

ОБ ОПЕРАТОРЕ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В $\mathbb{R}^n$

К. АВЕТИСЯН, Е. ТОНОЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mails: *avetkaren@ysu.am*; *etonyan@ysu.am*

Аннотация. В статье введена новая форма дробной производной для функций, заданных в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$. В качестве приложения получено интегральное представление для гармонических в шаре функций с конечной смешанной нормой.

MSC2010 numbers: 26A33, 31B05, 31B10.

Ключевые слова: дробный интеграл; дробная производная; гармоническая функция; единичный шар в $\mathbb{R}^n$; пространство со смешанной нормой; ядро Пуассона-Бергмана.

1. ВВЕДЕНИЕ

Возникновение понятий дробного интегрирования и дифференцирования в XIX веке поначалу было связано с теорией интегральных и дифференциальных уравнений. Дробными интегралами и производными занимались Абель, Лиувиль, Риман, Адамар, Вейль, Харди, Литтлвуд, М. Рисс и другие, см. монографию Самко, Килбаса, Маричева [1], где можно найти подробные справки. Позднее, дробное интегродифференцирование нашло новые применения в теории функций. Оно оказалось весьма эффективным средством, в частности, в теории классических функциональных пространств, см. [2] – [9].

Одним из недостатков дробных интегралов и производных является их разнообразие и часто несовместимость друг с другом, в том числе в различных приложениях. Широкий выбор различных типов дробных интегралов и производных обращается в преимущество, когда нужно их приспособить к тому или иному применению.

В настоящей работе мы развиваем и применяем классическое интегродифференцирование Римана-Лиувилля в задачах из теории гармонических пространств

в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Введем необходимые обозначения. Пусть $B = B_n$ — открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $S = \partial B$ — его граница, единичная сфера. Интегральные средние порядка p гармонической функции $u(x) = u(r\zeta)$ на сфере $|x| = r$ обозначены, как обычно, через

$$M_p(u; r) = \|u(r \cdot)\|_{L^p(S; d\sigma)}, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 < p \leq \infty,$$

где $d\sigma$ — $(n-1)$ -мерная поверхностная лебегова мера на S , нормированная условием $\sigma(S) = 1$. Множество всех вещественных гармонических функций в шаре B обозначим через $h(B)$.

Определим пространство $h(p, q, \alpha)$ ($0 < p, q \leq \infty, \alpha \in \mathbb{R}$) со смешанной нормой как пространство тех гармонических функций $u \in h(B)$, для которых конечна квазинорма

$$\|u\|_{h(p, q, \alpha)} = \begin{cases} \left(\int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(u; r) dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \sup_{0 < r < 1} (1-r)^\alpha M_p(u; r), & q = \infty. \end{cases}$$

При $p = q < \infty$ пространства $h(p, q, \alpha)$ совпадают с весовыми классами Бергмана, а при $q = \infty$ их обычно называют весовыми пространствами Харди.

Много работ посвящено пространствам $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой или их аналогам, состоящим из голоморфных, плюригармонических или гармонических функций в круге или шаре из $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$.

Пространства со смешанной нормой для голоморфных в единичном круге функций были введены Харди и Литтлвудом [2], [3]. Позднее, Флетт [6], [7] значительно развил теорию, а в дальнейшем были получены многомерные обобщения результатов Харди, Литтлвуда, Флетта в областях из $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$. Пространства $h(p, p, \alpha)$, $h(p, q, \alpha)$ в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$ изучались в работах [10]–[21], а пространства $h(p, q, \alpha)$, состоящие из n -гармонических функций в полидиске из $\mathbb{C}^n$, изучались в статьях [22] – [24].

Основным нашим приложением дробных операторов в теории гармонических пространств является следующее интегральное представление в пространствах $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой.

Теорема 1.1. Пусть $0 < p, q \leq \infty, \alpha > 0$, $u \in h(p, q, \alpha)$ — произвольная функция. Пусть выполнено $0 < p, q \leq \infty, \beta > \max\{\alpha + (n-1)(1/p - 1), \alpha\}$, либо

$1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq 1$, $\beta \geq \alpha$. Тогда

$$(1.1) \quad u(x) = \frac{2}{n \Gamma(\beta)} \int_B (1 - |y|^2)^{\beta-1} P_\beta(x, y) u(y) dV(y), \quad x \in B,$$

где $P_\beta(x, y)$ — ядро Пуассона–Бергмана, определенное в параграфе 5.

Замечание 1.1. В частном случае $p = q \geq 1$ и $\beta = \alpha$ или для еще более узких классов аналогичное интегральное представление получено в [10],[11],[13],[14],[18], а с более общими весами — в [17],[19]. Для голоморфных функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ Теорему 1.1 при $1 \leq p, q \leq \infty$ можно найти в [25],[26], а для n -гармонических функций в полидиске — в [22].

2. ДРОБНОЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ НА ПЛОСКОСТИ

В этом параграфе мы приводим определение известного оператора D^α дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля и одну его модификацию $\mathcal{D}^\alpha$. Всегда будем считать, что при положительной степени α операторы D^α и $\mathcal{D}^\alpha$ представляют дробное дифференцирование порядка $\alpha > 0$, а при отрицательной степени α операторы D^α и $\mathcal{D}^\alpha$ выражают дробное интегрирование порядка $|\alpha| > 0$. В случае $\alpha = 0$ полагаем, что D^0 и $\mathcal{D}^0$ — тождественные операторы, т.е. $D^0 f = f$ и $\mathcal{D}^0 f = f$.

Определение 2.1. (Дробное интегродифференцирование Римана–Лиувилля на $\mathbb{R}^2$) Пусть задана функция $f(r)$ одной переменной $r \in [0, 1)$. Тогда

$$(2.1) \quad D_2^{-\alpha} f(r) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tr) dt,$$

$$(2.2) \quad D_2^m f(r) := \left(\frac{d}{dr} \right)^m f(r), \quad D_2^\alpha f(r) := D_2^{-(m-\alpha)} D_2^m f(r),$$

$$(2.3) \quad \mathcal{D}_2^{-\alpha} f(r) := r^{-\alpha} D_2^{-\alpha} f(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tr) dt,$$

$$(2.4) \quad \mathcal{D}_2^\alpha f(r) := D_2^\alpha \{ r^\alpha f(r) \},$$

где $0 \leq r < 1$, $\alpha > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $m-1 < \alpha \leq m$.

Нижний индекс 2 при операторах ставится, поскольку далее мы применяем их по отношению к функциям, заданным на плоскости, и в частности на единичном круге $\mathbb{D}$. В последующих разделах мы будем рассматривать операторы $\mathcal{D}^\alpha$ также по отношению к функциям, заданным в $\mathbb{R}^n$. Введение модификации $\mathcal{D}_2^\alpha$

обусловлено тем, что оператор D_2^α не сохраняет голоморфные или гармонические функции, а оператор $\mathcal{D}_2^\alpha$ — сохраняет, т.е. $\mathcal{D}_2^\alpha : H(\mathbb{D}) \rightarrow H(\mathbb{D})$ и $\mathcal{D}_2^\alpha : h(\mathbb{D}) \rightarrow h(\mathbb{D})$. Заметим, что оператор дифференцирования $\mathcal{D}_2^1$ первого порядка не совпадает с обычной частной или комплексной производной, именно $\mathcal{D}_2^1 f = \frac{\partial}{\partial r}(rf)$, которую называют радиальной производной функции f . Иногда будем писать $D_{2,r}^\alpha$ и $\mathcal{D}_{2,r}^\alpha$, чтобы указать переменную r , по которой выполняется интегрирование или дифференцирование.

Операторы D_2^α и $\mathcal{D}_2^\alpha$ хорошо приспособлены к применению к степенным функциям. Следующая лемма проверяется простыми вычислениями.

Лемма 2.1. При $\alpha > 0$, $k > -1$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $D^\alpha \equiv D_2^\alpha$, $\mathcal{D}^\alpha \equiv \mathcal{D}_2^\alpha$ имеют место следующие тождества:

$$(2.5) \quad D^{-\alpha} \{r^k\} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} r^{k+\alpha},$$

$$(2.6) \quad D^m \{r^k\} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-m+1)} r^{k-m}, \quad k-m \neq -1, -2, \dots,$$

$$(2.7) \quad D^\alpha \{r^{k+\alpha}\} = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)} r^k,$$

$$(2.8) \quad \mathcal{D}^{-\alpha} \{r^k\} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} r^k,$$

$$(2.9) \quad \mathcal{D}^\alpha \{r^k\} = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)} r^k.$$

Помимо определения 2.1 посредством дробных интегралов имеются другие способы определения дробного интегродифференцирования через разложения в степенные ряды, см. [1], [3], [5] – [7]. Подобные разложения удобны для распространения дробного интегродифференцирования на функции, заданные в $\mathbb{R}^n$.

3. ДРОБНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ И НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В $\mathbb{R}^n$

Вначале определим дробное интегродифференцирование для гармонических в $\mathbb{R}^n$ функций. Положим, что гармоническая функция $f(x) \in h(B)$ разложена в ряд по однородным сферическим гармоникам Y_{kj}

$$(3.1) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k} a_{kj} r^k Y_{kj}(\zeta) \equiv \sum_{k,j} a_{kj} r^k Y_{kj}(\zeta), \quad x = r\zeta \in B,$$

где $d_k = \frac{(2k+n-2)(n+k-3)!}{(n-2)!k!}$ — размерность пространства $\mathcal{H}_k(S)$ сферических гармоник степени k . Теорию пространств $\mathcal{H}_k(S)$ можно найти, например, в монографиях [27],[16]. Хорошо известно понятие дробного интегродифференцирования (см. [1],[8], [10]–[20]) для гармонических функций (3.1) в $\mathbb{R}^n$, выраженное в виде ряда из сферических гармоник.

