\sin u+a_1\sin(u-\alpha), & u\in[\alpha,\pi]\end{cases} \tag{3.2}$$

Рассмотрим ромб со стороной a и $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. В этом случае, из (3.1) и (3.2), для максимальной хорды и функции ширины получаем:

$$t_{\max}(u)=\begin{cases}\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha-u)}, & u\in\left(0,\frac{\alpha}{2}\right]\\ \frac{a\sin\alpha}{\sin u}, & u\in\left[\frac{\alpha}{2},\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right],\ u\neq\alpha\\ \frac{a\sin\alpha}{\sin(u-\alpha)}, & u\in\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2},\pi\right)\\ a, & u=0,\alpha\end{cases} \tag{3.3}$$

$$b_{ABCD}(u) = \begin{cases} a\,(\sin u + \sin(\alpha - u))\,, & u \in [0, \alpha] \\ a\,(\sin u + \sin(u - \alpha))\,, & u \in [\alpha, \pi] \end{cases} \tag{3.4}$$

Обозначим $u_1 = \frac{\alpha}{n}$ и $u_2 = 2\alpha - \frac{\alpha}{n}$, где n натуральное число. Очевидно, что $u_1 \in (0, \frac{\alpha}{2}]$ для любого $n \geq 2$. Поскольку $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$, следовательно, $u_2 \in [\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}, \pi)$ для достаточно большого натурального числа n. Из (3.3) имеем что равенство $t_{\max}(u_1) = t_{\max}(u_2)$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sin(\alpha - u_1) = \sin(u_2 - \alpha) \tag{3.5}$$

Подставляя в (3.5) значения u_1 и u_2 легко проверить, что (3.5) выполнено. Теперь покажем, что необходимое условие из следствия 2.3 не выполняется для направлений u_1 и u_2. Допустим необходимое условие выполняется. В этом случае из (3.4) имеем, что равенство $b_{ABCD}(u_1) = b_{ABCD}(u_2)$ эквивалентно следующему

$$a\,(\sin u_2 - \sin u_1) = 0 \tag{3.6}$$

Подставляя в (3.6) значения u_1 и u_2 получаем эквивалентное уравнение:

$$\sin\frac{\alpha}{n} - \sin\left(2\alpha - \frac{\alpha}{n}\right) = 0 \tag{3.7}$$

После элементарных преобразований из (3.7) получаем:

$$\sin\left(\frac{1-n}{n}\cdot\alpha\right)\cdot\cos\alpha = 0 \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) имеет место, если $\alpha = \frac{\pi}{2}$ или $\frac{1-n}{n}\cdot\alpha = \pi k$ где k целое число, следовательно для достаточно большого натурального числа n (3.8) не имеет места (так как $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Следовательно $b_{ABCD}(u_1) \neq b_{ABCD}(u_2)$.

Abstract. In [3] and [4] have been proved that covariogram and orientation-dependent chord length distribution function of a triangle and an ellipse depends on maximal chord $t_{max}(u)$ in direction u. In this paper a necessary condition for orientation-dependent chord length distribution function as a function of maximal chord is obtained. A class of parallelograms is constructed for which this necessary condition is violated.

Список литературы

[1] Ж. Матерон, Случайные Множества и Интегральная Геометрия, Мир, Москва (1978).

[2] G. Bianchi and G. Averkov, "Confirmation of Matheron's Conjecture on the covariogram of a planar convex body" Journal of the European Mathematical Society **11**, 1187 – 1202, (2009).

[3] А. Г. Гаспарян, В. К. Оганян, "Восстановление треугольников по ковариограмме", Известия НАН Армении, серия Математика, **47**, но. 3, 25 – 42 (2013).

[4] Г. С. Арутюнян, В. К. Оганян, "Зависящие от направления распределения сечений выпуклых тел", Известия НАН Армении, серия Математика, **49**, но. 3, 3 – 24 (2014).

[5] А. Г. Гаспарян, В. К. Оганян, "Ковариограмма параллелограмма", Известия НАН Армении, серия Математика, **49**, но. 4, 17 – 34 (2014).

[6] А. Г. Гаспарян, В. К. Оганян, "Зависящее от ориентации распределение длины случайного отрезка и ковариограмма", Известия НАН Армении, серия Математика, **50** (2015).

Поступила 1 сентября 2014