Определение 3.1.

$$(3.2) \quad \mathcal{D}_{n(ser)}^{-\alpha} f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k} \frac{\Gamma(k+n/2)}{\Gamma(\alpha+k+n/2)} a_{kj} r^k Y_{kj}(\zeta), \quad \alpha \geq 0,$$

$$(3.3) \quad \mathcal{D}_{n(ser)}^{\alpha} f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k} \frac{\Gamma(\alpha+k+n/2)}{\Gamma(k+n/2)} a_{kj} r^k Y_{kj}(\zeta), \quad \alpha \geq 0.$$

Другой, более общий способ определения дробного интегрирования порядка $\alpha > 0$ выражается через дробные интегралы Римана–Лиувилля подобно случаю $n = 2$.

Определение 3.2.

$$(3.4) \quad \begin{aligned} D_n^{-\alpha} f(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} f(t\zeta) t^{n/2-1} dt = \\ &= \frac{r^{\alpha+n/2-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1} f(\xi x) \xi^{n/2-1} d\xi = D_2^{-\alpha} \left\{ r^{n/2-1} f(x) \right\}. \end{aligned}$$

Это прямое обобщение оператора $D_2^{-\alpha}$ (см. (2.1)) на n -мерный случай. Как и при $n = 2$ определяем его модификацию $\mathcal{D}_n^{-\alpha}$ (сравни с [12], [8]).

Определение 3.3.

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_{n(int)}^{-\alpha} f(x) &:= r^{-(\alpha+n/2-1)} D_n^{-\alpha} f(x) = r^{-(\alpha+n/2-1)} D_2^{-\alpha} \left\{ r^{n/2-1} f(x) \right\} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1} f(\xi x) \xi^{n/2-1} d\xi. \end{aligned}$$

Преимущество модификации $\mathcal{D}_{n(int)}^{-\alpha}$ перед оператором $D_n^{-\alpha}$ состоит в том, что оператор $\mathcal{D}_{n(int)}^{-\alpha}$ сохраняет гармонические функции, т.е. $\mathcal{D}_{n(int)}^{-\alpha} : h(B) \rightarrow h(B)$. Этим же преимуществом обладают операторы $\mathcal{D}_{n(ser)}^{\pm\alpha}$. Поскольку оба оператора $\mathcal{D}_{n(ser)}^{-\alpha}$ и $\mathcal{D}_{n(int)}^{-\alpha}$ выражают первообразную порядка $\alpha > 0$ функции f , то возникает естественный вопрос об их связи. На самом деле эти операторы совпадают для гармонических функций, что выражается следующей леммой.

Лемма 3.1. Два определения (3.2) и (3.5) для первообразной $\mathcal{D}_n^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$) совпадают для гармонических функций в B , т.е.

$$\mathcal{D}_{n(\text{ser})}^{-\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{n(\text{int})}^{-\alpha} f(x) =: \mathcal{D}_n^{-\alpha} f(x), \quad x \in B, \quad f \in h(B).$$

Доказательство. Пусть гармоническая функция $f \in h(B)$ разложена в ряд по сферическим гармоникам по формуле (3.1). Тогда по определениям (3.5) и (3.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{n(\text{int})}^{-\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tx) t^{n/2-1} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \left(\sum_{k,j} a_{kj} t^k r^k Y_{kj}(\zeta) \right) t^{n/2-1} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k,j} a_{kj} r^k Y_{kj}(\zeta) \left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{k+n/2-1} dt \right) = \\ &= \sum_{k,j} \frac{\Gamma(k+n/2)}{\Gamma(\alpha+k+n/2)} a_{kj} r^k Y_{kj}(\zeta) = \mathcal{D}_{n(\text{ser})}^{-\alpha} f(x), \end{aligned}$$

что и требовалось показать. $\square$

В частности, действие оператора $\mathcal{D}_n^{-\alpha}$ на мономы типа r^γ ($\alpha > 0$, $\gamma > -n/2$) приводит к полезной формуле

$$\mathcal{D}_n^{-\alpha} \{r^\gamma\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} (tr)^\gamma t^{n/2-1} dt = \frac{\Gamma(\gamma+n/2)}{\Gamma(\alpha+\gamma+n/2)} r^\gamma.$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДИФИКАЦИИ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ В $\mathbb{R}^n$

Если определение 3.3 оператора дробного интегрирования довольно естественно и удобно, то определение соответствующего оператора дробного дифференцирования вызывает некоторые проблемы. Мы уже определили дробное дифференцирование $\mathcal{D}_{n(\text{ser})}^\alpha$ ($\alpha > 0$) для гармонической функции через разложение в ряд по сферическим гармоникам (3.2). Такое определение вполне естественно и немедленно влечет обратимость оператора, выраженное формулой, весьма полезной в приложениях,

$$\mathcal{D}_{n(\text{ser})}^\alpha \mathcal{D}_n^{-\alpha} f(x) = \mathcal{D}_n^{-\alpha} \mathcal{D}_{n(\text{ser})}^\alpha f(x) = f(x), \quad f \in h(B).$$

Тем не менее, хотелось бы отстраниться от гармонических функций и их разложений в ряды по сферическим гармоникам и определить дробные производные

как обратные к дробным первообразным для более общих функций. Поэтому будем решать следующую задачу: **найти явную и удобную форму для дробной производной $\mathcal{D}_n^\alpha$ как обратного оператора к дробному интегралу $\mathcal{D}_n^{-\alpha}$.** Естественное полугрупповое свойство $\mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}^\beta f = \mathcal{D}^{\alpha+\beta} f$ желательно, но не обязательно.

Одна форма для дробной производной $\mathcal{D}_n^\alpha$ в неявном виде содержится в работах [10], [13] – [15], [19], [20]. Выразим ее в терминах оператора D_2^α , см. (2.2).

Определение 4.1. (Дробная производная порядка $\alpha > 0$)

$$(4.1) \quad \mathcal{D}_{n(int)}^\alpha f(x) := D_{2,t}^\alpha \left[t^{\alpha+n/2-1} f(tx) \right]_{t=1}, \quad \alpha > 0,$$

где производная $D_{2,t}^\alpha$ берется по переменной t .

Все же, здесь из-за введения дополнительной переменной t такая форма для дробной производной создает некоторые неудобства в применении.

Следующее наше определение новой формы дробной производной более удобно и приспособлено к дальнейшим применениям.

Определение 4.2. (Дробная производная порядка $\alpha > 0$)

$$(4.2) \quad \mathfrak{D}_n^\alpha f(x) := r^{-(n/2-1)} D_2^\alpha \left[r^{\alpha+n/2-1} f(x) \right],$$

где производная $D_2^\alpha = D_{2,r}^\alpha$, см. (2.2), берется по переменной $r = |x|$, как обычно.

При $n = 2$, очевидно, оператор $\mathfrak{D}_2^\alpha$ сводится к $\mathcal{D}_2^\alpha$, см. (2.4).

Итак, на данный момент в $\mathbb{R}^n$ мы имеем три определения (3.3), (4.1) и (4.2) для дробной производной. На самом деле эти три определения совпадают для пригодных функций.

Теорема 4.1. Три определения (3.3), (4.1) и (4.2) дробных производных совпадают для гармонических функций $f \in h(B)$, т.е.

$$(4.3) \quad \mathcal{D}_{n(ser)}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_{n(int)}^\alpha f(x) = \mathfrak{D}_n^\alpha f(x), \quad \alpha > 0.$$

Для негармонических, но достаточно гладких функций f совпадают определения (4.1) и (4.2), т.е.

$$(4.4) \quad \mathcal{D}_{n(int)}^\alpha f(x) = \mathfrak{D}_n^\alpha f(x), \quad \alpha > 0.$$

Доказательство. Вначале применим операторы к мономам типа r^k ($k \geq 0$). Согласно (4.1), (2.7), (3.3),

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{n(int)}^\alpha \{r^k\} &= D_{2,t}^\alpha \left[t^{\alpha+n/2-1} (tr)^k \right]_{t=1} = r^k D_{2,t}^\alpha \left[t^{\alpha+k+n/2-1} \right]_{t=1} = \\ &= r^k \frac{\Gamma(\alpha + k + n/2)}{\Gamma(k + n/2)} \left[t^{k+n/2-1} \right]_{t=1} = \frac{\Gamma(\alpha + k + n/2)}{\Gamma(k + n/2)} r^k, \end{aligned}$$

Согласно (4.2), (2.7), (3.3),

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_n^\alpha \{r^k\} &= r^{-(n/2-1)} D_2^\alpha \left[r^{\alpha+n/2-1} r^k \right] = r^{-(n/2-1)} D_2^\alpha \left[r^{\alpha+k+n/2-1} \right] = \\ &= r^{-(n/2-1)} \frac{\Gamma(\alpha + k + n/2)}{\Gamma(k + n/2)} \left[r^{k+n/2-1} \right] = \frac{\Gamma(\alpha + k + n/2)}{\Gamma(k + n/2)} r^k. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(4.5) \quad \mathcal{D}_{n(int)}^\alpha \{r^k\} = \mathfrak{D}_n^\alpha \{r^k\} = \mathcal{D}_{n(ser)}^\alpha \{r^k\} = \frac{\Gamma(\alpha + k + n/2)}{\Gamma(k + n/2)} r^k.$$

Теперь пусть гармоническая в B функция f разложена в ряд (3.1). Ввиду (4.5) и линейности операторов получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{n(int)}^\alpha f(x) &= \mathcal{D}_{n(int)}^\alpha \left[\sum_{k,j} a_{kj} r^k Y_{kj}(\zeta) \right] = \sum_{k,j} a_{kj} \left[\mathcal{D}_{n(int)}^\alpha \{r^k\} \right] Y_{kj}(\zeta) = \\ &= \sum_{k,j} a_{kj} \left[\frac{\Gamma(\alpha + k + n/2)}{\Gamma(k + n/2)} r^k \right] Y_{kj}(\zeta) = \mathcal{D}_{n(ser)}^\alpha f(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_n^\alpha f(x) &= \mathfrak{D}_n^\alpha \left[\sum_{k,j} a_{kj} r^k Y_{kj}(\zeta) \right] = \sum_{k,j} a_{kj} \left[\mathfrak{D}_n^\alpha \{r^k\} \right] Y_{kj}(\zeta) = \\ &= \sum_{k,j} a_{kj} \left[\frac{\Gamma(\alpha + k + n/2)}{\Gamma(k + n/2)} r^k \right] Y_{kj}(\zeta) = \mathcal{D}_{n(ser)}^\alpha f(x), \end{aligned}$$

что доказывает равенства (4.3).

Для негармонических функций f нам нужно доказать равенство (4.4), $\mathcal{D}_{n(int)}^\alpha f(x) = \mathfrak{D}_n^\alpha f(x)$, или что то же

$$D_{2,t}^\alpha \left[t^{\alpha+n/2-1} f(tx) \right]_{t=1} = r^{-(n/2-1)} D_{2,r}^\alpha \left[r^{\alpha+n/2-1} f(x) \right], \quad x = r\zeta \in B.$$

Вначале заметим, что для целых $m \geq 1$

$$(4.6) \quad D_{2,t}^m \left[t^{\alpha+\beta} f(tx) \right]_{t=1} = r^{-\beta} D_{2,r}^m \left[r^{\alpha+\beta} f(x) \right], \quad \alpha > 0, \beta \geq 0,$$

что проверяется непосредственным дифференцированием. Это влечет равенство (4.4), $\mathcal{D}_{n(int)}^\alpha f(x) = \mathfrak{D}_n^\alpha f(x)$ для целых $\alpha = m \geq 1$. Для нецелых $\alpha > 0$ обозначим $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, $m-1 < \alpha < m$, т.е. $[\alpha] = m-1$. Тогда (4.4) равносильно равенству

$$D_{2,t}^{-(m-\alpha)} D_{2,t}^m \left[t^{\alpha+n/2-1} f(tx) \right]_{t=1} = r^{-(n/2-1)} D_{2,r}^{-(m-\alpha)} D_{2,r}^m \left[r^{\alpha+n/2-1} f(x) \right],$$

а это следует из (4.6). Этим завершается доказательство (4.4). $\square$

Таким образом, для всех типов операторов дробного дифференцирования будем пользоваться единым обозначением $\mathcal{D}_n^\alpha$:

$$(4.7) \quad \mathcal{D}_{n(\text{ser})}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_{n(\text{int})}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_n^\alpha f(x) =: \mathcal{D}_n^\alpha f(x), \quad \alpha > 0.$$

Лемма 4.1. Для достаточно гладких функций f в шаре B и, в частности, для гармонических функций $f \in h(B)$ имеет место формула обратимости

$$(4.8) \quad \mathcal{D}_n^\alpha \mathcal{D}_n^{-\alpha} f(x) = \mathcal{D}_n^{-\alpha} \mathcal{D}_n^\alpha f(x) = f(x), \quad x \in B, \quad \alpha > 0.$$

Доказательство. Для гармонических функций формула (4.8) очевидна ввиду их разложимости в ряд сферических гармоник и определений (3.2), (3.3).

Для более общих функций, дифференцируемых достаточное число раз, будем доказывать (4.8) посредством определений (3.4), (3.5), (4.2). Ввиду этих определений и тождества $D_2^\alpha D_2^{-\alpha} g(x) = g(x)$ для интегрируемых функций g , получим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n^\alpha \mathcal{D}_n^{-\alpha} f(x) &= \mathcal{D}_n^\alpha \left[r^{-(\alpha+n/2-1)} D_2^{-\alpha} \{ r^{n/2-1} f(x) \} \right] = \\ &= r^{-(n/2-1)} D_2^\alpha \left[r^{\alpha+n/2-1} r^{-(\alpha+n/2-1)} D_2^{-\alpha} \{ r^{n/2-1} f(x) \} \right] = \\ &= r^{-(n/2-1)} D_2^\alpha D_2^{-\alpha} \{ r^{n/2-1} f(x) \} = r^{-(n/2-1)} r^{n/2-1} f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Аналогично доказываем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n^{-\alpha} \mathcal{D}_n^\alpha f(x) &= \mathcal{D}_n^{-\alpha} \left[r^{-(n/2-1)} D_2^\alpha \{ r^{\alpha+n/2-1} f(x) \} \right] = \\ &= r^{-(\alpha+n/2-1)} D_2^{-\alpha} \left[r^{n/2-1} r^{-(n/2-1)} D_2^\alpha \{ r^{\alpha+n/2-1} f(x) \} \right] = \\ &= r^{-(\alpha+n/2-1)} D_2^{-\alpha} D_2^\alpha \{ r^{\alpha+n/2-1} f(x) \} = r^{-(\alpha+n/2-1)} r^{\alpha+n/2-1} f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тождеством $D_2^{-\alpha} D_2^\alpha \{ r^\beta f(x) \} = r^\beta f(x)$, $\beta \geq \alpha$. $\square$

5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Перейдем к применению операторов дробного интегродифференцирования для изучения весовых классов гармонических функций. Везде будем пользоваться стандартными обозначениями: $x = r\zeta$, $y = \rho\eta$, $0 \leq r, \rho < 1$, $\zeta, \eta \in S$, dV — нормированная n -мерная объемная мера на шаре B , $dV(x) = n r^{n-1} dr d\sigma(\zeta)$, $V(B) = 1$. Каждая гармоническая функция $u(x) \in h(B)$ разложима в ряд однородных сферических гармоник

$$(5.1) \quad u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k} a_{kj} r^k Y_{kj}(\zeta) \equiv \sum_{k,j} a_{kj} r^k Y_{kj}(\zeta), \quad x = r\zeta \in B,$$

Напомним определение расширенного ядра Пуассона в шаре B , см. [16, глава 6].

Определение 5.1. (Расширенное ядро Пуассона в шаре B)

$$P(x, y) \equiv P_0(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x, y) = \frac{1 - |x|^2 |y|^2}{(1 - 2x \cdot y + |x|^2 |y|^2)^{n/2}}, \quad x \in B, y \in \bar{B},$$

где Z_k — зональные гармоники, см. [27], [16].

Расширенное ядро Пуассона гармонично в B по каждой из переменных x и y , а также гармонично по x при $y \in \bar{B}$. Оно обладает полезными свойствами $P(x, y) = P(y, x)$, $P(x, y) = P(r\zeta, \zeta)$, $x = r\zeta$, разлагается в ряд сферических гармоник

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k} \overline{Y_{k_j}(y)} r^k Y_{k_j}(\zeta).$$

Если $\eta \in S$, то $P(x, \eta)$ — обычное (нерасширенное) ядро Пуассона в B .

Определим теперь ядро Пуассона Бергмана.

Определение 5.2. (Ядро Пуассона Бергмана в шаре B)

$$(5.2) \quad P_{\alpha}(x, y) := \mathcal{D}_n^{\alpha} P(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k + n/2)}{\Gamma(k + n/2)} Z_k(x, y), \quad x, y \in B, \quad \alpha \geq 0.$$

Подобные ядра определены в работах [8], [10] (для целых α), [11] – [15], [18] – [20]. При $\alpha = 0$, очевидно, ядро (5.2) сводится к расширенному ядру Пуассона $P \equiv P_0$ в шаре B . Ядро Пуассона Бергмана (5.2) вместе с техникой дробного интегрирования позволяет вывести интегральную формулу из Теоремы 1.1 типа Пуассона–Бергмана для функций из $h(p, q, \alpha)$.

Доказательство Теоремы 1.1. Обозначим интеграл в правой части формулы (1.1) как оператор

$$(T_{\alpha}u)(x) := \frac{2}{n \Gamma(\alpha)} \int_B (1 - |y|^2)^{\alpha-1} P_{\alpha}(x, y) u(y) dV(y), \quad x \in B, \quad \alpha > 0.$$

Сначала докажем теорему для функций $u(x) \in h(1, 1, \beta)$. Для этого вначале предположим, что $u(x) \in h(B) \cap C(\bar{B})$. Полагая, что функция $u(x)$ разложена в

ряд сферических гармоник (5.1), преобразуем интеграл $(T_\beta u)(x)$,

$$\begin{aligned} (T_\beta u)(x) &= \frac{2}{n \Gamma(\beta)} \int_B (1 - |y|^2)^{\beta-1} P_\beta(x, y) u(y) dV(y) \\ &= \frac{2}{n \Gamma(\beta)} \int_B (1 - |y|^2)^{\beta-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta + k + n/2)}{\Gamma(k + n/2)} Z_k(x, y) \right] \left(\sum_{m,j} a_{mj} Y_{mj}(y) \right) dV(y) \\ &= \frac{2}{n \Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta + k + n/2)}{\Gamma(k + n/2)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_m} a_{mj} \int_B (1 - |y|^2)^{\beta-1} Z_k(x, y) Y_{mj}(y) dV(y). \end{aligned}$$

Учитывая, что $Z_k(x, y) = r^k \rho^k Z_k(\zeta, \eta)$, $Z_k(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^{d_k} Y_{ki}(\zeta) \overline{Y_{ki}(\eta)}$, отдельно упростим последний интеграл, считая $k \geq 0$ фиксированным,

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_m} a_{mj} \int_B (1 - |y|^2)^{\beta-1} Z_k(x, y) \rho^m Y_{mj}(\eta) dV(y) \\ &= r^k \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_m} a_{mj} \int_B (1 - |y|^2)^{\beta-1} \rho^k \rho^m Z_k(\zeta, \eta) Y_{mj}(\eta) dV(y) \\ &= n r^k \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_m} a_{mj} \int_0^1 (1 - \rho^2)^{\beta-1} \rho^k \rho^m \rho^{n-1} \left(\int_S Z_k(\zeta, \eta) Y_{mj}(\eta) d\sigma(\eta) \right) d\rho \\ &= n r^k \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_m} a_{mj} \int_0^1 (1 - \rho^2)^{\beta-1} \rho^{k+m+n-1} \sum_{i=1}^{d_k} Y_{ki}(\zeta) \left[\int_S \overline{Y_{ki}(\eta)} Y_{mj}(\eta) d\sigma(\eta) \right] d\rho \\ &= n r^k \sum_{j=1}^{d_k} a_{kj} Y_{kj}(\zeta) \int_0^1 (1 - \rho^2)^{\beta-1} \rho^{2k+n-1} d\rho \\ &= \frac{n}{2} r^k \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(k + n/2)}{\Gamma(\beta + k + n/2)} \sum_{j=1}^{d_k} a_{kj} Y_{kj}(\zeta). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались ортогональностью в $L^2(S)$ сферических гармоник разных степеней ($k \neq m$). Далее, подставляя, получаем

$$\begin{aligned} (T_\beta u)(x) &= \frac{2}{n \Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta + k + n/2)}{\Gamma(k + n/2)} \left(\frac{n}{2} r^k \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(k + n/2)}{\Gamma(\beta + k + n/2)} \sum_{j=1}^{d_k} a_{kj} Y_{kj}(\zeta) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k} a_{kj} r^k Y_{kj}(\zeta) = u(x). \end{aligned}$$

Искомая функция $u(x) = (T_\beta u)(x)$, (1.1) получена. Для произвольной функции $u(x) \in h(1, 1, \beta)$ применим доказанную часть теоремы по отношению к растянутой функции $u_\delta(x) := u(\delta x)$, $0 < \delta < 1$, что приводит к $u_\delta(x) = (T_\beta u_\delta)(x)$. Теперь

остается перейти к пределу при $\delta \rightarrow 1^-$ (см., например, [17],[20])

$$(5.3) \quad \|u - u_\delta\|_{h(1,1,\beta)} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 1^-,$$

и в итоге получаем искомую формулу (1.1) для произвольной функции $u \in h(1,1,\beta)$. Теперь докажем теорему для общей функции $u \in h(p,q,\alpha)$.

Если $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq 1$, $\beta \geq \alpha$, то согласно вложениям [21, Теор.1(i)-(iii)] имеем $h(p,q,\alpha) \subset h(1,1,\beta)$.

Если $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\beta > \alpha$, то согласно вложениям [21, Теор.1(ii),(vi)] имеем $h(p,q,\alpha) \subset h(1,q,\alpha) \subset h(1,1,\beta)$.

Если $0 < p < 1$, $0 < q \leq \infty$, $\beta > \alpha + (n-1)(1/p - 1)$, то согласно вложениям [21, Теор.1(iv),(vi)] имеем $h(p,q,\alpha) \subset h(1,q,\alpha + (n-1)(1/p - 1)) \subset h(1,1,\beta)$.

Во всех случаях получаем $u(x) \in h(1,1,\beta)$, что сводит доказательство к уже доказанному случаю. $\square$

Замечание 5.1. Легко заметить, что в приведенном доказательстве мы лишь проверили истинность (1.1) без конструктивного вывода этой формулы. Такой метод доказательства в специальных случаях применялся, например, в [11], [12],[8],[19],[20]. Было бы полезно найти конструктивный вывод формулы (1.1). Наше определение дробной производной (4.2), Теорема 4.1 и Лемма 4.1 позволяют найти конструктивное и очень короткое доказательство Теоремы 1.1.

Второе доказательство Теоремы 1.1. Пусть $u(x) \in h(1,1,\beta)$, $\beta > 0$ — произвольная функция. В силу формулы обратимости (4.8) и определения 4.2, можем преобразовать

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathcal{D}_n^{-\beta} \mathcal{D}_n^\beta u(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-1} \mathcal{D}_n^\beta u(tx) t^{n/2-1} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-\rho^2)^{\beta-1} \mathcal{D}_n^\beta u(\rho^2 x) \rho^{2(n/2-1)} 2\rho d\rho = \\ &= \frac{2}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-\rho^2)^{\beta-1} \mathcal{D}_n^\beta \left[\int_S P(x, \rho\eta) u(\rho\eta) d\sigma(\eta) \right] \rho^{n-1} d\rho = \\ &= \frac{2}{n\Gamma(\beta)} \int_0^1 \int_S (1-\rho^2)^{\beta-1} \mathcal{D}_n^\beta P(x, \rho\eta) u(\rho\eta) n \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\eta) = \\ &= \frac{2}{n\Gamma(\beta)} \int_B (1-|y|^2)^{\beta-1} P_\beta(x, y) u(y) dV(y), \quad x \in B. \end{aligned}$$

Сходимость последнего интеграла внутри шара B следует из оценки ядра Пуассона-Бергмана (см., например, [13],[14],[18])

$$|P_\beta(x, y)| \leq C(\beta, n) \frac{1}{(1-|x||y|)^{\beta+n-1}}, \quad x, y \in B.$$

Abstract. In the paper, a new form of fractional derivative is introduced for functions defined in a unit ball in $\mathbb{R}^n$. As an application, an integral representation for harmonic functions with finite mixed-norm in the ball is obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, Интегралы и Производные Дробного Порядка и Некоторые их Приложения, Наука и техника, Минск (1987).
- [2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Some properties of fractional integrals", (I) Math. Z., **27**, 565 – 606 (1928); (II) Math. Z., **34**, 403 – 439 (1932).
- [3] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions", Quart. J. Math. (Oxford), **12**, 221 – 256 (1941).
- [4] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, **2**, Мир, М. (1965).
- [5] М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, Наука, М. (1966).
- [6] T. M. Flett, "The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities", J. Math. Anal. Appl., **38**, 746 – 765 (1972).
- [7] T. M. Flett, "Lipschitz spaces of functions on the circle and the disc", J. Math. Anal. Appl., **39**, 125 – 158 (1972).
- [8] A. E. Djrbashian and F. A. Shamoian, Topics in the Theory of A_α^p Spaces, Teubner-Texte zur Math., b. 105, Teubner, Leipzig (1988).
- [9] K. Zhu, Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball, Graduate Texts in Mathematics, **226**, Springer-Verlag, New York (2005).
- [10] R. Coifman and R. Rochberg, "Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p ", Asterisque, **77**, 11 – 66 (1980).
- [11] А. Э. Джрбашян, "Интегральные представления и непрерывные проекторы в некоторых пространствах гармонических функций", Мат. Сборник, **121**, по. 2, 259 – 271 (1983).
- [12] А. Э. Джрбашян, "О порядке роста дробных производных и интегралов гармонических функций в многомерном шаре", Изв. Акад. Наук Арм. ССР, Математика, **20**, по. 5, 366 – 374 (1985).
- [13] J. Miao, "Reproducing kernels for harmonic Bergman spaces of the unit ball", Monatsh. Math., **125**, 25 – 35 (1998).
- [14] M. Jevtić and M. Pavlović, "Harmonic Bergman functions on the unit ball in $\mathbb{R}^n$ ", Acta Math. Hungar., **85**, 81 – 96 (1999).
- [15] O. Blasco and S. Perez-Esteva, " L^p continuity of projectors of weighted harmonic Bergman spaces", Collect. Math., **51**, 49 – 58 (2000).
- [16] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic Function Theory, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York (2001).
- [17] C. Liu, J. Shi and G. Ren, "Duality for harmonic mixed-norm spaces in the unit ball of $\mathbb{R}^n$ ", Ann. Sci. Math. Québec, **25**, 179 – 197 (2001).
- [18] G. Ren and U. Kähler, "Weighted harmonic Bloch spaces and Gleason's problem", Complex Variables Theory Appl., **48**, 235 – 245 (2003).
- [19] A. I. Petrosyan, "On weighted classes of harmonic functions in the unit ball of $\mathbb{R}^n$ ", Complex Variables Theory Appl., **50**, 953 – 966 (2005).
- [20] A. I. Petrosyan, "On weighted harmonic Bergman spaces", Demonstratio Math., **41**, 73 – 83 (2008).
- [21] К. Аветисян, Е. Тоноян, "Непрерывные вложения в гармонических пространствах со смешанной нормой в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$ ", Известия НАН Армении, Математика, **47**, по. 5, 3 – 20 (2012).
- [22] K. Avetisyan, "Continuous inclusions and Bergman type operators in n -harmonic mixed norm spaces on the polydisc", J. Math. Anal. Appl., **291**, 727 – 740 (2004).
- [23] K. Avetisyan, "Weighted integrals and Bloch spaces of n -harmonic functions on the polydisc", Potential Analysis, **29**, 49 – 63 (2008).

- [24] S. Stević, "Holomorphic functions on the mixed norm spaces on the polydisc", J. Korean Math. Soc., **45**, 63 – 78 (2008).
- [25] M. Jevtić, "Bounded projections and duality in mixed-norm spaces of analytic functions", Complex Variables Theory Appl., **8**, 293 – 301 (1987).
- [26] S. Gadbois, "Mixed-norm generalizations of Bergman spaces and duality", Proc. Amer. Math. Soc., **104**, no. 4, 1171 – 1180 (1988).
- [27] E.M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1971).

Поступила 9 декабря 2014